

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité: "**Automatique**"

Préparée au **Laboratoire d'Automatique de Grenoble**
dans le cadre de l'Ecole Doctorale "Automatique-Productique"

Présentée et soutenue publiquement par:

Mehrzađ NAMVAR

le 10 Janvier 2001

Interaction entre Identification et Commande:

"Identification pour la Commande Robuste"

Directeur de these:

M. Ioan Doré LANDAU

JURY:

M. Luc DUGARD: Président

M. Mohamed M'SAAD: Rapporteur

M. Eric WALTER: Rapporteur

Mme. Alina BESANCON-VODA: Examineur

M. Ioan Doré LANDAU: Examineur

2 Interaction entre Identification et Commande

Table des matières

Notations et Définitions

7

1. Introduction générale

11

- 1.1. Le problème de commande 11
- 1.2. Le problème d'identification pour la commande 14
 - 1.2.1. Contenu de la thèse 15

2. Formulation du problème d'identification des modèles

linéaires et de quantification des incertitudes LTI

19

- 2.1. Introduction 19
- 2.2. Erreur dans le pire des cas d'un algorithme d'identification 20
- 2.3. Algorithmes quasiment optimaux 23
- 2.4. Signaux optimaux d'entrée 24
- 2.5. Convergence robuste et convergence exacte 25
- 2.6. Quelques exemples d'ensembles des modèles non falsifiés, S_N 26
- 2.7. Méthode non-simultanée d'identification d'un modèle linéaire et de quantification des incertitudes LTI 28
- 2.8. Méthode simultanée d'identification d'un modèle et de quantification des incertitudes LTI 31
 - 2.8.1. Ensemble des modèles 31
 - 2.8.2. Description de la stratégie d'identification 31
- 2.9. Conclusion 33

3. Identification en H_∞

35

- 3.1. Introduction 35
 - 3.1.1. Approche fréquentielle 35
 - 3.1.2. Approche temporelle 37
 - 3.1.3. La démarche suivie dans ce chapitre 38
- 3.2. Méthode non-simultanée 39
 - 3.2.1. Analyse de biais 41

4 Interaction entre Identification et Commande

3.2.2.	Algorithme itératif	42
3.2.3.	Quantification de l'erreur de modélisation	43
3.3.	Méthode simultanée	44
3.3.1.	Structure de modèle affine en les paramètres	45
3.3.2.	Algorithme itératif	46
3.4.	Méthode simultanée d'identification d'un modèle sans restriction sur l'ordre	47
3.4.1.	Structure de modèle affine en paramètres	48
3.4.2.	Algorithme itératif	50
3.5.	Exemple	51
3.5.1.	Méthode non-simultanée	52
3.5.2.	Méthode simultanée	53
3.6.	Conclusion	53
4.	Identification en l_1	
	57	
4.1.	Introduction	57
4.2.	Méthode non-simultanée	58
4.2.1.	Structure de modèle affine en paramètres	59
4.2.2.	Algorithme itératif	59
4.3.	Méthode simultanée	60
4.3.1.	Modèle nominal \hat{G} avec structure FIR	61
4.3.2.	Structure de modèle affine en paramètres pour le cas $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$	64
4.3.3.	Algorithme itératif	66
4.4.	Exemple	69
4.5.	Conclusion	71
5.	Identification en métrique Gap	
	73	
5.1.	Introduction	73
5.1.1.	Définitions	73
5.2.	Identification des facteurs premiers et normalisés d'un modèle non-falsifié	75
5.2.1.	Ensemble des modèles	76
5.2.2.	Signal d'entrée	77
5.2.3.	Algorithme d'identification (stratégie simultanée)	77
5.3.	Méthode non-simultanée pour l'identification des facteurs premiers et normalisés	81
5.3.1.	Bornes de l'erreur de modélisation	83
5.4.	Exemple	83
5.5.	Conclusion	84

6. Identification des modèles avec incertitude nonlinéaire ou variante dans le temps	
87	
6.1. Introduction	87
6.2. Topologie l_1 -ind	88
6.2.1. Structure de modèle affine en paramètres	89
6.3. Topologie l_2 -ind	90
6.4. Exemple	92
6.5. Conclusion	94
7. Identification en boucle fermée	
95	
7.1. Introduction	95
7.2. Schéma itératif : Nécessité de l'identification en boucle fermée . .	96
7.3. Méthode non-simultanée	97
7.3.1. Structure affine en les paramètres	98
7.3.2. Algorithme itératif	99
7.4. Méthode simultanée : Identification de la fonction de sensibilité .	101
7.4.1. Structure de modèle affine en les paramètres	103
7.4.2. Algorithme itératif	104
7.5. Réduction de l'ordre de correcteur	104
7.6. Exemple	105
7.7. Conclusion	106
8. Conclusion générale et Perspectives	
109	
8.1. Perspectives	112
9. Annexe I : Identification et commande d'un système de transmission flexible	
115	
9.1. Introduction	115
9.2. Description du système	115
9.3. Identification	116
9.4. Commande multiobjectif	118
9.4.1. Stabilité robuste	119
9.4.2. Synthèse du correcteur	120
9.4.3. Évaluation de performance	121
10. Annexe II	
129	
10.1. Preuves et Démonstrations	129
10.2. Un exemple pour la conception d'un correcteur robuste \mathcal{H}_∞	131

**11. Annexe III : Exemples pour la programmation linéaire
et LMI**

133	
11.1. Exemple 1 : LMI	133
11.2. Exemple 2 : La programmation linéaire	136
Index	139
Sélection d'articles	
141	
Bibliographie	
143	

Notations et Définitions

- \mathcal{C} : le plan complexe.
 \mathcal{D}_ρ : le disque : $\{z \in \mathcal{C} \mid |z| \leq \rho\}$ avec $\rho < 1$
 v : $\{v(t) \mid t = 0, \dots, \infty\}$
 $v_{[N]}$: $\{v(t) \mid v(t) \in \mathcal{R}, t = 0, \dots, N\}$
 LT : la matrice Toeplitz triangulaire inférieure définie comme :

$$T_v \triangleq \begin{bmatrix} v_0 & 0 & \cdots & 0 \\ v_1 & v_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_N & v_{N-1} & \cdots & v_0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} .$$
- $T_v^{[i]}$: les premières $i + 1$ colonnes de T_v
 Π_N : l'opérateur de troncation défini comme : $\Pi_N v = v_{[N]}$ pour une séquence infinie, v .
 l_∞ : l'espace de toutes les séquences réelles v avec norme bornée et définie comme : $\|v\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |v(t)|$.
 $Bl_\infty(\sigma)$: $\{v \in l_\infty \mid \|v\|_\infty \leq \sigma\}$
 c_0 : $\{v \in l_\infty \mid \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0\}$
 l_1 : l'espace de toutes les séquences réelles, g avec norme définie comme : $\|g\|_1 = \sum_{t=0}^{\infty} |g(t)|$
 l_p : l'espace de toutes les séquences réelles, v avec norme définie comme : $\|v\|_p = \left[\sum_{t=0}^{\infty} |v(t)|^p \right]^{\frac{1}{p}}, p = 1, 2, \dots$.
 • la fonction de transfert d'un système LTI est définie comme :

$$\Delta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{-k}, \forall z^{-1} \in \mathcal{D}_1$$
 si $q, p \in l_\infty$ et $p(t) = \Delta q(t)$ alors $\|\Delta\|_1 = \sup_{q \neq 0} \frac{\|p\|_\infty}{\|q\|_\infty}$.
 si $q, p \in l_p$ et $p(t) = \Delta q(t)$ alors la norme induite $l_p - l_p$ de Δ est définie comme : $\|\Delta\|_{l_p - \text{ind}} = \sup_{q \neq 0} \frac{\|p\|_p}{\|q\|_p}$.
- \mathcal{RH}_∞ : l'espace de toutes les fonctions de transferts rationnelles avec norme \mathcal{H}_∞ bornée.
 soit $\Delta(z)$ une fonction de transfert stable sans aucun pôle sur le cercle unité, alors norme \mathcal{H}_∞ de $\Delta(z)$ est définie comme : $\|\Delta\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathcal{R}} |\Delta(e^{j\omega})|$.

$\mathcal{BH}_\infty(\rho, M)$: $\{G \in \mathcal{RH}_\infty \mid G(z) = \sum_{l=0}^{\infty} g_l z^{-l}, g_l \leq M\rho^l, 0 < \rho < 1\}$
\mathcal{P}_m	: l'espace de tous les modèles à réponse impulsionnelle finie (FIR) d'ordre m .
$\mathcal{F}_n(\rho)$: l'espace de tous les FIR d'ordre n comme : $A(z, \theta_a) = 1 + \sum_{k=1}^n a_k z^{-k}$ avec les zéros dans \mathcal{D}_ρ .
$\theta_a, \theta_b, \vartheta^i$: les vecteurs de coefficients des $A(z, \theta_a)$, $B(z, \theta_b)$ et $\Delta_i(z, \vartheta^i)$, respectivement définis comme : $\theta_a = [a_0, a_1, \dots, a_n]'$, $\theta_b = [b_0, b_1, \dots, b_m]'$ et $\vartheta^i = [d_0, d_1, \dots, d_i]'$. De plus, $\theta \triangleq [\theta_a', \theta_b']'$ où ' indique transposition.
ℓ_1	: l'espace de toutes les fonctions de transfert rationnelles avec norme l_1 bornée.
\mathcal{B}	: l'espace de tous les systèmes avec norme l_1 bornée.
$\mathcal{RG}^{m,n}$: $\{\hat{G} \in \ell_1 \mid \hat{G} = \frac{B}{A}, A \in \mathcal{F}_n(\rho), B \in \mathcal{P}_m, \rho < 1\}$
N	: le nombre de données expérimentales.
LTI	: Linéaire et invariant dans le temps.
NL	: Nonlinéaire.
LTV	: Linéaire et variant dans le temps.
SISO	: Mono entrée-mono sortie.

Si X est un espace vectoriel de Banach [LUE 69], X^* est l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires et bornées dans X . L'action d'un élément de X^* sur un élément de X est représentée par : $\langle x, x^* \rangle$.

Si \mathcal{A} est un opérateur linéaire et borné qui transforme¹ l'espace X en l'espace Y , l'opérateur adjoint \mathcal{A}^* transforme Y^* en X^* comme suit : $\langle x, \mathcal{A}^* y^* \rangle = \langle \mathcal{A} x, y^* \rangle$.

Pour deux opérateurs linéaires et bornés, \mathcal{A} et \mathcal{B} , $(\mathcal{AB})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*$.

Si $x^* \in l_\infty$ et $x \in l_1$, l'action de x^* sur x est uniquement représentée comme suit :

$$\langle x, x^* \rangle = \sum_{t=0}^{\infty} x(t) x^*(t)$$

¹map

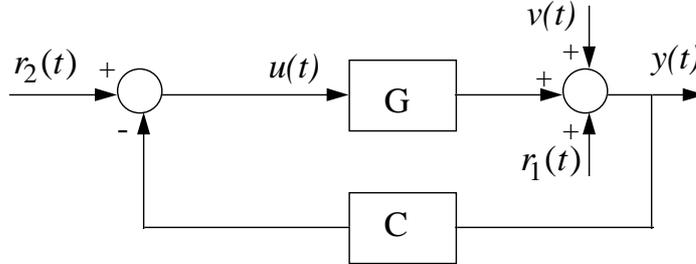


Figure 1. Schéma général du système en boucle fermée

On dit que x est aligné avec x^* quand :

$$|x^*(t)| < \|x^*\|_\infty \Rightarrow x(t) = 0 \quad [1]$$

$$x(t)x^*(t) \geq 0 \quad [2]$$

- $r_1(t)$ et $r_2(t)$: Signaux de consigne.
- $v(t)$: Signal de perturbation
- $S(G, C)$: Fonction de sensibilité en sortie définie par : $S(G, C) = (I + GC)^{-1}$
- $S_u(G, C)$: Fonction de sensibilité en entrée définie par : $S_u(G, C) = CS(G, C)$
- $S_p(G, C)$: $GS(G, C)$
- $S(\hat{G}, C)$: Fonction de sensibilité nominale en sortie définie par : $S(\hat{G}, C) = (I + \hat{G}C)^{-1}$

• Pour simplifier la notation, une matrice comme $\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}$ sera écrite comme $\begin{bmatrix} A & * \\ B & C \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} A & B' \\ * & C \end{bmatrix}$.

Chapitre 1

Introduction générale

1.1. Le problème de commande

Un procédé réel est sous l'influence de plusieurs sources de signaux comme le bruit, le signal de commande, le signal de consigne, etc. L'objectif d'une loi de commande est de produire un signal de commande, en utilisant des signaux de mesure pour obtenir une certaine performance désirée comme par exemple le rejet de perturbations ou la poursuite désirée. Ces performances sont souvent représentées par des signaux d'erreur et l'objectif de la loi de commande est décrit comme la minimisation d'une certaine norme du signal d'erreur. Des exemples de normes sont l'énergie de l'erreur, l'amplitude de l'erreur ou la variance de l'erreur. En résumé, en se référant à la figure 1.1, l'objectif est de trouver une loi de commande stabilisante qui minimise l'effet du bruit $e(t)$ ou de la consigne $r(t)$ dans le signal d'erreur $z(t)$. Cette loi de commande utilise évidemment le signal de mesure $y(t)$ pour produire le signal de commande $u(t)$.

Alors que la majorité des méthodes nécessitent un modèle pour construire la loi de commande, trouver un modèle exact pour un procédé nonlinéaire ou variant dans le temps est rarement possible. Pour obtenir un modèle du procédé on a besoin de données expérimentales et d'un algorithme d'identification. Bien qu'un grand nombre de lois de commande utilisent des modèles linéaires et invariants dans le temps (LTI), une description exacte d'un procédé nonlinéaire ou variant dans le temps par un modèle LTI n'est pas possible. De plus, la présence du bruit dans les signaux de mesure et la limitation du nombre de données expérimentales sont d'autres raisons pour l'absence d'un modèle exact du procédé.

On peut donc considérer une classe de systèmes incertains contenant le procédé

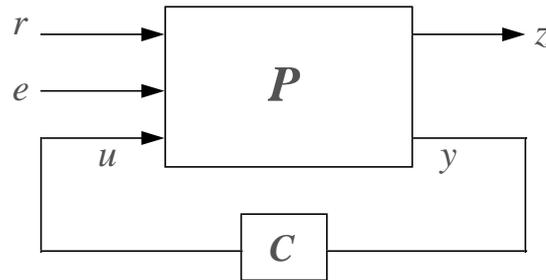


Figure 1.1. *Le procédé réel dans la boucle de commande*

réel. Dans cette classe l'incertitude est souvent exprimée par une certaine classe de perturbations. Deux types de perturbations peuvent être considérées :

- perturbation non-paramétrique : il s'agit des opérateurs bornés en une certaine norme. Ces opérateurs sont soit linéaires invariants dans le temps (LTI), représentant la sous-estimation de l'ordre de la fonction de transfert, soit nonlinéaires ou variants dans le temps, représentant la nonlinéarité ou la variation dans le temps du système ;
- perturbation paramétrique qui exprime l'existence d'incertitudes sur les paramètres du modèle.

Le schéma général pour une classe de modèles incertains est montré dans la figure 1.2. La loi de commande utilise donc la connaissance d'un modèle nominal \hat{P} et d'une borne connue de l'incertitude Δ afin d'assurer la stabilité du système incertain (stabilité robuste) et de minimiser l'effet du bruit $e(t)$ ou du signal de consigne $r(t)$ dans le signal d'erreur $z(t)$ en présence de l'incertitude (performance robuste). Voir [YOU 95] et [KHA 91a] pour l'analyse des problèmes de stabilité et de performance robuste.

Pour minimiser l'effet du bruit ou du signal de consigne dans le signal d'erreur, le choix d'une norme des signaux est important. Par exemple, si l'objectif de

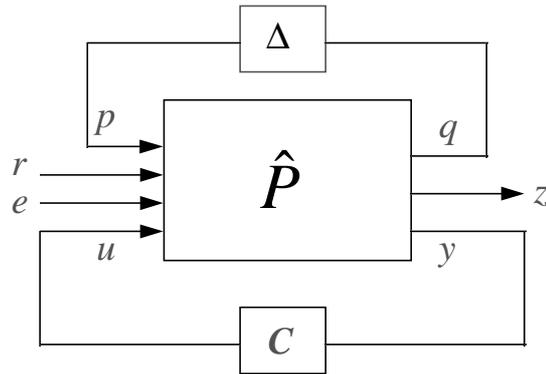


Figure 1.2. Ensemble des modèles incertains

commande est de minimiser le dépassement ou de rejeter l'effet de la perturbation persistante ¹ dans le signal d'erreur, la norme l_∞ est préférable. Dans ce cas une approche pire des cas pour le problème de commande est de trouver un correcteur C tel que la norme l_1 de système entre $z(t)$ et $r(t)$ ou entre $z(t)$ et $e(t)$ soit minimale ([DAH 87], [DAH 95], [KHA 96]). Cependant, pour minimiser l'énergie du signal d'erreur, la minimisation de la norme \mathcal{H}_∞ de la fonction de transfert entre $z(t)$ et $r(t)$ est nécessaire ([BOY 87], [ZHO 96], [YAM 98]). Pour minimiser la variance du signal d'erreur (quand le signal de bruit est blanc) il est préférable de minimiser la norme H_2 de transfert entre $z(t)$ et $e(t)$ qui minimise également l'énergie de la réponse impulsionnelle de cette fonction de transfert [GRE 95]. On sait aussi [DAH 95] que la norme H_2 de la fonction de transfert entre $z(t)$ et $r(t)$ (ou $e(t)$) est le gain dans le pire des cas entre l'amplitude de $z(t)$ et l'énergie de $r(t)$ (ou $e(t)$).

Pour assurer la robustesse en stabilité une approche est de minimiser une norme de la fonction de transfert en boucle fermée entre $q(t)$ et $p(t)$ (voir la figure 1.2). Le choix de la norme dépend de celle utilisée pour exprimer l'incertitude Δ .

¹perturbation bornée en amplitude

Parfois il est encore nécessaire de minimiser une norme d'une certaine fonction de transfert en boucle fermée sous réserve qu'une autre norme d'une autre fonction de transfert en boucle fermée soit bornée par une certaine valeur (Commande multi-objectifs, voir [KHA 91b] [ELI 97], [SCH 97], [CHI 96]).

1.2. Le problème d'identification pour la commande

L'identification pour la commande consiste à trouver dans un ensemble des modèles un modèle qui a une distance minimale avec le vrai système et à quantifier l'incertitude du modèle dans une norme compatible avec celle de la commande. On peut considérer deux approches générales pour l'identification des systèmes dans la littérature. Dans l'approche probabiliste le modèle est considéré comme un élément aléatoire qui appartient à une classe paramétrique de distributions probabilistes et l'objectif est d'identifier asymptotiquement le vrai système considéré comme un élément de cette classe [LJU 87], [GEV 92], [DUG 80]. Dans cette approche l'erreur du modèle est souvent quantifiée par des bornes probabilistes ² tandis que la commande robuste nécessite plutôt une borne dans le pire des cas et déterministe ³.

Au contraire, l'approche ensembliste pour l'identification ⁴ souvent suppose que le vrai système appartient à un ensemble connu de modèles et que les données expérimentales sont contaminées par une perturbation inconnue mais avec une borne connue ([WAL 97], [MIL 91], [GIA 97b], [GAR 98]). Contrairement au cas probabiliste, on présume très peu sur la perturbation et par conséquent on n'établit pas la convergence exacte du modèle vers le vrai système. On peut donc seulement parler de la convergence asymptotique du modèle vers un voisinage du vrai système. La convergence exacte dans le sens pire des cas peut être rétablie bien évidemment avec les hypothèses supplémentaires sur le signal de perturbation et le signal d'entrée [VEN 97], [VER 91], [GIA 97a]. Voir aussi la section 2.5

²soft bound

³hard bound

⁴set-membership

pour une discussion supplémentaire. En général, la convergence d'un modèle vers le vrai système dépend des éléments suivants :

- choix de l'ensemble du modèle (s'il est compact, borné, ...),
- signal d'entrée (persistance, périodicité, indépendance de signal de perturbation ...),
- algorithme d'identification,
- hypothèses sur le signal de perturbation (stationnaire, quasi-stationnaire, blanc, la précision de la connaissance *a priori* sur une borne pour le signal de perturbation, les hypothèses sur autocorrélation du signal, ...).

Néanmoins, dans l'approche ensembliste on peut quantifier l'incertitude avec une borne dans le pire des cas en plusieurs normes. Ceci rend cette approche plus appropriée pour la commande robuste.

1.2.1. *Contenu de la thèse*

Cette thèse propose différents algorithmes quasiment optimaux qui identifient un modèle nominal et quantifient l'erreur de modélisation dans les différentes topologies de systèmes. Plus particulièrement nous considérons la topologie de graphe, \mathcal{H}_∞ , et l_1 . Notre approche est plutôt dans le contexte de "set-membership" où nous considérons les modèles rationnels et non-affines en les paramètres. Ceci nous donne la possibilité d'identifier des modèles avec un ordre fixe et faible. Il faut noter que la plupart des approches classiques traitent des modèles affines en les paramètres [WAH 96], [HEU 95a], [WAH 94] ou [GEV 92] et l'utilisation de ces modèles pour la commande donne des correcteurs d'ordre élevé [ZHO 96], [DAH 95], [LAN 97b].

Nous considérons surtout le cas où le vrai système n'appartient pas à l'ensemble des modèles. Notre démarche est alors de trouver le meilleur modèle ayant une distance minimale au vrai système et de trouver les bornes pire des cas pour l'erreur de modélisation. Ces distances sont exprimées dans les topologies de graphe, \mathcal{H}_∞ et l_1 .

Les algorithmes d'identification sont basés sur la résolution des problèmes d'op-

timisation convexes de type programmation linéaire (LP) ou LMI ⁵. Pour traiter la non-convexité de certains problèmes, nous proposons des algorithmes itératifs où dans chaque étape on résout un problème convexe.

Nous adoptons deux stratégies générales pour résoudre le problème d'identification pour la commande. Dans la première stratégie que nous appelons *la méthode simultanée*, l'identification des paramètres du modèle et la quantification de l'incertitude sont réalisées dans une seule étape, tandis que dans la deuxième stratégie (*non-simultanée*) l'identification du modèle et la quantification de l'incertitude sont réalisées dans deux étapes différentes. Nous démontrons aussi que ces stratégies sont applicables pour l'identification en boucle fermée où l'objectif est de minimiser la distance (\mathcal{H}_∞ ou l_1) entre les fonctions de sensibilités nominale et réelle.

1.2.1.1. Organisation de la thèse

Le chapitre 1 est une introduction générale et une présentation des notations.

Dans le chapitre 2 nous formulons le problème d'identification d'un modèle et de quantification des incertitudes LTI dans le sens pire des cas. L'effet d'une possible non-linéarité ou la variation du système est considéré *dans* le signal de perturbation pour lequel une borne est supposée disponible. Nous présentons deux stratégies générales qui seront appliquées dans les chapitres 3, 4 et 5.

Dans le chapitre 3, Nous étudions l'identification des modèles avec ordre fixe et non-affines en les paramètres dans la topologie \mathcal{H}_∞ . Nous présentons les algorithmes itératifs traitant des problèmes non-convexes. Dans la section 3.4 nous présentons aussi une méthode pour l'identification des modèles non-affines mais avec des ordres non-fixes. Les algorithmes sont basés sur l'application de deux stratégies générales présentées au chapitre 2. Voir [NAM 01b] pour une discussion supplémentaire.

Le chapitre 4 propose de résoudre le problème d'identification des modèles avec ordre fixe et non-affines dans la topologie l_1 . Ce problème est posé par la

⁵Inégalité matricielle linéaire

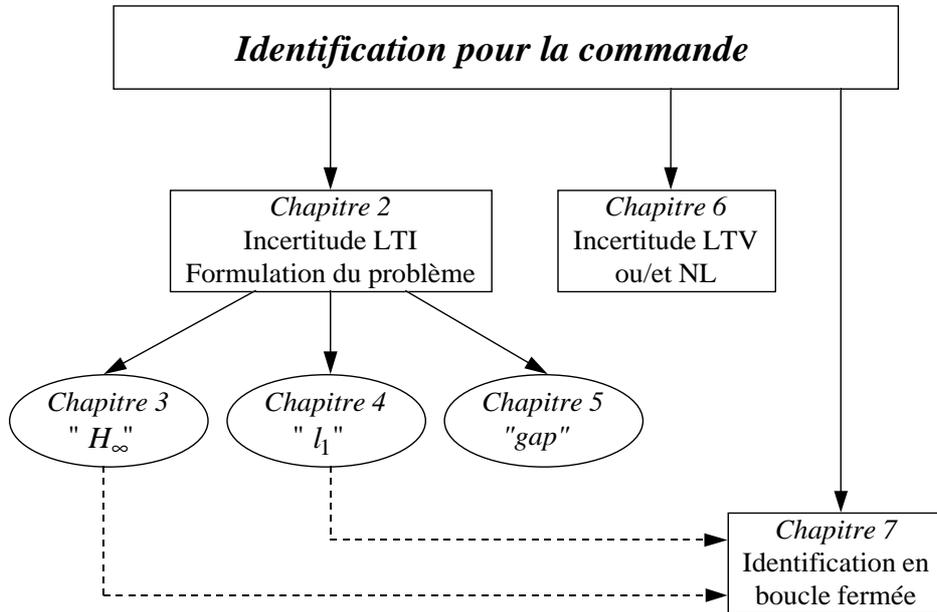


Figure 1.3. L'organisation de la thèse

programmation convexe en dimension *infinie*. Ce problème est ensuite dualisé ce qui permet d'obtenir *plus d'information* sur la structure d'incertitude LTI et de signal de résidu. La dualisation permet aussi de présenter une méthode pour évaluer l'estimation initiale de l'amplitude du signal de perturbation. Une discussion plus détaillée ainsi que la démonstration des résultats peuvent être retrouvées dans [NAM 01a].

Dans le chapitre 5, l'identification des facteurs premiers et normalisés d'un modèle est étudiée et les bornes pire des cas exprimées dans la métrique de gap (écart distance) ou ν -gap sont obtenues. Nous adoptons les stratégies générales présentées dans le chapitre 2.

Le chapitre 6 traite de l'identification des modèles linéaires avec incertitude LTV ou nonlinéaire (NL) dans les topologies l_1 et l_2 des systèmes. L'effet de la nonlinéarité ou la variation du système est représenté par un opérateur borné, *indépendamment* du signal de perturbation. Ceci nous permet de quantifier les incertitudes LTV ou NL.

Dans le chapitre 7, nous étudions l'identification l_1 et \mathcal{H}_∞ en boucle fermée où l'objectif est d'identifier les modèles de telle manière que la distance en norme \mathcal{H}_∞ ou l_1 entre les fonctions de sensibilités réelle et nominale soit minimale. Ces modèles seront ensuite utilisables pour l'identification-commande consécutive. Les algorithmes sont techniquement basés sur les résultats obtenus dans les chapitres antérieurs.

Enfin, le chapitre 8 est la conclusion générale de la thèse et les perspectives.

Chapitre 2

Formulation du problème d'identification des modèles linéaires et de quantification des incertitudes LTI

Résumé : Dans ce chapitre, nous formulons le problème d'identification des modèles linéaires et de quantification des incertitudes *linéaires et invariantes dans le temps* (LTI), dans le sens du pire des cas. Nous considérons des incertitudes de type additif. Les stratégies présentées dans ce chapitre seront appliquées dans les chapitres 3, 4, 5 et 7.

2.1. Introduction

Supposons que le système inconnu G appartient à l'espace Banach des systèmes LTI et SISO, muni de la norme \mathcal{H}_∞ ou l_1 ou par la métrique gap (écart distance). Supposons aussi un ensemble ¹ de modèles \mathcal{G} auquel G appartient. Cet ensemble est supposé connu. Quelques exemples pour \mathcal{G} sont : l'ensemble des systèmes stables avec une borne sur le taux d'amortissement, l'ensemble des fonctions de transfert rationnelles avec le degré de McMillan n , l'ensembles des systèmes stables ayant la structure FIR ², etc.

Le signal d'entrée $u(t)$ appartient à l'ensemble des signaux connu \mathcal{U} . Des exemples pour \mathcal{U} sont les espaces des signaux l_∞ ou l_2 . Le signal de sortie $y(t)$ s'écrit :

$$y(t) = Gu(t) + v(t) \quad [2.1]$$

où $v(t)$ est le *signal de perturbation* borné en une certaine norme, $\|v\| \leq \sigma_v$. On suppose que σ_v est *a priori* connue.

¹Model set

²Finite Impulse Response

Plus précisément le signal de sortie $y(t)$ s'écrit :

$$y(t) = Gu(t) + \Delta_{nl}u(t) + e(t) \quad [2.2]$$

où Δ_{nl} est un opérateur borné, $\|\Delta_{nl}\| \leq 1$, représentant les effets :

- de la nonlinéarité,
- de la variation du système dans le temps.

Le signal $e(t)$ représente les effets :

- de la quantification des signaux continus
- de la condition initiale non-nulle,
- du bruit de mesure.

Le signal $e(t)$ est aussi supposé borné. D'après [2.1] et [2.2] on constate que le signal de perturbation $v(t)$ contient l'effet de l'opérateur Δ_{nl} et du bruit $e(t)$.

Dans ce chapitre nous nous intéressons seulement à identifier un modèle *linéaire*³ du système G . L'effet de Δ_{nl} est inclus dans la perturbation $v(t)$.

Un algorithme d'identification ϕ utilise N échantillons des signaux d'entrée-sortie $y_{[N]}$ et $u_{[N]}$ ainsi que la connaissance de l'ensemble des modèles \mathcal{G} , pour identifier un modèle linéaire dans \mathcal{G} . Nous appelons ce modèle \bar{G} . Ce modèle appartient à l'ensemble des modèles \mathcal{G} , comme le système G et s'écrit comme suit :

$$\bar{G} = \phi(u_{[N]}, y_{[N]})$$

2.2. Erreur dans le pire des cas d'un algorithme d'identification

Définition 2.1 Pour un signal d'entrée fixe $u(t)$, pour un ensemble connu de modèles \mathcal{G} et pour une borne σ_v de la perturbation, l'erreur asymptotique dans le pire des cas⁴ d'un algorithme ϕ est définie comme :

$$e_\infty(\phi, \mathcal{G}, u, \sigma_v) \triangleq \sup_{G \in \mathcal{G}} \sup_{\|v\| \leq \sigma_v} \limsup_{N \rightarrow \infty} \|\phi(\Pi_N[u, Gu + v]) - G\| \quad [2.3]$$

••

³Par rapport à l'entrée

⁴Worst case

Dans la littérature [GIA 97a], $e_\infty(\phi, \mathcal{G}, u, \sigma_v)$ est aussi appelé *erreur dans le pire des cas globale*.

Le modèle \bar{G} , identifié en utilisant $N \rightarrow \infty$ données temporelles est en effet une approximation de G avec un degré de précision $e_\infty(\phi, \mathcal{G}, u, \sigma_v)$.

Définition 2.2 Si on a :

$$\sup_{G \in \mathcal{G}} \sup_{\|v\| \leq \sigma_v} \limsup_{N \rightarrow \infty} \|\phi(\Pi_N[u, Gu+v]) - G\| = \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{G \in \mathcal{G}} \sup_{\|v\| \leq \sigma_v} \|\phi(\Pi_N[u, Gu+v]) - G\| \quad [2.4]$$

alors on dit que le modèle \bar{G} *converge* asymptotiquement vers une boule de rayon $e_\infty(\phi, \mathcal{G}, u, \sigma_v)$ autour de G et la convergence est appelée *uniforme*.

••

Parfois, bien que l'erreur asymptotique dans le pire des cas $e_\infty(\phi, \mathcal{G}, u, \sigma_v)$ soit finie, l'erreur dans le pire des cas pour N fini, n'est pas finie.

Si $\lim_{\sigma_v \rightarrow 0} e_\infty(\cdot) = 0$ alors l'algorithme ϕ est appelé *robustement convergent* [MAK 91].

Définition 2.3 Un algorithme *optimal* ϕ^o est un algorithme qui minimise l'erreur asymptotique dans le pire des cas [TRA 88], [TSE 93] :

$$E_\infty(\mathcal{G}, u, \sigma_v) \triangleq \inf_{\phi} e_\infty(\phi, \mathcal{G}, u, \sigma_v) \quad [2.5]$$

••

Définition 2.4 Étant donné les signaux d'entrée-sortie $u_{[N]}$ et $y_{[N]}$, et une borne pour le signal de perturbation σ_v , nous appelons S_N l'ensemble des modèles *non-falsifiés* jusqu'au temps N :

$$S_N(\mathcal{G}, u, y, \sigma_v) \triangleq \{\bar{G} \in \mathcal{G} \mid \|\Pi_N[y - \bar{G}u]\| \leq \sigma_v\} \quad [2.6]$$

••

L'ensemble S_N contient tous les modèles dans \mathcal{G} qui sont consistants avec les données $u_{[N]}$ et $y_{[N]}$ ainsi qu'avec la connaissance *a priori* de σ_v . Dans la

littérature [GIA 97a] et [MIL 91], S_N est parfois appelé *l'ensemble des modèles admissible*⁵. Une caractérisation possible de cet ensemble (qui n'est pas nécessairement convexe) conduirait à trouver le *meilleur* élément dans cet ensemble, c'est-à-dire celui avec le minimum d'erreur dans le pire des cas.

Avant de présenter les algorithmes optimaux identifiant cet élément, la définition du *diamètre d'information* est nécessaire :

Définition 2.5 Le diamètre d'information $D(\mathcal{G}, u, \sigma_v)$ est le diamètre du plus grand ensemble des modèles non falsifiés :

$$D(\mathcal{G}, u, \sigma_v) \triangleq \sup_{\bar{G} \in \mathcal{G}} \sup_{\|v\| \leq \sigma_v} \text{diam}(S_\infty(\mathcal{G}, u, y, \sigma_v)) \quad [2.7]$$

où $\text{diam}(S)$ est la plus grande distance entre deux éléments dans S .

••

Le diamètre d'information est en fait la plus grande distance entre deux modèles dans \mathcal{G} qui, en présence de signal de perturbation peuvent produire la même sortie (en supposant que le signal d'entrée pour les deux modèles soit le même). Si de plus l'ensemble des modèles \mathcal{G} est convexe et équilibré⁶, on peut démontrer [TRA 88] que le diamètre d'information est la plus grande distance entre deux modèles nonfalsifiés produisant la sortie $y = 0$:

$$D(\mathcal{G}, u, \sigma_v) = \text{diam}(S_\infty(\mathcal{G}, u, 0, \sigma_v))$$

On peut démontrer que l'erreur asymptotique dans le pire des cas est toujours plus grande que la moitié du diamètre d'information :

Proposition 2.1 [TSE 93] Pour chaque algorithme ϕ ,

$$\frac{1}{2}D(\mathcal{G}, u, \sigma_v) \leq e_\infty(\phi, \mathcal{G}, u, \sigma_v)$$

••

Pour tout algorithme utilisé pour l'identification, la moitié du diamètre d'information est toujours le minimum d'erreur dans le pire des cas qu'on peut obtenir.

⁵Feasible Model Set

⁶ $\bar{G} \in \mathcal{G} \Rightarrow -\bar{G} \in \mathcal{G}$

2.3. Algorithmes quasiment optimaux

La question principale que l'on peut se poser est : *Est ce qu'il existe un algorithme optimal ϕ^o tel que son erreur dans le pire des cas e_∞ puisse atteindre sa borne inférieure ?* Dans la littérature un tel algorithme est appelé *l'algorithme central*. Néanmoins, comme la synthèse des algorithmes centraux est normalement très difficile, d'autres algorithmes comme *l'algorithme de projection* ou *l'algorithme interpolateur* sont souvent appliqués. Particulièrement, on peut démontrer que si l'ensemble des modèles \mathcal{G} est compact, alors on peut construire un algorithme interpolateur tel que l'erreur dans le pire des cas de cet algorithme soit bornée par le diamètre d'information. Évidemment cet algorithme n'est pas optimal mais si on oublie le facteur 2, on peut dire que cet algorithme est *quasi-optimal* :

Théorème 2.1 [TSE 93] Supposons que l'ensemble des modèles est tel que $\mathcal{G} = \bigcup_i \mathcal{G}_i$ avec $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_{i+1}, \forall i$ et \mathcal{G}_i compact. De plus, la convergence des éléments dans chaque \mathcal{G}_i implique la convergence des réponses impulsionnelles. Alors, il existe un algorithme d'identification quasi-optimal ϕ^o tel que :

$$e_\infty(\phi^o, \mathcal{G}, u, \sigma_v) \leq D(\mathcal{G}, u, \sigma_v)$$

Pour N données temporelles, cet algorithme choisit un modèle \bar{G} dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$ où i est le plus petit i tel que $S_N \cap \mathcal{G}_i$ ne soit pas nul. Autrement dit, l'algorithme quasi-optimal identifie le modèle nonfalsifié le plus *simple*.

••

Quelques exemples pour les ensembles des modèles \mathcal{G}_i du théorème 2.1 sont :

$$\mathcal{G}_i \triangleq \{\bar{G} \in \ell_1 \mid \bar{G}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} g_l z^{-l}, |g_l| \leq i\beta, g_l = 0, \forall l \geq i, \beta > 0\} \quad [2.8]$$

$$\mathcal{BH}_\infty(\rho, M) \triangleq \{\bar{G} \in \mathcal{RH}_\infty \mid \bar{G}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} g_l z^{-l}, |g_l| \leq M\rho^l, 0 < \rho < 1\} \quad [2.9]$$

$$\mathcal{G}_i \triangleq \{\bar{G} \in \mathcal{B} \mid \bar{G} = \frac{B}{A} + \Delta_i, B \in \mathcal{P}_m, A \in \mathcal{F}_n(\rho), \Delta_i \in \mathcal{P}_i, \|\Delta_i\| \leq \gamma\} \quad [2.10]$$

On constate que les ensembles des modèles [2.8] and [2.9] sont convexes, mais que l'ensemble des modèles [2.10] n'est pas convexe.

Un autre algorithme quasi-optimal est :

$$\phi^o(u_{[N]}, y_{[N]}) = \arg \min_{\bar{G} \in \mathcal{G}} \|\Pi_N[\bar{G}u - y]\| \quad [2.11]$$

L'erreur dans le pire des cas de cet algorithme est également bornée par le diamètre d'information. On constate que dans cet algorithme, la connaissance *a priori* de σ_v n'est pas nécessaire. La convexité de cet algorithme dépend de la structure du modèle et des propriétés de l'ensemble des modèle \mathcal{G} .

Dans le cas où la norme utilisée pour les signaux est la norme l_2 , cet algorithme correspond à la minimisation de la variance de l'erreur de sortie ([LJU 87], [LAN 97b]).

2.4. Signaux optimaux d'entrée

La problème qui reste dans le théorème 2.1 est de trouver un signal d'entrée optimal u^o minimisant le diamètre de l'information . Ceci implique la minimisation de l'erreur dans le pire des cas. Pour une grande classe des ensembles des modèles, le signal d'entrée optimal (de durée infinie) contient toutes les séquences possibles de 1 et -1 de durée finie. La séquence SBPA⁷ et la séquence de Galois⁸ [MAK 91] ont cette propriété.

Théorème 2.2 [TSE 93] Si l'ensemble des modèles \mathcal{G} est équilibré et convexe et contient seulement des systèmes stables ($\bar{G} \in \ell_1$), et si le signal d'entrée optimal $u^o(t)$ contient toutes les séquences possibles de 1 et -1 et le signal de perturbation $v(t)$ est borné en amplitude $\|v\|_\infty \leq \sigma_v$, alors :

$$D(u^o, \ell_1, \sigma_v) \leq 2\sigma_v$$

••

Remarque 2.1 Selon ce théorème, pour identifier précisément un système en limite $N \rightarrow \infty$, il suffit de savoir que le vrai système appartient à ℓ_1 . Aucune hypothèse est nécessaire sur le taux d'amortissement du système, comme indiqué dans [GU 92], [HEL 91].

⁷Séquence Binaire Pseudo Aléatoire

⁸Contenant toutes les séquences possible de -1 et 1

••

Remarque 2.2 Ce théorème s'applique pour la topologie ℓ_1 des systèmes. De plus, la perturbation $v(t)$ appartient à l_∞ . Évidemment ce théorème est correct pour toutes les classes des signaux qui sont inclus dans l_∞ , comme l_2 ou l_p . Selon le théorème 2.2, si on choisit un signal d'entrée optimal et un algorithme quasi-optimal (défini dans le théorème 2.1 ou [2.11]), pour \mathcal{G} un sous-espace de ℓ_1 et pour $v(t)$ dans l_∞ , l'erreur asymptotique dans le pire des cas sera bornée par $2\sigma_v$:

$$e_\infty(\phi^o, \mathcal{G}, u^o, \sigma_v) \leq 2\sigma_v \quad [2.12]$$

On peut aussi démontrer la convergence uniforme de l'algorithme [2.11].

••

2.5. Convergence robuste et convergence exacte

L'erreur dans le pire des cas d'un algorithme quasi-optimal ou d'un algorithme interpolateur, est bornée par le diamètre d'information $D(\mathcal{G}, u, \sigma_v)$. Si le signal d'entrée est suffisamment informatif⁹, le diamètre d'information tend vers zéro quand $\sigma_v \rightarrow 0$ [GIA 97a]. Ceci démontre que cet algorithme est *robustement convergent*, i.e. l'erreur dans le pire des cas tend vers zéro quand $\sigma_v \rightarrow 0$. Pour $v(t) \in l_\infty$, cette propriété intéressante n'existe pas pour l'algorithme des moindres carrés. En effet, pour certains signaux d'entrée, l'erreur dans le pire des cas de cet algorithme tend vers infini quand $N \rightarrow \infty$ [MIL 95]. Une condition suffisante pour la convergence robuste de l'algorithme des moindres carrés est que le système soit stable et que le signal d'entrée soit persistant et que le signal de perturbation soit quasi-stationnaire.

Néanmoins, pour assurer *la convergence exacte*, i.e. la convergence vers zéro de l'erreur dans le pire des cas *en présence de perturbation* ($\sigma_v \neq 0$), des hypothèses supplémentaires sur le signal de perturbation et sur le signal d'entrée doivent d'être considérées.

⁹Cette condition beaucoup moins restrictive que d'optimalité de signal d'entrée dans le sens du Théorème 2.2

Par exemple, dans l'approche probabiliste de [LJU 87] pour assurer la convergence exacte, on suppose que le système est stable et est un élément de l'ensemble des modèle. De plus, il est supposé que le signal de perturbation est quasi-stationnaire et indépendant du signal d'entrée persistant.

Dans [VER 91], pour assurer la convergence, le signal de perturbation est supposé borné en amplitude, mais une borne exacte est supposé connue¹⁰. De plus, le signal d'entrée est considéré suffisamment informatif¹¹ et indépendant du signal de perturbation.

Dans [VEN 97] des conditions moins exigeantes sont proposées pour la convergence exacte. Il est supposé que l'autocorrélation de signal de perturbation satisfait certaines conditions (ou que le périodogramme de ce signal soit plus petit qu'un certain seuil) et que le signal d'entrée soit persistant et périodique. Donc, pour la convergence exacte il n'y a pas de contrainte sur l'indépendance du signal de perturbation et du signal d'entrée.

Dans cette thèse nous somme intéressés seulement à la convergence de l'erreur dans le pire des cas vers $2\sigma_v$.

2.6. Quelques exemples d'ensembles des modèles non falsifiés, S_N

La caractérisation de l'ensemble des modèles non falsifiés dans les différentes topologies a été étudiée par plusieurs auteurs. Excepté le cas l_2 , la caractérisation analytique de S_N est très complexe. De plus, cet ensemble n'est pas nécessairement convexe. Dans cette section nous considérons les modèles affines en les paramètres comme :

$$\bar{G}(z) = \sum_{k=0}^n l_k f_k(z) \quad [2.13]$$

où $f_k(z)$ sont des fonctions de base connues [HEU 95b], [WHA 96], [HEU 95a], [WHA 94], [GEV 92] et l_k sont les paramètres du modèle. Le vecteur des paramètres θ est défini comme suit :

$$\theta = [l_0, \dots, l_n]'$$

¹⁰et de plus la perturbation doit toucher sa borne avec une probabilité non-nulle

¹¹Omnidirectional

Exemple 2.1 *Le cas l_∞ :*

Prenant le modèle affine en les paramètres comme [2.13], l'ensemble des modèles nonfalsifiés devient :

$$S_N^\theta = \{\theta \in \mathcal{R}^N \mid \|y_{[N]} - T_u F^{[n]} \theta\|_\infty \leq \sigma_v\}$$

où T_u est une matrice LT construite à partir de $u_{[N]}$. La k -ième colonne de $F^{[n]} \in \mathcal{R}^{(N+1) \times (n+1)}$ est constituée des N premières réponses impulsionnelle de $f_k(z)$. Dans ce cas, S_N est un polyèdre dans \mathcal{R}^N . Si S_N est borné alors il est appelé un polytope [BOY 99]. On peut également considérer l'effet d'une condition initiale non nulle sur S_N [HAK 94].

Le problème intéressant qui peut se poser est de trouver la valeur minimale de σ_v qui rende non-nul S_N . Ce problème peut être formulé par une programmation linéaire qui traite σ_v comme une variable d'optimisation et la minimise. Alors que la programmation linéaire est résolue plutôt par les méthodes non-récurrentes, l'algorithme récursif présenté dans [WAL 96] peut être appliqué pour l'estimation en temps-réel des paramètres.

Exemple 2.2 *Le cas l_2 :*

Supposons que le modèle \bar{G} est affine en les paramètres comme dans [2.13]. Dans ce cas, l'ensemble des modèles non falsifiés S_N est représenté par un ellipsoïde dans \mathcal{R}^N :

$$S_N^\theta = \{\theta \in \mathcal{R}^n \mid (\theta - \theta_{ls}) F^{[n]'} T_u' T_u F^{[n]} (\theta - \theta_{ls})' \leq \sigma_v^2\}$$

où le vecteur θ_{ls} est calculé par un algorithme de moindres carrés comme :

$$\theta_{ls} = (F^{[n]'} T_u' T_u F^{[n]})^{-1} F^{[n]'} T_u' y_{[N]}$$

Exemple 2.3 *La norme s :*

La norme s d'un signal $v(t)$ borné et quasi-stationnaire (voire [LJU 87]) est définie comme :

$$\|v\|_s \triangleq \sup_{\omega} \Phi_v(\omega) \quad [2.14]$$

est le spectre de $v(t)$. Dans ce cas l'ensemble S_N est caractérisé par :

$$S_N^\theta = \{\theta \in \mathcal{R}^n \mid \|y_{[N]} - T_u F^{[n]} \theta\|_s \leq \sigma_v\}$$

Dans la section 3.2 nous démontrons que S_N^θ est un ensemble convexe en les paramètres θ .

Le choix du meilleur paramètre dans S_N^θ dépend de la définition de l'erreur dans le pire des cas [GAR 98].

2.7. Méthode non-simultanée d'identification d'un modèle linéaire et de quantification des incertitudes LTI

L'algorithme d'identification [2.11] est un algorithme quasi-optimal et la convergence du modèle \bar{G} vers le vrai système G est uniforme si \mathcal{G} contient le vrai système G . Donc, pour identifier un modèle \bar{G} et pour assurer la convergence asymptotique et uniforme, il faut parfois considérer une structure de modèle très complexe. Comme un modèle complexe n'est pas souhaitable pour la commande, on est obligé de choisir une structure *simple* du modèle. Alors, l'ensemble des modèles \mathcal{G} doit être défini avec une condition supplémentaire sur *l'ordre* du modèle. Dans ce cas l'ensemble des modèles \mathcal{G} ne contiendra pas le vrai système et la convergence du modèle vers G ne sera pas établie. Néanmoins, dans *une autre étape*, en utilisant les signaux de résidus obtenus dans l'étape d'identification de \hat{G} , la possibilité de l'identification de l'erreur de modélisation existe. Plus précisément, dans l'étape d'identification de \hat{G} on suppose une *structure du modèle*¹² comme :

$$y(t) = \hat{G}(\theta)u(t) + \varepsilon(t, \theta) \quad [2.15]$$

où le modèle \hat{G} appartient à l'ensemble des modèles $\mathcal{RG}^{m,n}$. En comparant [2.15] avec [2.1], on constate que le *signal du résidu*,¹³ $\varepsilon(t)$ représente l'effet de l'opérateur Δ_{nl} , le bruit $e(t)$ et la *dynamique linéaire et non-modélisée*¹⁴, $G - \hat{G}$ créée

¹²Model structure

¹³Residual signal

¹⁴Unmodeled dynamics

à cause de la sous estimation de l'ordre de G :

$$\varepsilon(t, \theta) = (G - \hat{G}(\theta))u(t) + v(t) \quad [2.16]$$

avec $\|v\| \leq \sigma_v$. La procédure suivante est alors proposée pour l'identification d'un modèle nominal $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$ et d'un modèle Δ_G de sa dynamique linéaire non-modélisée $G - \hat{G}$:

Stratégie 2.1 Méthode en deux étapes

1. Dans la première étape l'objectif est de trouver un modèle nominal $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$ qui soit la meilleure approximation du vrai système G qui n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{RG}^{m,n}$. Autrement dit, on identifie un modèle $\hat{G}(\theta) \in \mathcal{RG}^{m,n}$ pour minimiser $\|(G - \hat{G}(\theta))W(u)\|$. Cet objectif est atteint via la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\theta^o = \arg \min_{\theta} \|\varepsilon(t, \theta)\|_x = \arg \min_{\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}} \|\Pi_N[y - \hat{G}(\theta)u]\|_x \quad [2.17]$$

où la norme x est une norme des signaux. Le choix de cette norme dépend de la topologie des systèmes dans laquelle on veut minimiser $\|(G - \hat{G}(\theta))W(u)\|$:

- Dans la topologie \mathcal{H}_∞ , utiliser la norme s définie comme dans [2.14].
- Dans la topologie ℓ_1 utiliser la norme l_∞ des signaux.
- Dans la topologie \mathcal{H}_2 utiliser la norme l_2 des signaux.

La fonction de pondération, $W(u)$ démontre la dépendance de cette optimisation du signal d'entrée. Par exemple dans l'identification en boucle ouverte $W(u)$ est le facteur spectral du spectre de signal d'entrée. (Voir le chapitre 3).

2. Après avoir identifié $\hat{G}(\theta^o)$, calculer $\varepsilon(t, \theta^o) = y_{[N]} - \hat{G}(\theta^o)u_{[N]}$ et utiliser la structure du modèle suivante pour identifier $\Delta_G(\vartheta) \in \tilde{\mathcal{G}}$

$$\varepsilon(t, \theta^o) = \Delta_G(\vartheta)u(t) + \varepsilon_1(t, \vartheta)$$

De cette structure et de [2.16] on constate que le terme $\varepsilon_1(t, \vartheta)$ représente l'effet du signal de perturbation $v(t)$. C'est dans cette étape que pour identifier $\Delta_G(\vartheta)$ on choisit un ensemble des modèles $\tilde{\mathcal{G}}$ contenant la dynamique

linéaire négligée, $G - \hat{G}(\theta^o)$. Si toutes les conditions des théorèmes 2.1 et 2.2 sont satisfaites et le signal d'entrée est optimal et si de plus on utilise un algorithme quasi-optimal :

$$\vartheta^o = \arg \min_{\vartheta} \|\varepsilon_1(t, \vartheta)\|_x = \arg \min_{\vartheta, \Delta_G \in \hat{\mathcal{G}}} \|\varepsilon_{[N]}(\theta^o) - \Delta_G(\vartheta)u_{[N]}\|_\infty \quad [2.18]$$

alors le modèle Δ_G converge uniformément vers une boule de rayon $2\sigma_v$ autour de la vraie dynamique négligée, $G - \hat{G}(\theta^o)$.

••

On constate que c'est dans la *deuxième étape* de cette méthode que la convergence asymptotique et uniforme est assurée. Cette méthode sera appliquée dans les topologies \mathcal{H}_∞ , ℓ_1 et la topologie de graphe dans les sections 3.2, 4.2, 5.3 et 7.3, respectivement.

Remarque 2.3 Les problèmes d'optimisation présentés dans les étapes 1 et 2, ne sont pas nécessairement convexes en les paramètres θ et ϑ . La convexité de ces problèmes dépend du choix de la structure du modèle. Pour les modèles avec une structure fraction rationnelle qui appartient à $\mathcal{RG}^{m,n}$, notre démarche dans les chapitres suivants est de résoudre ces problèmes par un algorithme itératif où dans chaque itération on résout un problème d'optimisation convexe.

••

Remarque 2.4 Quelques approches dans la littérature comme [GIA 97b] caractérisent l'ensemble des *erreurs du modèle non-falsifié* modèle non-falsifié ¹⁵ :

$$\tilde{S}_N = \{\Delta_G \mid \|\varepsilon_{[N]} - \Delta_G u_{[N]}\| \leq \sigma_v\}$$

Pour la norme l_2 des signaux et pour une structure affine en les paramètres comme [2.13] pour $\Delta_G(\vartheta)$, cet ensemble devient une ellipse et l'élément ayant une distance maximale de l'origine (0) détermine une borne pour $G - \hat{G}$.

••

¹⁵Feasible Error Set

2.8. Méthode simultanée d'identification d'un modèle et de quantification des incertitudes LTI

Dans la méthode simultanée, on considère un modèle \bar{G} exprimé par :

$$\bar{G} = \hat{G}(\theta) + \Delta$$

où $\hat{G}(\theta)$ est la partie du modèle d'ordre fixe appartenant à $\mathcal{RG}^{m,n}$, appelé *le modèle nominal* et Δ représente la partie de \bar{G} qui n'est pas modélisée par \hat{G} . En bref, la dynamique négligée du système, $G - \hat{G}(\theta)$, peut être modélisée par Δ .

2.8.1. Ensemble des modèles

Définissons l'ensemble suivant des modèles :

$$\mathcal{G} \triangleq \{\bar{G} \in \ell_1 \mid \inf_{\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}} \|\bar{G} - \hat{G}\| \leq \gamma\} \quad [2.19]$$

Chaque élément dans \mathcal{G} est à une distance minimale, pas plus grande que γ de $\mathcal{RG}^{m,n}$. On peut également exprimer \mathcal{G} par :

$$\mathcal{G} = \{\bar{G} \in \ell_1 \mid \bar{G} = \hat{G} + \Delta, \Delta \in \ell_1, \|\Delta\| \leq \gamma, \hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}\}$$

On suppose que l'ensemble des modèles \mathcal{G} contient le vrai système G .

L'ensemble des modèles \mathcal{G} peut aussi se décomposer comme $\mathcal{G} = \bigcup_i \mathcal{G}_i$ avec $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_{i+1}$ et :

$$\mathcal{G}_i \triangleq \{\bar{G} \in \ell_1 \mid \bar{G} = \hat{G}(\theta) + \Delta_i(\vartheta^i), \hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}, \Delta_i(\vartheta^i) \in \mathcal{P}_i, \|\Delta_i\| \leq \gamma, \} \quad [2.20]$$

Notre méthode pour la construction d'un algorithme quasi-optimal est basée sur le principe du Rasoir d'Occam [TSE 93] qui trouve le plus petit i (disons \hat{i}) tel que $S_N \cap \mathcal{G}_i$ ne soit pas nul. Comme on a expliqué dans le théorème 2.1, l'erreur dans le pire des cas de cet algorithme est bornée par le diamètre d'information .

2.8.2. Description de la stratégie d'identification

On choisit une structure du modèle qui est conforme à \mathcal{G} comme :

$$y(t) = [\hat{G}(\theta) + \Delta_i(\vartheta^i)]u(t) + \varepsilon(t) \quad [2.21]$$

Manifestement $\varepsilon(t)$ représente le signal de perturbation $v(t)$ dans [2.1]. Étant donnée une borne du signal de perturbation $v(t)$, $\|v\|_\infty \leq \sigma_v$, on choisit σ_v comme une borne pour l'amplitude du signal de résidu $\varepsilon(t)$.

Selon le théorème 2.1, un algorithme quasi-optimal ϕ^o existe tel que son estimation \bar{G} converge (uniformément) vers une boule de rayon $D(u, \mathcal{G}, \sigma_v)$ autour de G . Alors, l'erreur de modélisation devient :

$$\|G - \hat{G}\| \leq \|G - \bar{G}\| + \|\Delta_i\| \quad [2.22]$$

$$\leq e_\infty(\phi^o, \mathcal{G}, u, \sigma_v) + \|\Delta_i(\vartheta^i)\| \quad [2.23]$$

$$\leq D(u, \mathcal{G}, \sigma_v) + \gamma \triangleq O(\theta, \vartheta^i, \sigma_v) \quad [2.24]$$

Notre stratégie d'identification est alors :

Stratégie 2.2 .

Trouver un modèle nominal, \bar{G} dans $\mathcal{G}_i \cap S_N \neq \emptyset$

••

Dans les sections 3.3, 4.3 et 5.2 cette stratégie sera appliquée aux topologies \mathcal{H}_∞ , ℓ_1 et de graphe, respectivement.

Remarque 2.5 Comme l'ensemble \mathcal{G} est un sous-ensemble de ℓ_1 alors

$$D(\mathcal{G}, u, \sigma_v) \leq D(\ell_1, u, \sigma_v)$$

Mais selon le théorème 2.2, si le signal d'entrée contient toutes les séquences de 1 et -1 , alors $D(\ell_1, u, \sigma_v) \leq 2\sigma_v$, ce qui implique que la borne [2.24] devient

$$\|G - \hat{G}(\theta)\| \leq 2\sigma_v + \gamma \quad [2.25]$$

••

Évidemment cette borne est facilement calculable.

Remarque 2.6 En général, quand le modèle \hat{G} possède une structure fraction rationnelle ($\hat{G} \in \mathcal{R}\mathcal{G}^{m,n}$), \mathcal{G}_i et S_N sont des ensembles non-convexes. Alors, pour trouver un modèle \bar{G} dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$, on a besoin de résoudre un problème d'optimisation nonconvexe. Dans les chapitres suivants nous proposerons des algorithmes itératifs pour traiter ce problème.

••

Le terme $O(\theta^o, \vartheta^i, \sigma_v)$ est une borne pour le pire des cas constante par rapport à la fréquence pour $\|G - \hat{G}(\theta^o)\|$. Obtenir une borne dépendante de la fréquence est immédiat, [NAM 01a] :

$$|G(\omega) - \hat{G}(\omega, \theta^o)| \leq 2\sigma_v + \Delta(\omega, \vartheta^i) \triangleq \hat{O}(\omega, \sigma_v) \quad [2.26]$$

2.9. Conclusion

L'identification des modèles avec des incertitudes LTI a été brièvement présentée. La nécessité d'avoir un modèle nominal avec un ordre fixe et faible nous amène dans une situation où le vrai système G ne se trouve pas dans l'ensemble des modèles $\mathcal{RG}^{m,n}$. La quantification de l'incertitude LTI ou de la dynamique négligée linéaire est réalisée soit dans la même étape que l'identification de \hat{G} soit dans une autre étape. Les bornes dans le pire des cas pour l'erreur de modélisation sont aussi obtenues. L'effet de la nonlinéarité ou de la variation du système est considéré seulement dans le signal de perturbation $v(t)$.

Chapitre 3

Identification en H_∞

Résumé : L'identification des modèles linéaires et la quantification des incertitudes LTI est étudiée dans la topologie \mathcal{H}_∞ . Suivant les stratégies proposées dans le chapitre 2, nous proposons des algorithmes d'optimisation de type LMI ou LP permettant de résoudre ces problèmes.

3.1. Introduction

L'identification des systèmes dans la topologie \mathcal{H}_∞ a été étudiée par plusieurs auteurs dans les dernières années. L'objectif de ce type d'identification est de trouver un modèle nominal dans $\mathcal{RG}^{m,n}$ ayant la distance minimale, en norme \mathcal{H}_∞ , de G . Il existe deux approches générales dans la littérature pour l'identification \mathcal{H}_∞ des systèmes : l'approche fréquentielle et l'approche temporelle. Nous indiquons quelques approches existantes dans la littérature qui sont plus reliées à notre travail :

3.1.1. *Approche fréquentielle*

Dans cette approche il s'agit de l'identification des systèmes avec des données fréquentielles, soit des échantillons de la réponse fréquentielle du système soit des échantillons de la transformée de Fourier des signaux expérimentaux (entrée-sortie).

Cette approche est présentée d'abord dans [HEL 91] comme une introduction à l'identification pour la commande. Dans cette approche un modèle d'ordre $2n - 1$ est identifié en utilisant N échantillons de la réponse fréquentielle du vrai

système perturbé par un bruit inconnu mais avec une borne connue. L'erreur dans le pire-des-cas entre le modèle et le vrai système dépend directement du niveau de bruit et aussi de $\frac{N^2}{n}$. Pour établir la décroissance vers zéro de l'erreur dans le pire-des-cas quand N tend vers l'infini (et quand le niveau de bruit tend vers zéro), l'ordre du modèle doit être approximativement N^3 , ce qui est très élevé. De plus, la fonction de transfert du modèle identifié n'est pas nécessairement propre. Par contre, l'algorithme fournit une borne de l'erreur de modélisation dans le pire-des-cas.

Une autre approche fréquentielle est également étudiée dans [GU 92]. Ici N échantillons de la réponse impulsionnelle du système sont utilisés et par un algorithme linéaire, un modèle avec une structure FIR d'ordre n est identifié. Bien que dans cet algorithme $n < N$, la convergence robuste n'est pas atteinte. Alternativement, les auteurs proposent un algorithme nonlinéaire qui assure une convergence robuste. Néanmoins, le modèle identifié possède une structure particulière ($\hat{G} = \hat{G}_1(z) + \sum_{k=-n}^n d_k z^k$) qui n'est pas souhaitable pour la commande. Finalement, pour trouver un modèle dans \mathcal{RH}_∞ , l'application du théorème de Néhari est proposée.

Dans [MIL 98] en considérant les modèles affines en les paramètres (comme [2.13]) et avec des ordres fixes, un algorithme linéaire est proposé qui dans une première étape, identifie un modèle de telle manière que la variance de l'erreur entre le vecteur de paramètres du vrai système et celui du modèle soit minimisée. Cet algorithme utilise aussi la connaissances *a priori* sur la borne de la dynamique négligée. Dans la deuxième étape de cet algorithme, en utilisant le modèle identifié dans la première étape et en utilisant certaines connaissances *a priori* sur la suite de la dynamique négligée, une borne probabiliste¹ de l'erreur de modélisation est calculée.

Dans [ZHO 97a], en utilisant des échantillons de la réponse fréquentielle du système qui ne sont pas nécessairement uniformément distribués sur le cercle unité, une structure générale du type LFT² est identifiée. Le vrai système est supposé dans $\mathcal{BH}_\infty(\rho, M)$. De plus, la perturbation sur la réponse impulsionnelle

¹Soft Bound

²Linear Fractional Transformation

du système est supposée faible. En appliquant le théorème de Nevanlina-Pick, un modèle avec une structure LFT est identifié, qui possède une dimension de $8N + 1$ et le degré de chacun des éléments dans cette structure est $2N$. De plus, les éléments de la structure LFT ne sont pas nécessairement réels (pour z réel, $\hat{G}(z)$ n'est pas réel). Alors, ces inconvénients rendent la structure LFT identifiée difficilement utilisable pour la commande robuste.

Un algorithme interpolateur ³ présenté dans [CHE 95] identifie un modèle SISO en utilisant des échantillons de la réponse impulsionnelle du système et la connaissance *a priori* de la borne de la perturbation. D'abord en appliquant le théorème de Nevanlina-Pick et en résolvant un problème d'admissibilité convexe, les données sont vérifiées d'être compatibles avec la connaissance *a priori* sur le système réel (supposé dans $\mathcal{BH}_\infty(\rho, M)$) et sur la borne du bruit. Ensuite, une classe de modèles d'ordre N est identifiée. On présente aussi une borne pour l'erreur dans le pire-des-cas de l'identification. Une approche similaire est aussi étudiée dans [NAM 99] pour la structure générale LFT.

L'identification paramétrique des structures générales LFT est aussi étudiée dans [SMI 90] et [SMI 92a]. Ici les paramètres d'une structure LFT sont identifiés de telle manière que cette structure soit non-falsifiée par rapport aux données expérimentales (fréquentielles). Les résultats sont présentés soit dans la topologie \mathcal{H}_∞ , soit ℓ_1 . L'identification des paramètres de la structure LFT est transformée en le problème de la validation du modèle déjà formulé et résolu dans [SMI 92b] et [NEW 98] à partir de la résolution d'un problème de μ [ZHO 96]. Dans cette approche les paramètres optimaux ne sont pas nécessairement uniques et la dimension du problème d'optimisation est grande. De plus, l'identification n'est pas au sens du pire-des-cas. Néanmoins, l'avantage de cette méthode est qu'on ne suppose aucune hypothèse sur le vrai système.

3.1.2. Approche temporelle

Dans cette approche il s'agit de l'identification des systèmes en utilisant des données temporelles. Nous étudions brièvement quelques méthodes plus récentes

³interpolatory

dans ce domaine.

Un cas similaire à celui traité dans [ZHO 97a] mais dans le domaine temporel est étudié dans [ZHO 95] où l'on suppose que le vrai système appartient à $\mathcal{BH}_\infty(\rho, M)$ et qu'une borne *a priori* connue pour le bruit de mesure est disponible. En utilisant le théorème d'extrapolation de Carathéodori-Féjér et en supposant que le niveau du bruit est faible, une structure LFT et non-falsifiées est identifiée. La dimension de cette structure est $4(N + 1)^4 + 1$, ce qui est trop élevé. Ces articles démontrent aussi que pour trouver une structure avec une dimension plus faible, il est encore nécessaire de résoudre un problème de μ -synthèse de dimension $4(N + 1)^4 + 1$. Le même problème est étudié en boucle fermée dans [ZHO 97b].

Dans [GIA 97b] et dans le contexte de "set-membership" (voir [MIL 91] pour le survey) en utilisant la connaissance *a priori* sur la borne du bruit et celle de la dynamique négligée, ε_E , un modèle affine en les paramètres comme [2.13] est identifié par un algorithme de moindres-carrés. Ensuite, le rayon de l'information locale dépendant de ε_E est calculé pour cet algorithme. Dans la deuxième étape, en utilisant le signal de résidu obtenu dans la première étape et la connaissance *a priori* sur la borne de la suite de dynamique négligée, une nouvelle borne de la dynamique négligée est identifiée. Cette borne est ensuite comparée avec celle qui était supposée dans la première étape.

La caractérisation de l'ensemble des modèles non-falsifiés est réalisée dans [KOS 92] où l'on démontre que pour la structure ARX les paramètres de ces modèles se trouvent dans l'intersection d'un nombre infini d'ellipses ou d'hyperboles.

3.1.3. *La démarche suivie dans ce chapitre*

Nous constatons que les approches non-paramétriques pour l'identification comme ([HEL 91], [GU 92], [ZHO 97a], [CHE 95], [ZHO 95]) identifient des modèles très complexes et les méthodes paramétriques ([MIL 98], [GIA 97b]) identifient des modèles avec ordre fixe mais affines en les paramètres qui peuvent être relativement complexes. Dans le chapitre 2 deux stratégies générales pour

le problème de l'identification des systèmes et la caractérisation des incertitudes de types LTI ont été présentées. Dans ce chapitre nous adoptons une approche temporelle et appliquons ces stratégies pour la topologie \mathcal{H}_∞ des systèmes. Les modèles non affine en les paramètres sont plus particulièrement considérés pour l'identification. Nous proposons aussi les algorithmes itératifs pour traiter la non-convexité de certains problèmes d'identification.

3.2. Méthode non-simultanée

Nous adoptons la stratégie 2.1 pour l'identification d'un modèle nominal $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$ et le calcul d'une borne dans le pire-des-cas pour l'erreur de modélisation $G - \hat{G}$ dans la topologie \mathcal{H}_∞ . Rappelons que les données expérimentales sont produits comme [2.1]. Selon la remarque 2.3, pour résoudre le problème [2.17], nous considérons une structure du modèle affine en les paramètres comme :

$$y(t) = \hat{G}(\theta)u(t) + \frac{F}{A(\theta_a)}\varepsilon(t, \theta) \quad [3.1]$$

où $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$, le filtre $F \in \mathcal{P}_n(\rho)$ est indépendant de θ ($\theta = [\theta_a', \theta_b']'$) et $\varepsilon(t, \theta)$ est le signal de résidu. Nous résolvons d'abord un problème d'optimisation *convexe* comme :

$$\min_{\theta} \sup_{\omega} \Phi_{\varepsilon}(\omega, \theta) \equiv \min_{\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}} \|A(\theta_a)\hat{G}(\theta)u_{F_{[N]}} - A(\theta_a)y_{F_{[N]}}\|_s \quad [3.2]$$

où la norme s est définie comme [2.14]. $u_F(t)$ et $y_F(t)$ sont aussi produits comme :

$$u_F(t) = F^{-1}u(t), \quad y_F(t) = F^{-1}y(t)$$

Ensuite par un algorithme itératif, nous trouvons une solution pour le problème original [2.17].

On présente d'abord un résultat concernant la minimisation de $\sup_{\omega} \Phi_{\varepsilon}(\omega, \theta)$:

Théorème 3.3 [MAS 93] Considérons une séquence bornée comme $\varepsilon_{[N]} \in \mathcal{R}^{N+1}$ avec $T_{NM}(\varepsilon) \in \mathcal{R}^{(M+N+1)(M+1)}$ définie comme :

$$T_{NM}(i, j) = \begin{cases} \varepsilon(i - j) & 0 \leq i - j \leq N \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

pour $1 \leq j \leq M + 1$. Alors

$$\|\varepsilon(t, \theta)\|_s = \lim_{N > M \rightarrow \infty} \frac{1}{N + 1} \bar{\sigma}^2(T_{NM}(\varepsilon)) = \sup_{\omega} \Phi_{\varepsilon}(\omega) \quad [3.3]$$

où $\bar{\sigma}(T_{NM}(\varepsilon))$ est la plus grande valeur singulière de la matrice $T_{NM}(\varepsilon)$.

••

Dans ce théorème N tend vers l'infini toujours plus vite que M . On constate que la minimisation de $\bar{\sigma}^2(T_{NM}(\varepsilon))$ par rapport à ε implique la minimisation de $\sup \Phi_{\varepsilon}(\omega)$, pour des grandes valeurs de N et de M .

Dans le résultat suivant le problème d'identification [3.2] est formulé comme la résolution d'un problème semi-défini convexe (SDP⁴).

Théorème 3.4 ([NAM 00b], Theoreme 4.2) Étant donné les séquences temporelles $u_{F[N]}$ et $y_{F[N]}$ et une structure comme [3.1], alors le problème d'optimisation suivant minimise la norme s du signal de résidu, $\|\varepsilon(t, \theta)\|_s$:

$$\min_{\theta_a, \theta_b} \bar{\sigma}^2 \quad [3.4]$$

$$\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n} \quad [3.5]$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}^2 I & * \\ E_y(I_{M+1} \otimes \theta_a) - E_u(I_{M+1} \otimes \theta_b) & I \end{bmatrix} > 0 \quad [3.6]$$

où E_u et E_y sont des matrices de transformation définies comme :

$$E_u = [E_0 T_{u_F}^{[m]} \quad E_1 T_{u_F}^{[m]} \quad \dots \quad E_M T_{u_F}^{[m]}]$$

$$E_y = [E_0 T_{y_F}^{[n]} \quad E_1 T_{y_F}^{[n]} \quad \dots \quad E_M T_{y_F}^{[n]}]$$

avec

$$E_k = \begin{bmatrix} 0_{k(N+1)} \\ I_{N+1} \\ 0_{(M-k)(N+1)} \end{bmatrix}$$

T_{u_F} est une matrice LT construite à partir de $u_{F[N]}$. Ici \otimes est la multiplication de Kronecker.

••

⁴Semi-Definite Problem

Ce problème d'optimisation peut être résolu par le Toolbox de LMI en MATLAB. Voir l'annexe III pour un exemple.

Remarque 3.7 Pour obtenir $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$, il faut placer les pôles du polynôme A dans \mathcal{D}_ρ . Cet objectif est atteint à travers une contrainte sur θ_a . Voir le théorème 4.14 pour une discussion supplémentaire.

••

3.2.1. Analyse de biais

En comparant le système réel [2.1] avec la structure [3.1] avec $F = 1$ (la structure ARX), on calcule (voir [NAM 00b]) le spectre de $\varepsilon(t, \theta)$ comme :

$$\Phi_\varepsilon(\omega, \theta) = |A(\theta_a)|^2 \cdot |G - \hat{G}(\theta) + \frac{\Phi_{vu}}{\Phi_u}|^2 \Phi_u + |A(\theta_a)|^2 \cdot [\Phi_v - \frac{|\Phi_{vu}|^2}{\Phi_u}] \quad [3.7]$$

Dans [3.7], le biais $\frac{\Phi_{vu}}{\Phi_u}$ est dû à l'existence d'une corrélation entre le signal d'entrée $u(t)$ et la perturbation $v(t)$. Cette corrélation peut être due à :

- l'opération en boucle fermée du système réel.
- l'existence d'une non-linéarité ou d'une variation du système représentée par Δ_{nl} en [2.1] et incluse dans $v(t)$.

Dans le chapitre 1.2.1.1, le signal de perturbation $v(t)$ est seulement supposé borné en une certaine norme, $\|v\| \leq \sigma_v$. Si le vrai système, G appartient à l'ensemble des modèles $\mathcal{RG}^{m,n}$, l'application d'un algorithme quasi-optimal comme [2.11] garantit la convergence uniforme du modèle vers une boule de rayon $D(u, \mathcal{RG}^{m,n}, \sigma_v)$ autour de G . Pour avoir la convergence *exacte* nous devons prendre une hypothèse supplémentaire sur le signal de perturbation : il est nécessaire que ce signal soit (quasi)stationnaire [LJU 87] et de plus $\Phi_{vu} = 0$. On constate de [3.7] que même si $\Phi_{vu} = 0$, la présence du terme $A(\theta_a)$ a deux conséquences :

- Comme le deuxième membre du côté droit de [3.7] dépend aussi de θ , la minimisation de $\|\varepsilon(t, \theta)\|_s$ par rapport à θ , par le théorème 3.4, n'implique pas la minimisation du premier membre.

- L'erreur additive de modélisation $|G - \hat{G}(\theta)|^2 \Phi_u$ est pondérée par le terme $|A(\theta)|^2$ qui dépend des paramètres que nous ne maîtrisons pas. Il est préférable que cette erreur soit pondérée par un filtre *connu* traduisant le cahier des charges.

3.2.2. Algorithme itératif

Considérons la j -ème étape de cet algorithme où l'on utilise la structure suivante :

$$y(t) = \frac{B^j(\theta_b^j)}{A^j(\theta_a^j)} u(t) + \frac{A^{j-1}(\theta_a^{j-1})}{A^j(\theta_a^j)} \varepsilon(t, \theta^j) \quad [3.8]$$

Ici $\{A^j\}$, $\{B^j\}$ et $\{\theta^j\}$ sont les séquences produites par l'algorithme. On constate aussi que $F = A^{j-1}$. Avec cette structure affine en paramètres on peut appliquer le théorème 3.4 pour minimiser $\|\varepsilon(t, \theta^j)\|_s$. Noter que dans chaque itération on suppose que $\hat{G}(\theta^j) \in \mathcal{RG}^{m,n}$ ce qui implique que $1/A^j$ et $1/A^{j-1}$ sont stables. Cette condition est satisfaite à travers l'application du théorème 4.14 dans la section 4.3.2.1.

Dans l'algorithme suivant on définit l'erreur relative entre les dénominateurs des modèles identifiés dans les itérations consécutives, ϵ_j comme :

$$\epsilon_j \triangleq \|A^j(\theta_a^j) - A^{j-1}(\theta_a^{j-1})\|_1 \cdot \|1/A^{j-1}(\theta_a^{j-1})\|_1, \forall j \geq 1 \quad [3.9]$$

où $\epsilon_0 = \|A^0 - 1\|_1$.

Algorithme 3.1 .

1. Poser $j = 0$ et $F = 1$. Utiliser $u(t)$ et $y(t)$ et la structure [3.1]. Résoudre le problème d'optimisation du théorème 3.4, ensuite calculer $A^j(z)$ et $B^j(z)$. Poser $j = j + 1$
2. Poser $F = A^{j-1}$ et construire $u_F(t)$ et $y_F(t)$ et résoudre le même problème d'optimisation en utilisant la structure [3.1] avec la contrainte supplémentaire pour assurer la convergence de l'algorithme :

$$\epsilon_j \leq \varsigma \cdot \epsilon_{j-1} \text{ pour } j \geq 1 \quad [3.10]$$

avec

$$0 < \varsigma < \min(1, \epsilon_0^{-1}) \quad [3.11]$$

3. Si $\varsigma\epsilon_0 < \kappa$ pour une précision κ donnée alors s'arrêter, sinon $j = j + 1$ et aller à l'étape 2.

••

Une version de cet algorithme est aussi présentée dans [NAM 00b]. Cet algorithme est un algorithme de variable instrumentale adaptatif comme l'algorithme de Steiglitz-McBride [STO 81]. Néanmoins, l'avantage de cet algorithme est que dans chaque étape la stabilité du modèle est garantie, ce qui implique que l'algorithme ne diverge jamais.

Le choix de ς détermine la vitesse de convergence de cet algorithme. Pour ς petit, la convergence vers un point stationnaire est rapide mais il y a le risque de perdre l'optimalité au sens global.

Théorème 3.5 La séquence des modèles générée par l'algorithme 3.1, $\{\hat{G}^j\}$ converge vers un élément, \hat{G}^* dans $\mathcal{RG}^{m,n}$ et minimise $\|(G - \hat{G})\chi_u\|_\infty$ où χ_u est le facteur spectral de $\Phi_u(\omega)$.

••

Démonstration : Voir l'annexe II.

3.2.3. Quantification de l'erreur de modélisation

Supposons que l'algorithme itératif s'arrête à l'itération j_f . De [2.1] et de la structure [3.8] on a pour le résidu filtré :

$$\varepsilon_f(t, \theta^{j_f}) = (G - \hat{G}(\theta^{j_f}))u(t) + v(t) \quad [3.12]$$

avec $\varepsilon_f(t, \theta^{j_f}) = \frac{A^{j_f}}{A^{j_f-1}}\varepsilon(t, \theta^{j_f})$. Nous choisissons maintenant la structure de modèle suivante :

$$\varepsilon_f(t, \theta^{j_f}) = \Delta_G(\vartheta)u(t) + \varepsilon_1(t, \vartheta) \quad [3.13]$$

pour identifier un modèle $\Delta_G(\vartheta)$ de l'erreur de modélisation $G - \hat{G}(\theta^{j_f})$. Si le signal d'entrée et l'ensemble des modèles $\tilde{\mathcal{G}}$ auquel Δ_G appartient, satisfont les conditions des théorèmes 2.2 et 2.1 et si on applique l'algorithme quasi-optimal [2.18], alors Δ_G tend vers une boule de rayon $2\sigma_v$ ($\|v\|_\infty \leq \sigma_v$) autour de l'erreur du modèle $G - \hat{G}(\theta^{j_f})$ et on a :

$$\|G - \hat{G}(\theta^{j_f}) - \Delta_G(\vartheta^o)\|_\infty \leq 2\sigma_v$$

ce qui implique :

$$|G(\omega) - \hat{G}(\omega, \theta^{j_f})| \leq |\Delta_G(\omega, \vartheta^o)| + 2\sigma_v \quad [3.14]$$

Ceci donne clairement une borne dans le pire-des-cas dépendante de la fréquence pour l'erreur de modélisation.

Remarque 3.8 Si $v(t)$ et $u(t)$ sont indépendants de telle manière que $\Phi_{vu}(\omega) = 0$ pour tout ω et si $v(t)$ est (quasi) stationnaire, la convergence de Δ_G vers $G - \hat{G}$ sera exacte. Pour des systèmes en boucle fermée ou avec des non-linéarités et des variations dans le temps, cette condition n'est pas satisfaite.

••

3.3. Méthode simultanée

Dans cette section nous appliquons la stratégie optimale 2.2 pour l'identification des modèles d'ordres fixes et non affines en les paramètres dans la topologie \mathcal{H}_∞ .

Redéfinissons l'ensemble des modèles \mathcal{G} dans la section 2.8 comme :

$$\mathcal{G} = \{\bar{G} \in \ell_1 \mid \bar{G} = \hat{G}(\theta) + \Delta, \Delta \in \ell_1, \|\Delta\|_\infty \leq \gamma, \hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}\}$$

et décomposons le comme $\mathcal{G} = \cup_i \mathcal{G}_i$ avec $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_{i+1}$ où :

$$\mathcal{G}_i \triangleq \{\bar{G} \in \ell_1 \mid \bar{G} = \hat{G}(\theta) + \Delta_i(\vartheta^i), \hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}, \Delta_i(\vartheta^i) \in \mathcal{P}_i, \|\Delta_i(\vartheta^i)\|_\infty \leq \gamma\} \quad [3.15]$$

D'après la remarque 2.6, pour un i fixe et pour $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$ le problème de l'identification d'un modèle \bar{G} dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$ n'est pas convexe. Donc nous choisissons d'abord une structure de modèle affine en les paramètres (au lieu de [2.21]) ce qui permet de construire un algorithme itératif pour résoudre le problème non-convexe.

3.3.1. Structure de modèle affine en les paramètres

Pour i et γ fixes (dans [3.15]), définissons une structure de modèle affine en paramètres comme :

$$y(t) = (\hat{G}(\theta) + \frac{F}{A(\theta_a)} \Delta_i(\vartheta^i))u(t) + \frac{F}{A(\theta_a)} \varepsilon(t) \quad [3.16]$$

avec $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$, $F \in \mathcal{F}_n(\rho)$, $\Delta_i \in \mathcal{P}_i$, $\|\Delta_i\|_\infty \leq \gamma$ et $\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma_v$. Ici $F \in \mathcal{F}_n(\rho)$ est un filtre donné. Notre objectif est de trouver \hat{G} et Δ_i qui satisfasse [3.16].

Supposons $u_{F_{[N]}}$ et $y_{F_{[N]}}$, N échantillons de données expérimentales produits comme :

$$u_F(t) = F^{-1}u(t), \quad y_F(t) = F^{-1}y(t) \quad [3.17]$$

et soient $T_{u_F}, T_{y_F} \in \mathcal{R}^{(N+1)(N+1)}$ des matrices LT construites avec $u_{F_{[N]}}$ et $y_{F_{[N]}}$, respectivement. On définit aussi

$$T_{uy} \triangleq [-T_{u_F}^{[m]}, T_{y_F}^{[n]}, -I_{N+1}]$$

Supposons que $e'_N \in \mathcal{R}^{1 \times (N+1)}$, $E_i \in \mathcal{R}^{i \times (N+1)}$ et $E_{N-i} \in \mathcal{R}^{(N-i) \times (N+1)}$ sont obtenus par la partition de la matrice d'identité I_{N+1} comme :

$$I_{N+1} = \begin{bmatrix} e'_N \\ E_i \\ E_{N-i} \end{bmatrix}$$

Définissons aussi $e_i = [1, 0, \dots, 0]' \in \mathcal{R}^i$ et $A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{i-1} & 0 \end{bmatrix}_{i \times i}$. Si les colonnes de la matrice $V \in \mathcal{R}^{(N+m+n+3)(m+n+3)}$ engendrent l'espace nul de $E_{N-i} T_u^{-1} T_{uy}$, on définit W comme $W \triangleq T_u^{-1} T_{uy} V$.

Théorème 3.6 [NAM 01b] Fixer i , n et m et supposer que $u(0) \neq 0$. Les contraintes suivantes caractérisent un problème d'admissibilité convexe qui identifie un modèle $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$ et $\Delta_i \in \mathcal{P}_i$ avec $\|\Delta_i\|_\infty \leq \gamma$ où $Q_i \geq 0 \in \mathcal{R}^{i \times i}$, $X \geq 0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ et $\zeta \in \mathcal{R}^{m+n+i+3}$ sont considérés comme les variables d'optimisation :

$$\begin{bmatrix} Q_i & A_i'Q_i & E_iW\zeta & 0 \\ Q_iA_i & Q_i & 0 & Q_ie_i \\ \zeta'W'E_i' & 0 & 1 & e_N'W\zeta \\ 0 & e_i'Q_i & \zeta'W'e_N & \gamma^2 \end{bmatrix} > 0 \quad [3.18]$$

$$\|\pi_3 V \zeta\|_\infty \leq \sigma_v \quad [3.19]$$

••

Ici $\pi_3 \in \mathcal{R}^{(N+1)(m+n+N+3)}$ est une matrice de projection définie comme : $\pi_3 = [0, 0, I_{N+1}]$.

On peut aussi vérifier que le nombre de variables d'optimisation dans ces contraintes est

$$N_v = \frac{i(i+1) + n(n+1)}{2} + m + n + i + 3$$

qui est indépendant de N .

3.3.2. Algorithme itératif

Dans cette section nous proposons un algorithme itératif qui pour un i fixe, produit une séquence de modèles $\{\bar{G}^j\}$. Dans chaque itération de cet algorithme un problème d'admissibilité convexe est résolu. Nous démontrons que si tous ces problèmes sont admissibles, alors $\{\bar{G}^j\}$ convergera vers un élément dans l'ensemble *non-convexe* $S_N \cap \mathcal{G}_i$. Nous considérons une séquence d'erreurs relatives $\{\epsilon_j\}$ produite comme dans [3.9].

Algorithme 3.2 .

1. Poser $j = 0$, $F = 1$ et considérer l'ensemble des modèles \mathcal{G}_i . Résoudre le problème d'admissibilité convexe du théorème 3.6 et calculer ϵ_0 .

2. Poser $j = j + 1$ et $F = A^{j-1}(\theta_a)$. Résoudre le problème d'admissibilité convexe du théorème 3.6 en imposant la contrainte supplémentaire [3.10]. Répéter l'étape 2 jusqu'à ce que $\epsilon_0 \varsigma^j \leq \kappa$, pour un κ donné.

••

Théorème 3.7 [NAM 01b] Si chaque problème d'optimisation de l'algorithme 3.2 est admissible, alors, $\{\bar{G}^j\}$ converge vers un élément dans l'ensemble non-convexe $S_N \cap \mathcal{G}_i$.

••

Si un de ces problèmes d'admissibilité convexe n'a pas une solution, il faut augmenter soit ς , soit γ , soit σ_v .

3.3.2.1. Algorithme quasi-optimal

La dernière étape dans la méthode simultanée est de trouver le plus petit i (disons \underline{i}) tel que $S_N \cap \mathcal{G}_{\underline{i}} \neq \emptyset$. Par exemple, si pour une valeur de i on réussit à trouver un élément dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$, on pose $i = i - 1$ et on trouve un autre élément dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$. On diminue i jusqu'à ce que cet ensemble soit nul.

Après avoir identifié un élément dans $S_N \cap \mathcal{G}_{\underline{i}} \neq \emptyset$, on obtient les bornes [2.24] et [2.26] pour l'erreur de modélisation $\|G - \hat{G}(\theta^*)\|_\infty$. Évidemment, pour le cas où les pôles de \hat{G} sont fixes, l'ensemble des modèles \mathcal{G} sera convexe et équilibré et si le signal d'entrée est optimal dans le sens du théorème 2.2, on peut retrouver une borne simple de l'erreur de modélisation comme [2.25].

3.4. Méthode simultanée d'identification d'un modèle sans restriction sur l'ordre

Dans cette section nous considérons une autre décomposition de l'ensemble des modèle \mathcal{G} comme $\mathcal{G} = \bigcup_i \mathcal{G}_i$ avec :

$$\mathcal{G}_i := \{\bar{G} \in \ell_1 \mid \bar{G} = \hat{G}_i(\theta) + \Delta, \Delta \in \ell_1, \|\Delta\|_\infty \leq \gamma, \hat{G}_i = \frac{B_i}{A_i}, B_i \in \mathcal{P}_i, A_i \in \mathcal{F}_i(\rho)\}$$

Évidemment dans cet ensemble Δ est considéré comme un opérateur et l'ordre du modèle nominal \hat{G}_i dépend de i . La stratégie simultanée 2.2 se traduit dans ce cas par trouver un élément dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$.

Pour un i fixe, on constate que l'ensemble $S_N \cap \mathcal{G}_i$ n'est pas convexe. Pour trouver un modèle dans cet ensemble il faut d'abord introduire une structure de modèle affine en les paramètres qui permette de construire un problème convexe. Ce problème est ensuite résolu itérativement pour identifier un modèle dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$.

3.4.1. Structure de modèle affine en paramètres

Pour γ donné et pour i fixe définir une structure du modèle affine en paramètres comme :

$$y(t) = (\hat{G}_i(\theta) + \frac{F}{A_i(\theta_a)} \Delta)u(t) + \frac{F}{A_i(\theta_a)} \varepsilon(t) \quad [3.20]$$

avec $\hat{G}_i \in \mathcal{RG}^{i,i}$, $F \in \mathcal{F}_i(\rho)$, $\Delta \in \ell_1$, $\|\Delta\|_\infty \leq \gamma$ et $\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma_v$.

Ici F est un filtre donné. L'objectif ici est de trouver \hat{G}_i et Δ qui satisfasse [3.20]. Ce problème sera appliqué itérativement pour trouver un modèle dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$. En comparant [3.20] avec [3.16], nous constatons que dans [3.20] l'ordre du modèle \hat{G}_i n'est pas *a priori* fixe et que Δ est un opérateur dans \mathcal{RH}_∞ sans contrainte sur son degré. En effet, ici le principe de Rasoir d'Occam est appliqué sur \hat{G}_i tandis que dans le cas de la structure [3.16], ce principe a été appliqué sur Δ_i .

Nous rappelons d'abord un résultat qui impose une contrainte temporelle sur les signaux d'entrée-sortie de Δ dont la norme \mathcal{H}_∞ est bornée par γ :

Théorème 3.8 [POO 94] Étant données les séquences temporelles $p_{[N]}, q_{[N]}$, il existe un opérateur LTI stable et causal, Δ avec $\|\Delta\|_\infty < \gamma$ tel que $p = \Delta q$ ssi :

$$T_p' T_p < \gamma^2 T_q' T_q \quad [3.21]$$

où T_p et T_q sont les matrices LT construites à partir de $p_{[N]}$ et $q_{[N]}$, respectivement.

••

Supposons maintenant la structure [3.20] et les signaux $u_F(t), y_F(t)$ qui sont construits comme dans [3.17].

Théorème 3.9 [NAM 00b] Étant données les séquences temporelles $u_{[N]}, y_{[N]}$, γ et pour un i fixe, le problème d'admissibilité convexe suivant identifie un modèle $\hat{G}_i(\theta) \in \mathcal{RG}^{i,i}$ et $\Delta \in \ell_1$ satisfaisant [3.20] tel que $\|\Delta\|_\infty \leq \gamma$:

$$\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma_v \quad [3.22]$$

$$\begin{bmatrix} \gamma^2 T_u' T_u & * \\ T_{y_F} T_{A_i} - T_{u_F} T_{B_i} - T_\varepsilon & I \end{bmatrix} > 0 \quad [3.23]$$

Les matrices (variables d'optimisations), $T_{A_i}, T_{B_i}, T_\varepsilon \in \mathcal{R}^{(N+1)(N+1)}$ sont des matrices LT construites à partir de $[a_0, a_1, \dots, a_i, 0, \dots, 0], [b_0, b_1, \dots, b_i, 0, \dots, 0], \varepsilon_{[N]} \in \mathcal{R}^{N+1}$, respectivement. $T_u, T_y \in \mathcal{R}^{(N+1)(N+1)}$ sont aussi les matrices LT construites à partir de $u_{[N]}, y_{[N]}$, respectivement.

••

Après avoir résolu ce problème d'optimisation, les $N + 1$ premiers coefficients de la réponse impulsionnelle de Δ° sont calculées comme :

$$\vartheta^\circ = T_u^{-1} (T_u^{[n]} \theta_{a_i}^\circ - T_u^{[m]} \theta_{b_i}^\circ - \varepsilon_{[N]}^\circ) \quad [3.24]$$

Le résultat suivant donne une représentation générale pour Δ :

Théorème 3.10 Étant donnés les $N + 1$ premiers coefficients de la réponse impulsionnelle de Δ , cet opérateur peut être exprimé comme :

$$\Delta(z) = \gamma \frac{\sum_{k=0}^N \beta_k z^{-k} + \sum_{k=0}^N \alpha_k z^{-(N+1-k)} \Lambda(z)}{\sum_{k=0}^N \alpha_k z^{-k} + \sum_{k=0}^N \beta_k z^{-(N+1-k)} \Lambda(z)}, \quad \|\Lambda(z)\|_\infty \leq 1 \quad [3.25]$$

avec $\alpha(z^{-1}) = \sum_{k=0}^N \alpha_k z^{-k}$ et $\beta(z^{-1}) = \sum_{k=0}^N \beta_k z^{-k}$. Les vecteurs $\alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_N]'$ et $\beta = [\beta_0, \dots, \beta_N]'$ sont calculés comme :

$$\alpha = \gamma (\gamma^2 I_{N+1} - T_\Delta' T_\Delta)^{-1} e_1$$

et

$$\beta = T_1 T_\Delta (\gamma^2 I_{N+1} - T_\Delta' T_\Delta)^{-1} e_1$$

où T_Δ est une matrice LT construite par le vecteur ϑ^o et T_1 est définie comme :

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

avec $e_1 = [1, 0, \dots, 0]' \in \mathcal{R}^{N+1}$.

••

Démonstration : Voir l'annexe II.

Remarque 3.9 Le théorème précédant démontre qu'à travers la solution d'un problème d'admissibilité convexe de dimension *finie*, tous les opérateurs comme Δ qui satisfont [3.20] avec $\|\Delta\|_\infty \leq \gamma$ sont caractérisés.

3.4.2. *Algorithme itératif*

Dans cette section nous proposons un algorithme itératif qui peut produire une séquence de modèles comme $\{\bar{G}_i^j\}$ qui converge vers un élément dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$. Nous considérons une séquence d'erreur relative comme $\{\epsilon_j\}$ produite comme dans [3.9].

Algorithme 3.3 .

1. Poser $j = 0$ et $F = 1$. Résoudre un problème d'admissibilité convexe du théorème 3.9 et calculer ϵ_0 (voir l'annexe III pour un exemple).
2. Poser $j = j + 1$ et $F = A_i^{j-1}(\theta_a^{j-1})$. Résoudre un problème d'admissibilité convexe du théorème 3.9 en imposant la contrainte supplémentaire de [3.10]. Répéter l'étape 2 jusqu'à ce que $\epsilon_0 \zeta^j \leq \kappa$, pour une précision κ donnée.

••

Théorème 3.11 Si chaque étape d'algorithme possède une solution admissible, alors, $\{\bar{G}_i^j\}$ converge vers un élément dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$.

••

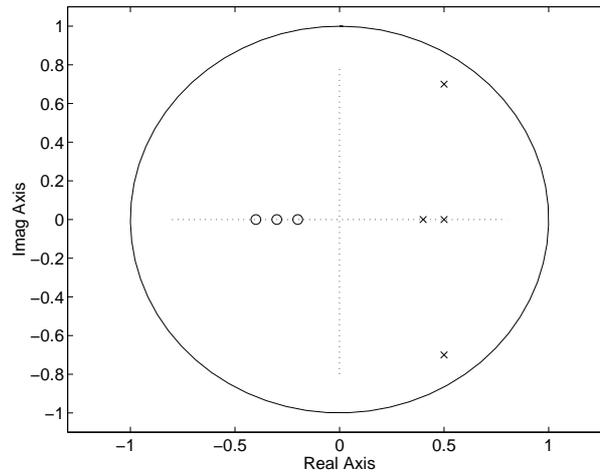


Figure 3.1. Pôles et zéros du système G de l'exemple 3.5

La démonstration de ce théorème est exactement comme celle du théorème 3.7. Si un de ces problèmes d'admissibilité convexe, n'a pas une solution, il faut augmenter soit ς , soit γ , soit σ_v .

Après avoir identifié un élément dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$, l'erreur de modélisation pour le modèle $\hat{G}_i \in \mathcal{RG}^{i,i}$ satisfait [2.24] et [2.25].

3.5. Exemple

Nous supposons que les données expérimentales soient produites comme [2.1] avec

$$G(z) = \frac{0.1z^3 + 0.09z^2 + 0.026z + 0.0024}{z^4 - 1.9z^3 + 1.84z^2 - 0.866z + 0.148}$$

et $v(t) = e(t)$ un signal de bruit avec $\|e\|_\infty = 0.0906$ tel que $\frac{\|e\|_\infty}{\|y\|_\infty} = 7.4\%$. Les pôles et les zéros de G sont montrés dans la figure 3.1.

L'objectif est d'identifier un modèle optimal \hat{G} dans $\mathcal{RG}^{m,n}$ avec $n = 2$ et $m = 3$ et de trouver les bornes dans le pire-des-cas de l'erreur additive de modélisation. Le signal d'entrée est un SBPA d'amplitude 1 avec un nombre de registres égal à 6. Nous choisissons $N = 60$ échantillons des signaux d'entrée-sortie.

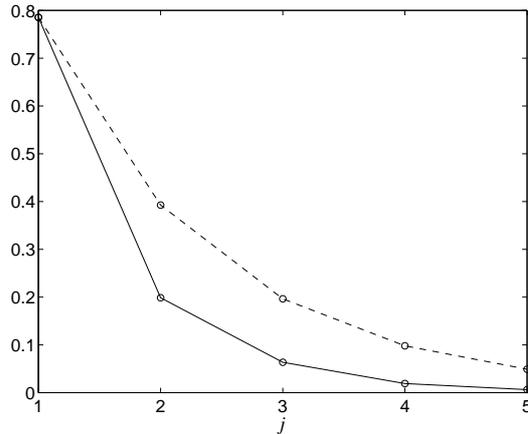


Figure 3.2. *Méthode non-simultanée : Convergence de l'algorithme 3.1. ϵ_j obtenu : '—' et $\zeta^{j-1}\epsilon_1 = \epsilon_j$: prévu '- -'*

3.5.1. Méthode non-simultanée

Nous avons choisi la méthode non-simultanée expliquée dans la section 3.2 (algorithme 3.1). A chaque itération cet algorithme résout un problème convexe (théorème 3.4) avec $M = 10$. Avec $\zeta = 0.5$ et après $j = 5$ itérations de l'algorithme 3.1 quand $\epsilon_j = 0.00165$, le modèle identifié devient :

$$\hat{G}(z) = \frac{0.1257z^2 + 0.0763z + 0.3010}{z(z^2 - 0.9674z + 0.5811)}$$

et $\bar{\sigma}(T_{NM}(\varepsilon^o)) = 1.1932$. La figure 3.2 montre la convergence de cet algorithme. Nous constatons que les valeurs de ϵ_j obtenues sont encore inférieures à celles prévues.

La figure 3.3 compare la réponse fréquentielle de G avec le modèle \hat{G} .

Pour trouver une borne dans le pire-des-cas pour l'erreur de modélisation, nous avons utilisé la structure de modèle [3.13] où Δ_G est un FIR de degré 40. Nous trouvons alors une borne comme [3.14]. La figure 3.4 compare l'erreur du modèle $|G(\omega) - \hat{G}(\omega, \theta^{jf})|$ et sa borne $|\Delta_G(\omega, \vartheta^o)| + 2\sigma_v$.

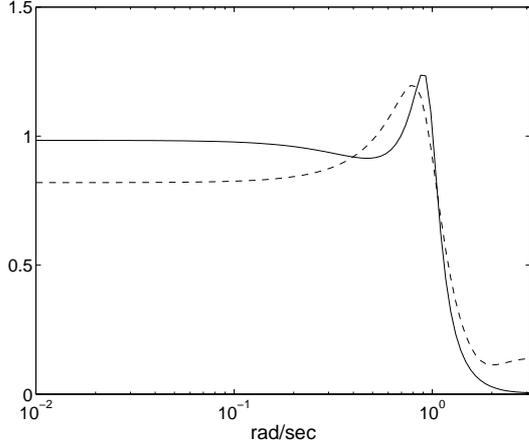


Figure 3.3. *Méthode non-simultanée :* Réponse fréquentielle de G : '—' et celle du modèle \hat{G} : '- -'

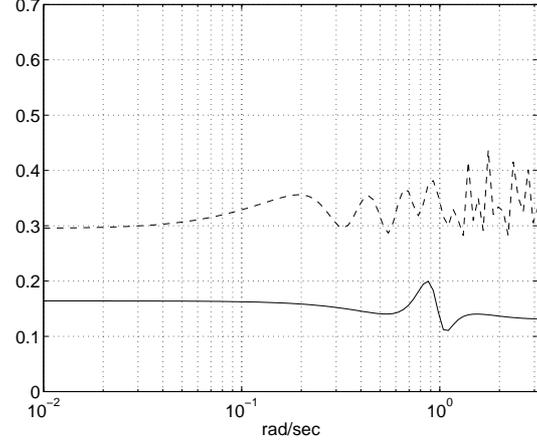


Figure 3.4. *Méthode non-simultanée :* Erreur du modèle $|G(\omega) - \hat{G}(\omega, \theta^{jf})|$: '—' et sa borne $|\Delta_G(\omega, v^0)| + 2\sigma_v$: '- -'

3.5.2. Méthode simultanée

Suivant la stratégie 2.2 et la méthode présentée dans la section 3.3 nous identifions un modèle optimal \hat{G} dans $\mathcal{RG}^{m,n}$ avec $n = 2$ et $m = 3$. Nous supposons $\sigma_v = 0.12$ (choisi intentionnellement différent de $\|v\|_\infty$). Nous choisissons $\gamma = 0.1692$ et nous trouvons le plus petit i tel que $S_N \cap \mathcal{G}_i \neq \emptyset$ comme $\underline{i} = 14$ ($N_v = 129$). Évidemment quand γ est choisi grand, l'erreur de modélisation sera grande et si nous choisissons un petit γ , la valeur de \underline{i} et le nombre des variables d'optimisation, N_v seront grands. Avec $\varsigma = 0.5$ et dans l'itération $j = 5$ de l'algorithme 3.2 quand $\epsilon_j = 2.8 \times 10^{-5}$, nous identifions le modèle comme :

$$\hat{G}(z) = \frac{0.1319z^2 + 0.0655z + 0.3286}{z(z^2 - 0.9736z + 0.6483)}$$

La figure 3.5 montre la convergence de cet algorithme.

Figure 3.6 compare la réponse fréquentielle de G avec celle du modèle \hat{G} .

3.6. Conclusion

Nous avons appliqué les stratégies 2.1 et 2.2 pour l'identification des modèles non affines en les paramètres dans la topologie \mathcal{H}_∞ . Comme ce problème est en général non-convexe, nous avons proposé des algorithmes itératifs pour le résoudre.

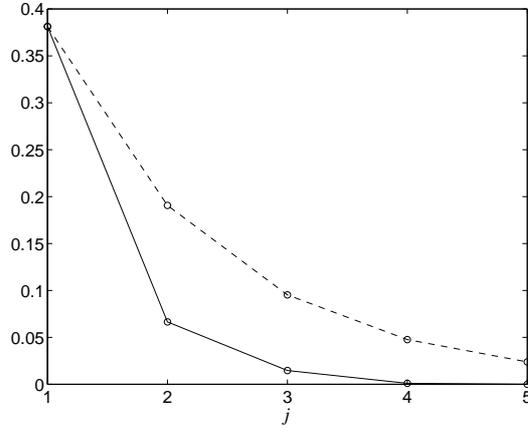


Figure 3.5. *Méthode simultanée : Convergence d'algorithme 3.2. ϵ_j : '-'* et $\zeta^{j-1}\epsilon_1$: '- -' pour $j \geq 1$

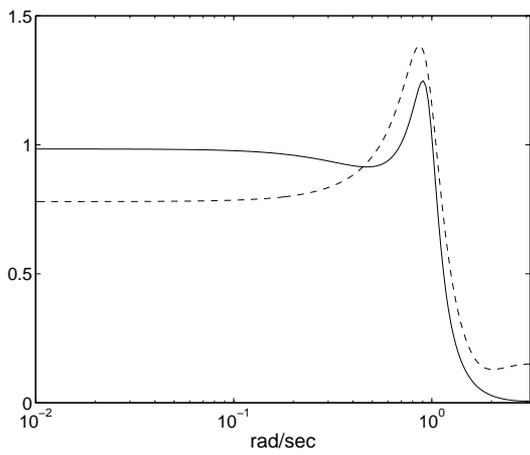


Figure 3.6. *Méthode simultanée : Réponse fréquentielle de G : '-'* et celle du modèle \hat{G} : '- -'

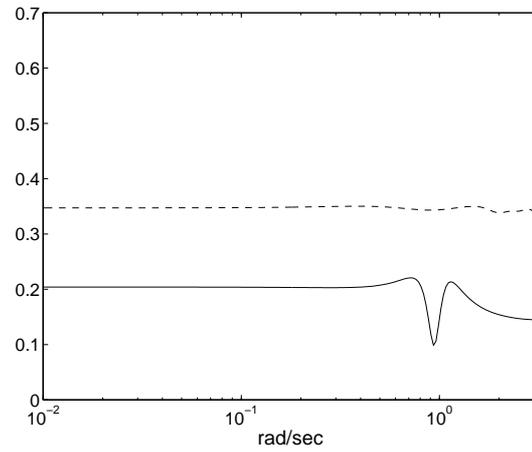


Figure 3.7. *Méthode simultanée : Erreur du modèle $|G(\omega) - \hat{G}(\omega, \theta^*)|$: '-'* et la borne $\hat{O}(\omega)$: '- -'

Les bornes dans le pire-des-cas de l'erreur de modélisation sont aussi calculées. Ces bornes dépendent de choix de σ_v . De plus, dans la stratégie simultanée ces bornes dépendent aussi de γ . Dans la méthode non-simultanée, le nombre des variables d'optimisation est équivalent au nombre des paramètres dans le modèle \hat{G} , tandis que dans la méthode simultanée nous avons souvent certains variables d'optimisation supplémentaires. Donc, en général, pour *seulement identifier un modèle nominal*, le temps de calcul pour la méthode non-simultanée est plus faible que pour la méthode simultanée.

Chapitre 4

Identification en l_1

Résumé : Nous présentons des algorithmes optimaux suivant les stratégies 2.1 et 2.2 en topologie l_1 . Les algorithmes d'identification sont basés sur la résolution des problèmes d'optimisation formulés par la programmation linéaire ou la programmation semi-définie. On utilise quelques concepts de l'analyse fonctionnelle et de la théorie de dualité pour obtenir le dual de chaque problème d'identification. La dualisation de ces problèmes nous permet d'obtenir plus d'information sur la structure des solutions optimales. Elle permet aussi de présenter une méthode pour estimer la valeur de σ_v .

4.1. Introduction

Le problème de commande dans la topologie l_1 est d'abord présenté par Vidyasagar [VID 86] comme un problème de rejet de perturbation persistante (l_∞) qui n'est pas nécessairement bornée en énergie (l_2). Soit n l'ordre d'un système LTI, on démontre [BOY 87] que la norme l_1 de ce système est bornée par $2n + 1$ fois sa norme \mathcal{H}_∞ . Ceci implique que pour les systèmes de grande dimension un correcteur optimal \mathcal{H}_∞ n'est pas optimal dans le sens l_1 et ce correcteur peut avoir une mauvaise performance vis à vis des perturbations persistantes (l_∞). Le problème de commande l_1 a été résolu d'abord dans [DAH 87] [DIA 93] et développé dans [KHA 00]. La synthèse des correcteurs optimaux pour assurer la robustesse en performance et pour le cas SISO et pour des incertitudes non-structurelles est présenté dans [KHA 96].

Comme la norme l_1 d'un système borne sa norme \mathcal{H}_∞ , l'identification et la commande l_1 peuvent être considérées acceptables au sens \mathcal{H}_∞ .

Le problème de l'identification l_1 étudiée dans [JAC 92] suppose le vrai système dans $\mathcal{BH}_\infty(\rho, M)$ et une borne pour la perturbation. Cet article présente un

algorithme ayant une convergence robuste et qui identifie un modèle FIR de degré N . Cet algorithme est globalement optimal dans le sens qu'il minimise l'erreur dans le pire-des-cas $e_\infty(\phi, \ell_1, u, \sigma_v)$ (voir [2.3]). L'autre algorithme présenté, est un algorithme interpolateur qui n'utilise pas la connaissance de σ_v . Dans ces algorithmes le signal d'entrée est considéré comme une impulsion et comme ce signal n'est pas optimal dans le sens du théorème 2.2 alors la convergence de ces algorithmes dépend de l'hypothèse que le vrai système appartienne au $\mathcal{BH}_\infty(\rho, M)$ (voir la remarque 2.1).

Dans [WAN 99], une approche paramétrique est présentée pour l'identification des modèles à structure rationnelle et fixe. L'algorithme suppose que l'ordre du vrai système n est connu. On suppose aussi que les pôles du vrai système se trouvent dans un disque de rayon $\rho < 1$. En connaissant une borne pour la perturbation et les données temporelles, on identifie un modèle de degré nm où $m = \{\min_{k \in \mathbb{Z}^+} | (1 + \rho^k)^n < 2\}$. Évidemment pour ρ proche de 1, (un système faiblement amorti) les valeurs de m et nm seront grandes (beaucoup plus grandes que n). On démontre que l'algorithme a une convergence robuste quand $N \geq 2nm$. Une borne dans le pire-des-cas est aussi calculée pour l'erreur de modélisation.

Dans ce chapitre nous présentons des algorithmes quasi-optimaux suivant les stratégies 2.1 et 2.2 en topologie ℓ_1 . Notre objectif est surtout l'identification des modèles avec structure rationnelle d'ordres fixés et la quantification des incertitudes LTI. A travers la formulation d'un problème dual pour le problème d'identification en dimension infinie, nous présentons une méthode pour l'estimation de σ_v . Nous étudions aussi la structure des paramètres quasi-optimaux.

4.2. Méthode non-simultanée

Nous adoptons la stratégie 2.1 pour l'identification d'un modèle $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$ et le calcul d'une borne dans le pire-des-cas pour l'erreur de modélisation dans la topologie ℓ_1 . Selon la remarque 2.3, pour résoudre le problème [2.17], nous considérons d'abord une structure de modèle affine en les paramètres.

4.2.1. Structure de modèle affine en paramètres

Prenant en compte la structure affine en paramètres [3.1] nous résolvons le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\theta} \|\varepsilon(t, \theta)\|_{\infty} = \min_{\theta} \|A\hat{G}u_{F[N]} - Ay_{F[N]}\|_{\infty} \quad [4.1]$$

Ce problème est facilement formulé comme un problème de programmation linéaire :

$$\min_{\theta_a, \theta_b} \|T_{u_F}^{[m]}\theta_b - T_{y_F}^{[n]}\theta_a\|_{\infty} \quad [4.2]$$

$$\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n} \quad [4.3]$$

où T_{u_F} et T_{y_F} sont des matrices LT construites à partir de u_F et y_F , respectivement. Rappelons que les signaux $u_F(t)$ et $y_F(t)$ sont produits par :

$$u_F(t) = F^{-1}u(t), \quad y_F(t) = F^{-1}y(t)$$

Voir l'annexe III pour un exemple de programmation.

4.2.1.1. Analyse de biais

A partir de [2.1] et la structure [3.1] avec $F = 1$, on peut vérifier que :

$$\|A(\theta_a) \cdot (G - \hat{G}(\theta))u\|_{\infty} - \|A(\theta_a)v\|_{\infty} \leq \|\varepsilon(t, \theta)\|_{\infty} \quad [4.4]$$

On constate que, même pour le cas où le signal de perturbation $v(t)$ est négligeable, la minimisation de $\|\varepsilon(\theta)\|_{\infty}$ par rapport à θ , implique la minimisation de l'erreur de modélisation $G - \hat{G}(\theta)$ pondérée par un terme dépendant du paramètre, $A(\theta_a)$. Pour traiter ce problème et pour éliminer l'effet de la pondération de $A(\theta_a)$, nous proposons dans la prochaine section un algorithme itératif.

4.2.2. Algorithme itératif

Un algorithme similaire à celui proposé dans la section 3.2.2 peut être construit, excepté qu'à chaque itération on résout un problème LP comme [4.2]. La convergence de cet algorithme peut être démontrée.

Théorème 4.12 Supposons un algorithme itératif comme celui de la section 3.2.2 où dans chaque itération, un problème d'optimisation convexe comme [4.2] est résolu. Soit $\{\hat{G}^j\}$ la séquence des modèles produite par cet algorithme. Alors, cette séquence converge vers un élément \hat{G}^o dans $\mathcal{RG}^{m,n}$ tel que $\|(G - \hat{G}^o)u\|_\infty$ soit minimal. Si de plus le signal d'entrée contient toutes les séquences de 1 et de -1 , la valeur de $\|G - \hat{G}^o\|_1$ sera minimale.

••

Démonstration : voir l'annexe II.

4.3. Méthode simultanée

Dans cette section nous adoptons la stratégie 2.2 pour construire un algorithme quasi-optimal basé sur le principe du Rasoir d'Occam, présenté dans le théorème 2.1.

Considérons d'abord un ensemble de modèles comme [2.19], défini dans la topologie ℓ_1 . L'ensemble \mathcal{G} peut être aussi exprimé comme :

$$\mathcal{G} = \{\bar{G} \in \ell_1 \mid \bar{G} = \hat{G} + \Delta, \Delta \in \ell_1, \|\Delta\|_1 \leq \gamma, \hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}\} \quad [4.5]$$

On suppose que le vrai système G appartient aussi à \mathcal{G} . L'ensemble, \mathcal{G} peut être décomposé comme : $\mathcal{G} = \bigcup_i \mathcal{G}_i$, $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_{i+1}$ avec

$$\mathcal{G}_i = \{\bar{G} \in \ell_1 \mid \bar{G} = \hat{G} + \Delta_i, \Delta_i \in \mathcal{P}_i, \|\Delta_i\|_1 \leq \gamma, \hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}\} \quad [4.6]$$

Un algorithme quasi-optimal trouve le plus petit i (disons \underline{i}) tel que $S_N \cap \mathcal{G}_i \neq \emptyset$. Selon la remarque 2.6 pour un i fixe, $S_N \cap \mathcal{G}_i$ n'est pas convexe en général. Nous présentons un algorithme itératif pour traiter le problème.

Remarque 4.10 Pour trouver un élément dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$, notre démarche est :

1. $i = 1$.
2. Trouver $\bar{G} = \hat{G} + \Delta_i$ dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$ en minimisant $\|\Delta_i\|_1$. Si la valeur optimale de $\|\Delta_i\|_1$ est plus grande que γ , poser $i = i + 1$ et répéter 2.

3. Poser $\underline{i} = i$.

On constate que dans cette démarche on résout un problème *d'optimisation* au lieu d'un problème *d'admissibilité*. Ceci nous permet de construire les duaux des problèmes d'optimisations.

••

Voir [LUE 69], [ELI 97], et [BOY 99] pour une étude supplémentaire sur l'optimisation dans l'espace vectoriel linéaire et la théorie de la dualité.

4.3.1. Modèle nominal \hat{G} avec structure FIR

Supposons l'ensemble des modèles, \mathcal{G} dans lequel \hat{G} a une structure FIR comme $\hat{G} = \sum_{i=0}^m g_i z^{-i}$ avec $\theta = [g_0, \dots, g_m]$. Considérons aussi la structure de modèle suivante

$$y(t) = (\hat{G}(\theta) + \Delta_i(\vartheta^i))u(t) + \varepsilon(t) \quad [4.7]$$

avec $\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma_v$. Pour i fixe, le théorème suivant donne une représentation primal-dual pour le problème d'identification d'un modèle \bar{G} dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$:

Théorème 4.13 [NAM 01a] Soient $u, y \in c_0$, et la structure du modèle [4.7] avec $\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma_v$. Supposons que T_u est une matrice LT de dimension infinie construite à partir de u et $T_u^{[m]}$ ses $m + 1$ premières colonnes. Nous supposons aussi que $v \in c_0$. Alors le problème d'identification d'un modèle $\bar{G} \in S_N \cap \mathcal{G}_i$ avec la minimisation de $\|\Delta_i\|_1$ peut être exprimé comme un problème d'optimisation primal-dual, sans distance de dualité ¹ :

$$\text{Pb. Primaire} \qquad \text{Pb. Dual} \qquad [4.8]$$

$$\min_{\varepsilon, \Delta_i, \hat{G}} \|\Delta_i\|_1 \qquad \max\{\langle y, \delta \rangle - \tau \sigma_v\} \qquad [4.9]$$

$$y(t) = (\hat{G} + \Delta_i(\vartheta^i))u(t) + \varepsilon(t) \qquad \tau \geq 0, \delta \in l_1 \qquad [4.10]$$

$$\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma_v \qquad \|T_u^* \delta\|_\infty \leq 1 \qquad [4.11]$$

$$\|\delta\|_1 \leq \tau \qquad [4.12]$$

$$T_u^{m*} \delta = 0 \qquad [4.13]$$

¹Duality gap

où T_u^* est l'opérateur adjoint de T_u (voir la section pour la définition). Quel que soit le signal d'entrée u on a :

$$\vartheta^{i^o}(t) = 0, \quad \forall t \leq m \quad [4.14]$$

De plus, les variables optimales $\Delta_i(\vartheta^{i^o})$ et ε^o ont les propriétés suivantes :

$$|\langle T_u(t), \delta^o \rangle| < 1 \Rightarrow \vartheta^o(t) = 0, \quad \vartheta^o(t) \langle T_u(t), \delta^o \rangle \geq 0 \quad [4.15]$$

$$\delta^o(t) \neq 0 \Rightarrow |\varepsilon^o(t)| = \sigma_v, \quad \delta^o(t) \varepsilon^o(t) \geq 0 \quad [4.16]$$

Ici $T_u(t)$ est le t ième colonne de T_u .

••

Une fois le problème dual résolu, les conditions d'alignement [4.14], [4.15] et [4.16] donnent la structure de toutes les solutions optimales pour le signal de résidu ε et pour Δ_i . On constate aussi que [4.14] est satisfaite pour tout type de signal d'entrée. Ceci démontre que l'incertitude Δ_i^o agit sur le signal d'entrée u avec un retard plus grand que m . De plus, [4.16] démontre que quand $\delta^o(t) \neq 0$, la valeur optimale du résidu $\varepsilon^o(t)$ est soit $-\sigma_v$ soit σ_v .

Remarque 4.11 Quand N échantillons de u et de y sont disponibles on a $\delta \in \mathcal{R}^N$. Alors, les problèmes primaire et dual sont résolus par programmation linéaire. Dans ce cas, l'opérateur adjoint T_u^* devient simplement $T_u' \in \mathcal{R}^{N \times N}$ et on a $T_u^* \delta = T_u' \delta$. Dans le théorème 4.17 nous démontrerons que même lorsque N tend vers l'infini et on considère $i = N$, $\Delta_i(\vartheta^{i^o})$ reste un FIR avec un degré fini.

••

4.3.1.1. Estimation de σ_v

Bien que dans la formulation du problème au chapitre 2, la valeur de σ_v soit supposée connue, dans cette section nous présentons une méthode qui permet d'évaluer ou de corriger l'estimation initiale de σ_v . Cette méthode est basée sur l'observation du signal de résidu optimal ε^o et des coefficients de Δ_i^o .

Rappelons que $\|u\|_\infty \leq 1$. De [4.12] et en considérant la structure de la matrice LT , T_u on constate que :

$$|(T_u^* \delta)(t)| \leq \|\delta\|_1 \leq \tau, \quad \forall t \quad [4.17]$$

Si on choisit une valeur grande pour σ_v , alors :

- Comme $\tau \geq 0$ on peut déduire de [4.9] que la valeur optimale τ^o de τ , qui maximise l'objectif [4.9], devient petite.
- Selon [4.17], ceci rend $|(T_u^* \delta)(t)|$ petit et par conséquent plus petit que 1 plus souvent.
- Alors, la condition d'alignement [4.15] implique que *pour un grand σ_v , le nombre des coefficients nuls dans Δ_i^o , $(\vartheta^{i^o}(t))$ augmente.*

Dans le cas extrême où la valeur de σ_v est choisie très grande, tous les $\vartheta^{i^o}(t)$'s deviennent nuls et $\Delta_i^o = 0$. Dans ce cas *seul* le signal de résidu $\varepsilon^o(t)$ explique la différence entre le vrai système G et le modèle \hat{G} .

Au contraire, si σ_v est choisi petit, d'après [4.9], τ^o qui maximise [4.9] peut prendre une grande valeur (telle que $\sigma_v \tau$ reste encore petit). Alors, de [4.12] on déduit que, pour τ grand, les $|\delta(t)|$ peuvent prendre des valeurs élevées et par conséquent $|\delta(t)| \neq 0$ plus souvent. Donc :

- De la condition d'alignement [4.16], on déduit que $|\varepsilon^o(t)| = \sigma_v$ plus souvent.

Cette discussion, nous donne une règle pour *l'estimation* de σ_v :

- ◇ Quand σ_v est choisi grand, le nombre des coefficients nuls dans $\Delta_i(\vartheta^{i^o})$, (appelons-les z_Δ) augmente. De plus, selon la proposition 4.17, l'ordre de $\Delta(\vartheta^{i^o})$, (appelons-le n_Δ) diminue.
- ◇ Quand σ_v est choisi petit, $|\varepsilon^o(t)| = \sigma_v$ plus souvent et $\varepsilon^o(t)$ aura une variation rapide ² entre $-\sigma_v$ et σ_v .

Enfin il faut ajouter que pour le choix de σ_v , la connaissance *a priori* sur le signal de perturbation $v(t)$ a aussi un rôle important.

²chattering

4.3.1.2. *Algorithme quasi-optimal*

Selon le théorème 2.1 un algorithme quasi-optimal choisit un modèle $\bar{G} \in S_N \cap \mathcal{G}_i$. Dans ce chapitre cet objectif est atteint à travers une démarche présentée dans la remarque 4.10. Pour \hat{G} avec une structure FIR, l'ensemble des modèles, \mathcal{G} défini en [4.5] devient convexe et équilibré. Alors, si le signal d'entrée est optimal dans le sens du théorème 2.2, l'erreur dans le pire-des-cas de cet algorithme sera bornée par $2\sigma_v$ et on a (voir [2.22] et la remarque 2.5) :

$$\|G - \hat{G}_{FIR}(\theta^o)\|_1 \leq 2\sigma_v + \gamma$$

4.3.2. *Structure de modèle affine en paramètres pour le cas $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$*

Dans cette section nous supposons que $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$. Rappelons que notre objectif est toujours de trouver un modèle $\bar{G} \in S_N \cap \mathcal{G}_i$ mais pour un i fixe, cet ensemble n'est pas convexe. Nous présentons d'abord les résultats pour une structure du modèle affine en les paramètres et ensuite, par un algorithme itératif, nous résolvons le problème non-convexe.

Considérons une structure du modèle affine en paramètres comme [3.16] avec $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$, $F \in \mathcal{F}_n(\rho)$ ($\rho < 1$), $\Delta \in \ell_1$, $\|\Delta_i\|_1 \leq \gamma$ et $\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma_v$. Ici F est un filtre donné. Selon la remarque 4.10, l'objectif ici est de trouver \hat{G} et Δ_i qui satisfassent [3.16] et minimisent $\|\Delta_i\|_1$.

4.3.2.1. *Contrainte garantissant la stabilité de \hat{G}*

Pour garantir la stabilité de \hat{G} ou garantir que les zéros de $A(z)$ se trouvent dans une région convexe de \mathcal{D}_ρ avec $\rho < 1$, nous présentons le résultat suivant :

Soit P_A l'ensemble des zéros de $A(z)$. Définissons une région ³ de \mathcal{D}_ρ , convexe et symétrique par rapport à l'axe réel comme :

$$\mathbf{D} \triangleq \{z \in \mathcal{D}_\rho \mid f_{\mathbf{D}}(z) < 0\} \quad [4.18]$$

³LMI region

où $f_{\mathbf{D}}(z) = \alpha + z\beta + \bar{z}\beta^T$ (\bar{z} est le complexe conjugué de z). La matrice α est symétrique et β est une matrice arbitraire (Voir [CHI 96] pour les différents types de régions convexes). Le résultat suivant donne une condition suffisante pour que les zéros de $A(z)$ ou les pôles du modèle \hat{G} se trouvent dans \mathbf{D} .

Théorème 4.14 [NAM 01a]

Une condition suffisante pour que $P_A \subset \mathbf{D}$ est qu'il existe une matrice définie positive Q telle que :

$$M_{\mathbf{D}}(\theta, Q) = \alpha \otimes X + \beta \otimes Y + \beta^T \otimes Y^T < 0$$

avec

$$Y = \left[\begin{array}{c|c} \theta_a & Q \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], \quad X = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{array} \right] \quad [4.19]$$

••

Si on construit le vecteur q par empilement des éléments de la matrice Q , $M_{\mathbf{D}}$ peut être représenté affinement par rapport à θ et q par :

$$M_{\mathbf{D}}(\theta_a, Q) = \sum_{k=1}^n M_a(k)\theta_a(k) + \sum_{k=1}^{n_q} M_q(k)q(k)$$

ou $M_a(k)$ et $M_q(k)$ sont les matrices de base correspondant à $\theta_a(k)$ et $q(k)$, respectivement.

4.3.2.2. *Formulation du problème d'optimisation*

Considérons une structure de modèle affine en les paramètres comme [3.16] avec $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$, $F \in \mathcal{F}_n(\rho)$, $\Delta_i \in \mathcal{P}_i$, et $\|\varepsilon\|_{\infty} \leq \sigma_v$. Le théorème suivant identifie \hat{G} et Δ_i tels que $\|\Delta_i\|_1$ soit minimisé. Dans ce théorème on suppose que

$$u_F(t) = Fu(t)$$

$$y_F(t) = Fy(t)$$

et que la matrice T_{y_1} est obtenue par la décomposition de T_{y_F} comme

$$T_{y_F} = [y_F, T_{y_1}]$$

Théorème 4.15 [NAM 01a] Soient $u, y \in c_0$ et une structure du modèle [3.16] avec $\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma_v$. Alors, le problème de l'identification d'un modèle, $\bar{G} \in S_N \cap \mathcal{G}_i$ avec $\|\Delta_i\|_1$ minimal peut être exprimé comme un problème d'optimisation primal-dual, sans distance de dualité :

$$\min_{\varepsilon, \Delta_i, \bar{G}} \|\Delta_i\|_1 \equiv \max\{\langle y, \delta \rangle - \tau \sigma_v\} \quad [4.20]$$

$$\Delta_i \in \mathcal{P}_i, P_A \subset \mathbf{D} \quad \tau \geq 0, \delta \in l_1, L \leq 0 \quad [4.21]$$

$$(3.16) \quad \|T_F^* \delta\|_1 \leq \tau \quad [4.22]$$

$$\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma_v \quad \|T_{u_F}^* \delta\|_\infty \leq 1 \quad [4.23]$$

$$T_u^{*[m]} \delta = 0, \quad [4.24]$$

$$\langle T_{y_1}^{[n]}(t), \delta \rangle = \text{Tr}(LM_a(t)), \quad 1 \leq t \leq n \quad [4.25]$$

$$\text{Tr}(LM_q(t)) = 0, \quad 1 \leq t \leq n_q \quad [4.26]$$

$\Delta_i(\vartheta^0)$ et ε^o ont les propriétés suivantes :

$$|\langle T_{u_F}(t), \delta^o \rangle| < 1 \Rightarrow \vartheta^o(t) = 0 \quad \vartheta^o(t) \langle T_{u_F}(t), \delta^o \rangle \geq 0 \quad [4.27]$$

$$\langle T_F^*, \delta^o(t) \rangle \neq 0 \Rightarrow |\varepsilon^o(t)| = \sigma_v \quad \langle T_F^*, \delta^o(t) \rangle \varepsilon^o(t) \geq 0 \quad [4.28]$$

••

4.3.3. Algorithme itératif

Suivante la stratégie 2.2, nous proposons un algorithme itératif qui pour un i fixe, produit une séquence de modèles comme $\{\bar{G}^j\}$ qui converge vers un élément dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$. Nous considérons une séquence $\{\epsilon_j\}$ produite comme :

$$\epsilon_j \triangleq \|\theta_a^j - \theta_a^{j-1}\|_\infty$$

Nous définissons aussi le vecteur d par :

$$d \triangleq \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{j-1} \mathbf{1} + \theta_a^{j-1} \\ \epsilon_{j-1} \mathbf{1} - \theta_a^{j-1} \end{bmatrix}$$

avec $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$.

Algorithme 4.4 .

1. Poser $j = 0$ et $F = 1$ et considérer l'ensemble des modèles \mathcal{G}_i . Résoudre un problème d'optimisation convexe dans le théorème 4.15 et calculer ϵ_0 . Voir l'annexe III pour un exemple de programmation.
2. Poser $j = j + 1$ et $F = A^{j-1}(\theta_a)$. Résoudre un problème d'optimisation convexe dans le théorème 4.15 en imposant la contrainte supplémentaire :

$$\epsilon_j \leq \epsilon_{j-1}$$

Répéter l'étape 2 jusqu'à ce que $\epsilon_j \leq \kappa$, pour κ donné.

••

La convergence de cet algorithme vers un modèle \bar{G}^j dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$ peut être démontrée comme pour le théorème 3.7. De plus, comme dans chaque itération un problème d'optimisation est résolu, la convergence est garantie.

4.3.3.1. Analyse de l'algorithme itératif

Dans le résultat suivant, on obtient le dual du problème d'identification à l'itération j . Pour simplifier la notation, la condition sur la stabilité de $\frac{1}{A^j}$, ou $P_{A^j} \subset \mathbf{D}$ n'est pas prise en compte. Évidemment, cette condition peut être facilement ajoutée dans l'algorithme. Rappelons que dans l'itération j , $F = A^{j-1}$.

Théorème 4.16 [NAM 01a] Étant donné $u, y \in c_0$ et la structure du modèle [3.16] avec $\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma_v$ et $\Delta_i(\vartheta^i) \in \mathcal{P}_i$ et $F = A^{j-1}$, le dual du problème d'optimisation à l'itération j , sans distance de dualité, est exprimé par :

$$\min_{\varepsilon^j, \Delta_i^j, \bar{G}^j} \|\Delta_i^j\|_1 \equiv \max\{\langle y, \delta \rangle - \tau \sigma_v - \delta_1^T d_1 - \delta_2^T d_2\} \quad [4.29]$$

$$(3.16) \quad \tau \geq 0, \quad \delta \in l_1, \quad \delta_1, \delta_2 \geq 0 \in \mathcal{R}^n \quad [4.30]$$

$$\|\varepsilon^j\|_\infty \leq \sigma_v \quad \|T_{u_F}^* \delta\|_\infty \leq 1 \quad [4.31]$$

$$\epsilon_j \leq \epsilon_{j-1} \quad \|T_{A^{j-1}}^* \delta\|_1 \leq \tau \quad [4.32]$$

$$T_u^{[m]*} \delta = 0, \quad T_{y_1}^{n*} \gamma = \delta_2 - \delta_1 \quad [4.33]$$

Δ_i^j et ε^j à l'itération j ont les propriétés suivantes :

$$|\langle T_{u_F}(t), \delta^j \rangle| < 1 \Rightarrow \vartheta^j(t) = 0, \quad \vartheta^j(t) \langle T_{u_F}(t), \delta^j \rangle \geq 0 \quad [4.34]$$

$$\langle T_{A^{j-1}}^*(t), \delta^o \rangle \neq 0 \Rightarrow |\varepsilon^j(t)| = \sigma_v, \quad \varepsilon^j(t) \langle T_{A^{j-1}}^*(t), \delta^j \rangle \geq 0 \quad [4.35]$$

de plus,

$$\delta_2(t) \neq \delta_1(t) \Rightarrow |\theta_a^j(t) - \theta_a^{j-1}(t)| = \epsilon_{j-1} \quad [4.36]$$

$$(\delta_2(t) - \delta_1(t)) \cdot (\theta_a^j(t) - \theta_a^{j-1}(t)) \geq 0$$

••

A la limite quand $j \rightarrow \infty$ les bornes pour l'erreur de modélisation [2.22] et [2.26] deviennent

$$\|G - \hat{G}(\theta^o)\|_1 \leq D(\mathcal{G}, u, \sigma_v) + \gamma = O(\theta^o, \vartheta^o) \quad [4.37]$$

et

$$|G(\omega) - \hat{G}(\omega, \theta^o)| \leq D(\mathcal{G}, u, \sigma_v) + |\Delta_i(\omega, \vartheta^o)| = \hat{O}(\omega) \quad [4.38]$$

Comme l'ensemble des modèles \mathcal{G} est un sous espace de ℓ_1 , alors

$$D(\mathcal{G}, u, \sigma_v) \leq D(\ell_1, u, \sigma_v)$$

Mais selon le théorème 2.2 pour un signal d'entrée optimal, $D(\ell_1, u, \sigma_v) \leq 2\sigma_v$, ce qui implique :

$$\|G - \hat{G}(\theta^o)\|_1 \leq 2\sigma_v + \gamma \quad [4.39]$$

et

$$|G(\omega) - \hat{G}(\omega, \theta^o)| \leq 2\sigma_v + |\Delta_i(\omega, \vartheta^o)| \quad [4.40]$$

4.3.3.2. Optimisation en dimension infinie

Le résultat suivant démontre que le degré de $\Delta_i(\vartheta^o)$ est en fait fini, i.e. même dans le cas où le nombre des données temporelle est *infini* et on considère $i = N \rightarrow \infty$, le nombre des coefficients non-nuls dans $\Delta_i(\vartheta^o)$ est fini :

Théorème 4.17 [NAM 01a] Soient $u, y \in c_0$ les signaux d'entrée-sortie expérimentaux avec $u \in Bl_\infty(1)$. Supposons que $i = N \rightarrow \infty$ alors $\Delta_i(\vartheta^o)$ des théorèmes 4.13, 4.15 et 4.16 est un FIR (de degré fini) avec le nombre des coefficients non-nuls fini.

••

Selon ce théorème, dans la topologie l_1 , un FIR peut exactement représenter l'effet de la dynamique linéaire non-modélisée, ce qui n'est pas le cas dans la topologie \mathcal{H}_∞ . (voir [ZHO 95] et la section 3.4).

4.4. Exemple

L'application de la stratégie non-simultanée est simple. Nous nous concentrons donc sur un exemple d'application de la stratégie simultanée d'identification d'un modèle $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$ avec $n = 2$ et $m = 3$ pour le système G donné dans l'exemple 3.5. Nous utilisons les mêmes données utilisées dans l'exemple 3.5. Comme le nombre de données est $N = 60$, nous avons choisi $i = 60$ et appliqué l'algorithme 4.4.

Selon la méthode présentée dans la section 4.3.1.1, le nombre de coefficients nuls dans $\Delta_i(z_\Delta)$ est une fonction de σ_v . Soit n_Δ le degré qu'on obtient pour Δ_i i.e. si $\Delta_i(\vartheta^i) \in \mathcal{P}_i$ avec ϑ^i le vecteur des paramètres, $\vartheta^i(t) = 0, \forall t > n_\Delta$. Évidemment, la valeur de n_Δ est aussi une fonction de σ_v . On définit aussi n_ε comme le nombre de fois où le signal de résidu est saturé ($\|\varepsilon^o\|_\infty = \sigma_v$). La figure 4.1 montre les variations de z_Δ , n_Δ et n_ε par rapport à σ_v . Cette observation est en accord avec la discussion de la section 4.3.1.1.

La figure 4.2 montre la variation de la borne $\gamma^o + 2\sigma_v$ par rapport à σ_v . Sachant que la valeur réelle de l'amplitude du signal de perturbation v est 0.09, on constate que la borne est minimale quand σ_v est choisie égale à 0.1. A partir de ces figures et de la discussion de la section 4.3.1.1 on peut corriger l'estimation de σ_v .

Pour permettre de comparer le modèle obtenu dans cette section avec celui obtenu dans les autres exemples, nous avons choisi la même valeur pour σ_v (0.15).

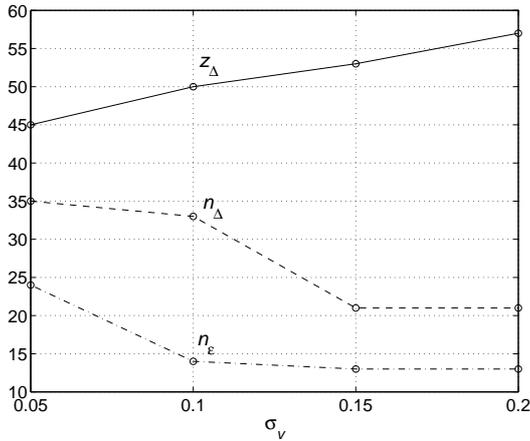


Figure 4.1. z_Δ (le nombre des coefficients nuls dans $\Delta_i(\vartheta^{i^o})$) : '--', n_Δ (le degré de $\Delta_i(\vartheta^{i^o})$) : '- -' et n_ϵ (le nombre de t où $|\epsilon^o(t)| = \sigma_v$) : '. -'

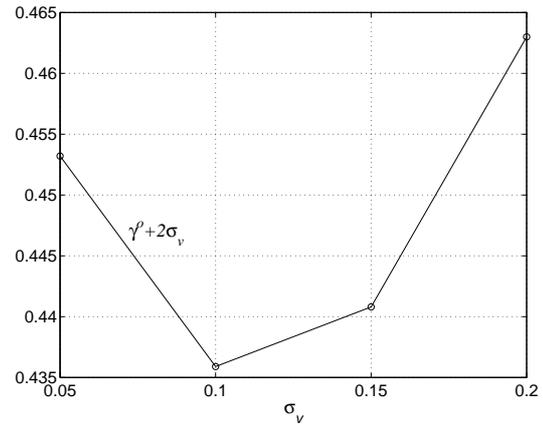


Figure 4.2. Borne de l'erreur de modélisation [4.39]

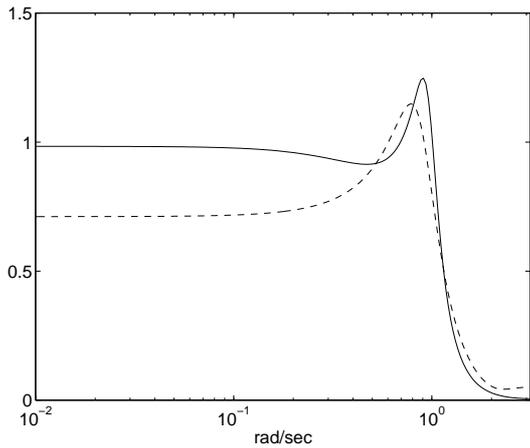


Figure 4.3. Réponse fréquentielle du système $|G|$: '--' et celle du modèle $|\hat{G}|$: '- -'

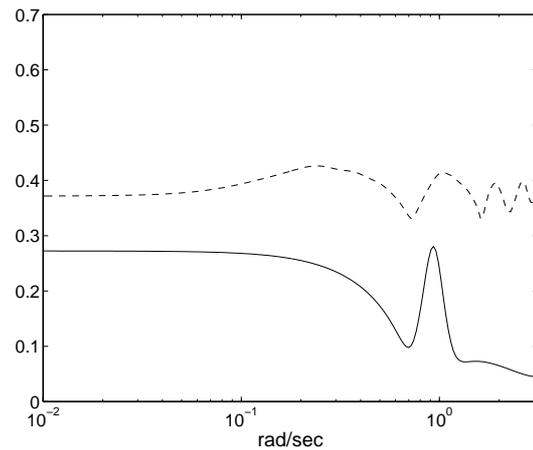


Figure 4.4. Comparaison entre l'erreur du modèle : '--' et sa borne [4.40] : '- -'

Après $j = 2$ itérations de l'algorithme 4.4, quand $\epsilon_j = 0.019$ et $\|\frac{A^{j-1}}{A^j}\|_1 = 1.08$, le modèle \hat{G} devient :

$$\hat{G}(z) = \frac{0.0036z^3 + 0.087z^2 - 0.1345z + 0.1855}{z(z^2 - 1.0391z + 0.6162)}$$

La figure 4.3 compare le modèle identifié et le système. La figure 4.4 compare l'erreur du modèle et sa borne [4.40].

4.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons adopté les stratégies 2.2 et 2.1 pour l'identification des systèmes d'ordre fixe et pour la quantification des incertitudes LTI dans la topologie ℓ_1 . Nous avons constaté que quand les modèles nominaux ont des structures fraction rationnelle, les problèmes d'optimisation sont non-convexes. Nous avons donc présenté des algorithmes itératifs pour traiter ce problème. Ces problèmes d'identification sont de dimension *infinie* et la dualisation de ces problèmes est réalisée sans distance de dualité. Concernant l'ensemble des modèles, \mathcal{G} défini en [4.6] et la structure du modèle [3.16], cette dualisation nous a permis :

- d'avoir plus d'information sur la structure de Δ_i^o et ε^o .
- de présenter une méthode pour corriger l'estimation de σ_v .
- de déduire que même quand $N \rightarrow \infty$, le nombre de coefficients actifs et non-nuls dans Δ_i^o ainsi que l'ordre de Δ_i^o restent *finis* quand $i = N \rightarrow \infty$.

Chapitre 5

Identification en Métrique Gap

Résumé : Dans ce chapitre nous adoptons la stratégie non-simultanée 2.1 ainsi que la stratégie simultanée proposée dans la section 3.4 pour identifier les facteurs premiers et normalisés d'un modèle \hat{G} (même instable) et pour minimiser le gap (ν -gap) entre le vrai système G et \hat{G} . Les bornes de l'erreur de modélisation dans ces métriques sont aussi présentées. Nous adoptons une approche temporelle pour l'identification.

5.1. Introduction

Il est connu que des perturbations non-structurelles sur les facteurs premiers d'un modèle peuvent caractériser les incertitudes pour des systèmes instables [ZHO 96]. La métrique gap [GEO 90, GEO 92]¹ est donc une métrique appropriée pour identifier les systèmes instables. La topologie dite de graphe générée par la métrique gap [VID 84]² est la *meilleure* topologie pour étudier la robustesse en boucle fermée. Autrement dit, l'identification des systèmes en métrique gap est la démarche minimale qu'on doit adopter pour réaliser des régulateurs robustes. Donc, dans ce chapitre notre objectif est d'identifier les facteurs premiers et normalisés d'un modèle et de quantifier l'erreur de modélisation dans la métrique gap.

5.1.1. Définitions

Comme la métrique gap ou la métrique ν -gap [VIN 93] sont définies par rapport aux facteurs premiers normalisés, dans cette section nous présentons quelques définitions de base concernant les facteurs premiers et normalisés.

¹Gap metric

²Graph topology

Définition 5.6 Soit $G(z) = N(z)D(z)^{-1}$ avec $N(z), D(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ tel que

$$D(z)X(z) - N(z)Y(z) = I$$

pour $X(z), Y(z) \in \mathcal{RH}_\infty$, nous appelons $N(z)$ et $D(z)$ les facteurs premiers à droite de $G(z)$.

••

Définition 5.7 Soit $N(z)$ et $D(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ les facteurs premiers à droite de $G(z)$ avec $G(z) = N(z)D(z)^{-1}$, alors une factorisation particulière qui satisfait

$$N(z^{-1})N(z) + D(z^{-1})D(z) = I$$

est appelée *normalisée*.

••

Définition 5.8 [GEO 90] Soit G_1, G_2 deux systèmes linéaires et invariants dans le temps avec les facteurs premiers $[N'_i, D'_i]' \forall i = 1, 2$, alors le gap orienté³ entre G_1 et G_2 est défini comme :

$$\vec{\delta}(G_1, G_2) \triangleq \inf_{Q \in \mathcal{RH}_\infty} \|[N'_1, D'_1]' - [N'_2, D'_2]'Q\|_\infty$$

et le gap entre G_1 et G_2 est défini comme :

$$\delta(G_1, G_2) \triangleq \max(\vec{\delta}(G_1, G_2), \vec{\delta}(G_2, G_1))$$

De plus, $\delta(G_1, G_2) \leq 1$ et si $\delta(G_1, G_2) < 1$ alors,

$$\vec{\delta}(G_1, G_2) = \vec{\delta}(G_2, G_1) = \delta(G_1, G_2)$$

••

Définition 5.9 [VIN 93] (cas SISO) Soit $[N'_i, D'_i]'$ une factorisation normalisée de G_i . Appelons :

$$T(z) = N_2(z)D_1(z) - N_1(z)D_2(z)$$

$$T_1(e^{j\omega}) = N_2(e^{-j\omega})N_1(e^{j\omega}) + D_2(e^{-j\omega})D_1(e^{j\omega})$$

³Directed gap

alors le gap de Vinicombe, ν -gap entre G_1 et G_2 est défini comme :

$$\delta_\nu(G_1, G_2) = \begin{cases} \|T(z)\|_\infty & \text{si } T_1(e^{j\omega}) \neq 0, \forall \omega \\ & \text{et } \text{wno}T_1(e^{j\omega}) = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\text{wno}^4T(z)$ est le nombre d'encerclement de l'origine par le diagramme de Nyquist de $T(z)$.

••

Les inégalités suivantes peuvent être facilement démontrées :

Lemme 5.1 Pour $G_1, G_2, G_3 \in \mathcal{RH}_\infty$:

$$\delta(G_1, G_3) \leq \delta(G_1, G_2) + \delta(G_2, G_3) \quad [5.1]$$

$$\vec{\delta}(G_1, G_3) \leq \delta(G_1, G_2) + \delta(G_2, G_3) \quad [5.2]$$

$$\vec{\delta}(G_1, 0) = \|G_1\|_\infty \quad [5.3]$$

$$\vec{\delta}(G_1, 0) \leq \delta(G_1, G_2) + \|G_2\|_\infty \quad [5.4]$$

$$\delta(G_1, G_2) \leq \|G_1 - G_2\|_\infty \quad [5.5]$$

$$\delta_\nu(G_1, G_2) \leq \delta(G_1, G_2) \quad [5.6]$$

••

5.2. Identification des facteurs premiers et normalisés d'un modèle nonfalsifié

Supposons que $N(z), D(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ soient les facteurs premiers normalisés du modèle nominal $\hat{G}(z)$ avec le degré McMillan n . On peut démontrer [TSA92] que :

$$\deg[N', D']' = \deg(\hat{G}) = n$$

Dans le cas SISO, ceci est équivalent à dire [HOF 95b] qu'il existe $B(z), A(z) \in \mathcal{P}_n$ et $F(z) \in \mathcal{F}_n(1)$ tels que les facteurs premiers et normalisés de \hat{G} sont de la forme :

$$N(z) = \frac{B(z)}{F(z)}, \quad D(z) = \frac{A(z)}{F(z)}$$

⁴Winding Number

Ici B, A et F sont premiers entre eux. Nous supposons aussi qu'il n'y a pas de facteur passe-tout ⁵ dans \hat{G} . *Ce résultat implique que les facteurs premiers normalisés ont le plus petit degré de McMillan parmi les autres facteurs premiers et l'identification des facteurs premiers normalisés d'un modèle nécessite le plus petit nombre de paramètres.*

5.2.1. Ensemble des modèles

Supposer un ensemble des modèles défini comme :

$$\mathcal{G} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} \bar{G} \mid \bar{G} = \hat{G} + \Delta_c, \hat{G} = \begin{bmatrix} N \\ D \end{bmatrix}, \Delta_c = \begin{bmatrix} \Delta N \\ -\Delta D \end{bmatrix}, N = \frac{B}{F}, D = \frac{A}{F}, \\ B \in \mathcal{P}_n, A \in \mathcal{P}_n, F \in \mathcal{F}_n(1), \|\Delta_c\|_\infty \leq \gamma \leq 1, \\ B(z^{-1})B(z) + A(z^{-1})A(z) = F(z^{-1})F(z) \end{array} \right\} \quad [5.7]$$

où ΔN et ΔD représentent les incertitudes dans les facteurs premiers. La distance entre les pôles et zéros de $D - \Delta D$ est aussi supposée au moins $\alpha \neq 0$. Nous supposons que le vrai système $G \in \mathcal{G}$. Pour satisfaire la condition $B(z^{-1})B(z) + A(z^{-1})A(z) = F(z^{-1})F(z)$ qui garantit la normalisation des facteurs premiers, nous avons ce résultat :

Lemme 5.2 Soient $B \in \mathcal{P}_n, A \in \mathcal{P}_n, F \in \mathcal{F}_n(1)$. Une condition nécessaire et suffisante pour avoir $B(z^{-1})B(z) + A(z^{-1})A(z) = F(z^{-1})F(z)$ est que :

$$T_B^{[n]'} T_B^{[n]} + T_A^{[n]'} T_A^{[n]} = T_F^{[n]'} T_F^{[n]} \quad [5.8]$$

où T_B est une matrice LT construite à partir de $[\theta_b', 0, \dots, 0]' \in \mathcal{R}^{N+1}$. On suppose que $N > n + 1$.

••

Démonstration : Triviale par vérification directe.

Ce résultat va servir dans l'algorithme itératif 5.5 pour normaliser les facteurs premiers du modèle identifié.

⁵All pass

5.2.2. Signal d'entrée

Nous supposons que le signal de sortie $y(t)$ est produit comme [2.1] avec $\|v\| \leq \sigma_v$. L'expérience peut être réalisée en boucle fermée. Comme l'identification des systèmes instables ne peut être réalisée qu'en boucle fermée, le signal d'entrée optimal doit avoir les propriétés suivantes [TSE 93] :

- 1 Tester la stabilité de tous les systèmes dans l'ensemble des modèles \mathcal{G} , i.e. si on applique $u(t)$ à l'entrée de tous les systèmes instables dans \mathcal{G} (en boucle ouverte) il doit donner des sorties non-bornées. Ceci est satisfait ssi :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup \left| \sum_{t=0}^N u(t) e^{-jt\omega} \right| = \infty, \quad \forall \omega \in [0, 2\pi] \quad [5.9]$$

En plus, sa transformée de z n'a pas de zéro en dehors du cercle unité.

- 2 Minimiser le diamètre d'information :

$$D(\mathcal{G}, u, \sigma_v) \leq 2\sigma_v$$

Ceci est satisfait si le signal d'entrée peut tester la stabilité et contient toutes les séquences de 1 et de -1 , en supposant que l'ensemble des modèles \mathcal{G} soit convexe et équilibré.

Comme en réalité un tel signal d'entrée peut être difficilement construit, on peut utiliser plusieurs séquences de signal d'entrée tel que l'union de ces signaux ait les propriétés nécessaires :

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

5.2.3. Algorithme d'identification (stratégie simultanée)

L'ensemble des modèles, \mathcal{G} peut d'être décomposé comme : $\mathcal{G} = \cup_i \mathcal{G}_i$, $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_{i+1}$ pour $1 < i \leq n$ avec

$$\mathcal{G}_i \triangleq \left\{ \begin{array}{l} \bar{G} \quad | \quad \bar{G} = \hat{G}_i + \Delta_c, \quad \hat{G}_i = \begin{bmatrix} N_i \\ D_i \end{bmatrix}, \quad \Delta_c = \begin{bmatrix} \Delta N \\ -\Delta D \end{bmatrix}, \quad N_i = \frac{B_i}{F_i}, \quad D_i = \frac{A_i}{F_i}, \\ B_i \in \mathcal{P}_i, \quad A_i \in \mathcal{P}_i, \quad F_i \in \mathcal{F}_i(1), \quad \|\Delta_c\|_\infty \leq \gamma \leq 1, \\ B_i(z^{-1})B_i(z) + A_i(z^{-1})A_i(z) = F_i(z^{-1})F_i(z) \end{array} \right\} \quad [5.10]$$

D'après le théorème 2.1, notre objectif est de trouver un modèle non-falsifié, \bar{G} dans $S_N \cap \mathcal{G}_{\underline{i}}$ où \underline{i} est le plus petit i tel que $S_N \cap \mathcal{G}_i \neq \emptyset$. L'erreur dans le pire des cas de cet algorithme, selon ce théorème, est bornée par le diamètre d'information. Alors, l'erreur dans le pire des cas est obtenue comme :

$$\delta(G, \hat{G}) \leq \delta(G, \bar{G}) + \delta(\bar{G}, \hat{G}) \quad [5.11]$$

$$\leq e_\infty(\phi^o, \mathcal{G}, u, \sigma_v) + \|\Delta_c\|_\infty \quad [5.12]$$

$$\leq D(\mathcal{G}, u, \sigma_v) + \gamma \triangleq O_{gap}(\sigma_v, \theta^o) \quad [5.13]$$

Pour obtenir ces inégalités nous avons considéré le fait que $\delta(\bar{G}, \hat{G}) \leq \|\bar{G} - \hat{G}\|_\infty = \|\Delta_c\|_\infty \leq \gamma$. Comme $\mathcal{G} \subset \ell_1$ et selon la remarque 2.2, si le signal d'entrée est optimal et peut tester la stabilité [5.9], alors $D(\mathcal{G}, u^o, \sigma_v) \leq 2\sigma_v$ ce qui implique

$$\delta(G, \hat{G}) \leq 2\sigma_v + \gamma = O_{gap}(\sigma_v, \theta^o)$$

Concernant la métrique de Vinicombe, on peut vérifier que

$$T(\bar{G}, \hat{G}) = N(D - \Delta D) - D(N + \Delta N) = -[N, D] \begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta N \end{bmatrix}$$

Quand N et D sont normalisés, on a

$$\|T\|_\infty = \|\Delta_c\|_\infty$$

Sachant que $\delta_\nu(G_1, G_2) \leq \delta(G_1, G_2)$ on obtient une borne dans le pire des cas pour l'erreur de modélisation exprimée en ν -gap :

$$\delta_\nu(G, \hat{G}) \leq \delta_\nu(G, \bar{G}) + \delta_\nu(\bar{G}, \hat{G}) \quad [5.14]$$

$$\leq \delta(G, \bar{G}) + \|T(\bar{G}, \hat{G})\|_\infty \quad [5.15]$$

$$\leq e_\infty(\phi^o, \mathcal{G}, u, \sigma_v) + \|\Delta_c\|_\infty \quad [5.16]$$

$$\leq D(\mathcal{G}, u, \sigma_v) + \gamma = O_{gap}(\sigma_v, \theta) \quad [5.17]$$

5.2.3.1. Synthèse de l'algorithme d'identification

Nous choisissons la structure du modèle suivante :

$$y(t) = \hat{G}(\theta)u(t) + \Delta_c u(t) + \varepsilon(t) \quad [5.18]$$

avec $\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma_v$.

Le résultat suivant transforme le problème de l'identification d'un élément dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$ en un problème d'admissibilité :

Théorème 5.18 [NAM 00b] Étant donné $u_{[N]}, y_{[N]}$ avec $u(0) \neq 0$, le problème de trouver un élément dans $S_N \cap \mathcal{G}_i$ est équivalent à trouver les éléments admissibles $T_{A_i}, T_{B_i}, T_{F_i}$ et T_ε qui satisfassent les contraintes suivantes :

$$\begin{bmatrix} \gamma^2 T_{F_i}' T_{yu}' T_{yu} T_{F_i} & * \\ T_y T_{A_i} - T_u T_{B_i} - T_\varepsilon & I \end{bmatrix} > 0 \quad [5.19]$$

$$T_B^{[i]'} T_B^{[i]} + T_A^{[i]'} T_A^{[i]} = T_F^{[i]'} T_F^{[i]} \quad [5.20]$$

où $T_{yu} \in \mathcal{R}^{2(N+1) \times (N+1)}$ est une matrice bloc LT construite par $[q(0), q(1), \dots, q(N)]$ avec $q(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$.

••

5.2.3.2. Algorithme itératif

Évidemment, ce problème d'admissibilité est non-convexe. Pour le résoudre, nous proposons un algorithme itératif :

Algorithme 5.5 .

1. Fixer i et poser $j = 0$ et $T_{F_i^j} = I$ et résoudre le problème d'admissibilité convexe du théorème 5.18 sans la condition [5.20] et trouver $A_i^j(z), B_i^j(z)$.
2. Trouver un filtre stable et à minimum de phase $F_i^j(z)$ tel que :

$$|F_i^j(\omega)|^2 = |A_i^j(\omega)|^2 + |B_i^j(\omega)|^2, \forall \omega$$

ensuite construire $T_{F_i^j}, T_{A_i^j}$ et $T_{B_i^j}$ à partir de $F_i^j(z), A_i^j(z)$ et $B_i^j(z)$ respectivement. Poser $j = 1$.

3. Résoudre le problème d'admissibilité convexe suivant avec les contraintes affines. Ensuite poser $j = j + 1$

$$\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma_v \quad [5.21]$$

$$\begin{bmatrix} 0.5\gamma^2(T'_{F_i^{j-1}}T_{yu}T_{yu}T_{F_i^j} + T'_{F_i^j}T_{yu}T_{yu}T'_{F_i^{j-1}}) & * \\ T_y T_{A_i^j} - T_u T_{B_i^j} - T_\varepsilon & I \end{bmatrix} > 0 \quad [5.22]$$

$$\begin{bmatrix} 0.5\mathcal{T}^j & * \\ T_{F_i^j}^{[i]} & I \end{bmatrix} \geq 0 \quad [5.23]$$

$$\begin{bmatrix} 0.5\mathcal{F}^j & * & * \\ T_{A_i^j}^{[i]} & I & * \\ T_{B_i^j}^{[i]} & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0 \quad [5.24]$$

$$\begin{bmatrix} d_{i-1}^2 I & * & * & * \\ T_{A_i^j} - T_{A_i^{j-1}} & I & * & * \\ T_{B_i^j} - T_{B_i^{j-1}} & 0 & I & * \\ T_{F_i^j} - T_{F_i^{j-1}} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad [5.25]$$

où

$$\mathcal{T}^j = T_{A_i^{j-1}}^{[i]'} T_{A_i^j}^{[i]} + \{T_{B_i^{j-1}}^{[i]'} T_{B_i^j}^{[i]} + T_{A_i^j}^{[i]'} T_{A_i^{j-1}}^{[i]} + T_{B_i^j}^{[i]'} T_{B_i^{j-1}}^{[i]}\}$$

$$\mathcal{F}^j = T_{F_i^{j-1}}^{[i]'} T_{F_i^j}^{[i]} + T_{F_i^j}^{[i]'} T_{F_i^{j-1}}^{[i]}$$

avec l'erreur $\epsilon_j = \|[T_{A_i^j}, T_{B_i^j}, T_{F_i^j}] - [T_{A_i^{j-1}}, T_{B_i^{j-1}}, T_{F_i^{j-1}}]\|$.

4. Répéter l'étape 3 jusqu'à ce que $N(z)$ et $D(z)$ deviennent normalisés ou que $\epsilon_j < \kappa$ pour une précision κ donnée.

••

Remarque 5.12 L'inégalité [5.22] est obtenue par linéarisation de l'inégalité [5.19]. Les inégalités [5.23] et [5.24] sont aussi obtenues par linéarisation de [5.20]. La contrainte [5.25] équivaut à imposer $\epsilon_j < \epsilon_{j-1}$. Si une solution existe, elle garantit la convergence de l'algorithme. Quand $\lim_{j \rightarrow \infty} \epsilon_j \rightarrow 0$ et $N \rightarrow \infty$, les contraintes [5.19] et [5.20] sont effectivement satisfaites.

••

Il faut noter que la linéarisation d'un problème non-convexe, donne en général une approximation de ce problème. Mais dans le cas de l'algorithme itératif précédent, quand $\epsilon_j < \kappa$ pour un κ arbitraire, la solution optimale de problème linéarisé devient la solution du problème non-convexe du théorème 5.18.

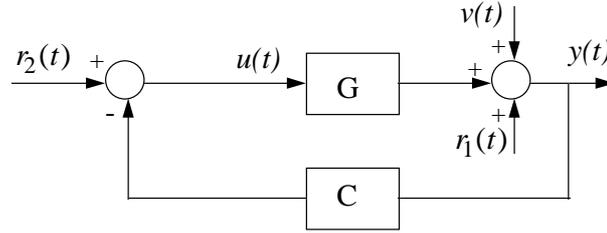


Figure 5.1. Schéma général du système en boucle fermée

5.3. Méthode non-simultanée pour l'identification des facteurs premiers et normalisés

L'identification des facteurs premiers et normalisés d'un système dans la topologie \mathcal{H}_2 est étudiée dans [HOF 95b] et un algorithme à deux étapes est proposé qui identifie les facteurs premiers normalisés. *Dans cette section nous développons cet algorithme pour la topologie \mathcal{H}_∞ . Ceci nous permet de trouver une borne de l'erreur de modélisation exprimée en métrique de gap et ν -gap.*

Dans la première étape de cet algorithme on identifie des modèles précis (avec degrés élevés) des facteurs premiers du système. Dans la deuxième étape, les facteurs premiers normalisés avec des ordres réduits sont identifiés.

Considérons le schéma en boucle fermée de la figure 5.1 avec $r_1 = 0$ et $r_2 = r$. Supposons que le vrai système G est stabilisé par le correcteur C . Si S et S_p sont les fonctions de sensibilité de la boucle fermée définies comme : $S = \frac{1}{1+GC}$ et $S_p = GS$, on constate que $G = S_p S^{-1}$ et comme S_p et S sont stables, on peut les traiter comme les facteurs premiers de G .

Considérons la figure 5.1 où $r_2(t) = r(t)$ est le signal d'excitation. On a :

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_p \\ S \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} S \\ -S_u \end{bmatrix} e(t) \quad [5.26]$$

avec $S_u = CS$. L'algorithme à deux étapes (modifié) est décrit comme :

Algorithme 5.6 [NAM 00b] .

1. Avec $u_{[N]}, y_{[N]}$ et $r_{[N]}$ et en utilisant un algorithme d'identification quelconque, identifier un modèle précis d'ordre élevé \hat{G}_x qui soit stabilisé par le

correcteur C . Ensuite, trouver les facteurs premiers normalisés de \hat{G}_x , soit N_x et D_x . Construire le filtre stable $F = (D_x + CN_x)^{-1}$ et produire le signal :

$$r_f(t) = Fr(t) \quad [5.27]$$

Vérifier si $\exists \alpha > 0$ tel que :

$$\Phi_{r_f}(\omega) = |F|^2 \Phi_r(\omega) \geq \alpha \quad \forall \omega \quad [5.28]$$

Sinon, choisir un autre signal de référence et répéter la première étape.

2. Identification des facteurs premiers normalisés d'ordre réduit.

Choisissons la structure de modèle suivante :

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(\theta) \\ D(\theta) \end{bmatrix} r_f(t) + \varepsilon(t, \theta) \quad [5.29]$$

où $N(\theta)$ et $D(\theta)$ sont de degré n . Appliquer l'algorithme itératif 3.1 et identifier $\hat{G}(\theta^o)$ tel que :

$$\theta^o = \arg \min_{\theta} \sup_{\omega} \Phi_{\varepsilon}(\omega, \theta)$$

Nous savons que cet algorithme minimise $\|(G - \hat{G}(\theta))\chi_r\|_{\infty}$.

Le théorème suivant démontre que cet algorithme minimise une borne de $\delta(G, \hat{G})$.

Théorème 5.19 [NAM 00b] Si dans la première étape de l'algorithme 5.6 on identifie un modèle exact tel que $\hat{G}_x \approx G$, alors cet algorithme minimise une borne de $\delta(G, \hat{G})$:

$$\delta^2(\hat{G}_x, \hat{G}(\theta)) \leq \alpha^{-1} [\sup_{\omega} \Phi_{\varepsilon}(\omega, \theta) + \sup_{\omega} (| \begin{bmatrix} S \\ -S_u \end{bmatrix} |^2 \Phi_v(\omega))] \quad [5.30]$$

••

L'inégalité [5.30] démontre clairement que la minimisation de $\sup_{\omega} \Phi_{\varepsilon}(\omega, \theta)$, par l'algorithme 3.1 minimise une borne supérieure du gap entre $\hat{G}_x (\approx G)$ et \hat{G} . Noter que dans l'approche classique [HOF 95b] basée sur l'algorithme des moindres carrés, l'identification des facteurs premiers normalisés n'implique pas la minimisation de $\delta(\hat{G}_x, \hat{G})$, car dans ce cas seulement $\| \begin{bmatrix} N_x - N(\theta) \\ D_x - D(\theta) \end{bmatrix} \|_{\mathcal{H}_2}$ est minimisée ce qui n'est pas une borne pour $\delta(\hat{G}_x, \hat{G})$.

5.3.1. Bornes de l'erreur de modélisation

L'équation [5.30] ne donne pas une borne calculable pour $\delta(\hat{G}_x, \hat{G})$ car le terme droit dépend de la fonction de sensibilité réelle ainsi que du spectre de bruit. Après avoir identifié les facteurs premiers normalisés $N(\theta^o)$ et $D(\theta^o)$, on peut calculer le résidu $\varepsilon(t, \theta^o)$ à partir de [5.29]. Ce signal peut aussi s'exprimer comme :

$$\varepsilon(t, \theta) = \begin{bmatrix} N_x - N(\theta^o) \\ D_x - D(\theta^o) \end{bmatrix} r_f(t) + \begin{bmatrix} S \\ -S_p \end{bmatrix} e(t) \quad [5.31]$$

Pour identifier l'erreur en facteurs premiers nous choisissons la structure du modèle suivante :

$$\varepsilon(t, \theta^o) = \Delta_c(\vartheta) r_f(t) + \varepsilon_1(t, \vartheta) \quad [5.32]$$

L'ensemble des modèles $\tilde{\mathcal{G}}$ auquel Δ_c appartient, est choisi de sorte qu'il contienne aussi la vraie erreur $\begin{bmatrix} N_x - N(\theta) \\ D_x - D(\theta) \end{bmatrix}$ et qu'il ait les propriétés indiquées dans le théorème 2.1. Après avoir identifié Δ_c , une borne dans le pire des cas pour $\delta(\hat{G}_x, \hat{G}(\theta))$ est calculée comme :

Théorème 5.20 Si le signal d'entrée peut tester la stabilité et si l'ensemble des modèles $\tilde{\mathcal{G}}$ a les propriétés indiquées dans le théorème 2.1 et si on applique un algorithme quasi-optimal comme [2.18] pour identifier $\Delta_c(\vartheta^o)$, alors une borne dans le pire des cas pour l'erreur de modélisation en métrique de gap est obtenue par :

$$\delta(\hat{G}_x, \hat{G}(\theta^o)) \leq \|\Delta_c(\vartheta^o)\|_\infty + 2\sigma_v$$

••

Démonstration : Voir l'annexe II.

5.4. Exemple

Dans cette exemple nous identifions les facteurs premiers et normalisés du système G de l'exemple 3.5. Nous adoptons la méthode présentée dans la section 5.2. Avec $\gamma = 0.05$ et $\sigma_v = 0.15$ le plus petit i telle que $S_N \cap \mathcal{G}_i \neq \emptyset$ est obtenu $\underline{i} = 2$.

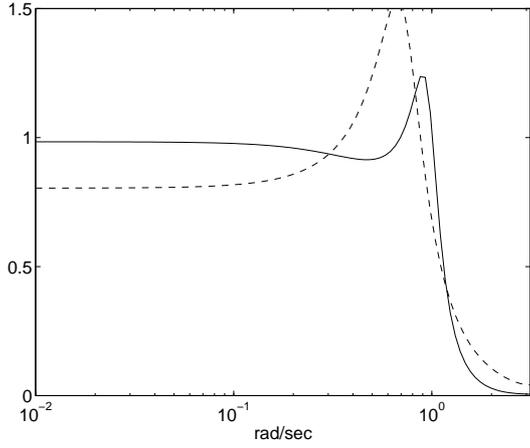


Figure 5.2. Comparaison entre la réponse fréquentielle de G et celle du modèle \hat{G} .

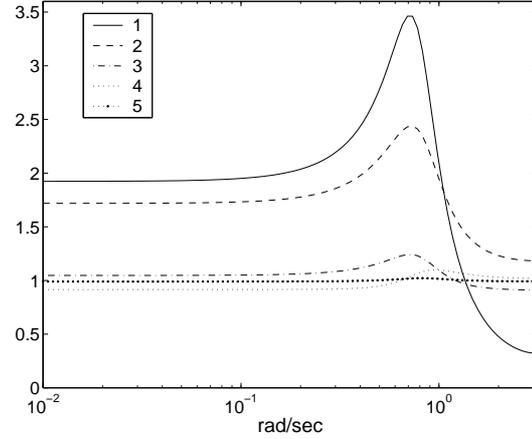


Figure 5.3. Normalisation des facteurs premiers : La valeur de $|N(e^{j\omega})N(e^{-j\omega})|^2 + |D(e^{j\omega})D(e^{-j\omega})|^2$ calculée dans 5 itérations de l'algorithme 5.5.

L'identification des facteurs premiers est basée sur l'application de l'algorithme 5.5. Après $j = 5$ itérations ($\kappa = 0.0025$), on obtient

$$N(z) = \frac{0.0942z + 0.2005}{z^2 - 1.0368z + 0.5022}$$

$$D(z) = \frac{0.8720z^2 - 1.0953z + 0.5896}{z^2 - 1.0368z + 0.5022}$$

La figure 5.2 compare la réponse fréquentielle du modèle $\hat{G}(z) = N(z)D(z)^{-1}$ avec celle du système G . La figure 5.3 démontre la convergence de l'algorithme 5.5. On constate qu'après 5 itérations de cet algorithme, $N(z)$ et $D(z)$ deviennent normalisés. Selon [5.13] la valeur de la borne $O_{gap}(\sigma_v, \theta^o)$ pour le gap entre G et \hat{G} dépend du γ et σ_v . Nous constatons que $2\sigma_v + \gamma = 2 \times 0.15 + 0.05 = 0.35$ est une borne pour l'erreur de modélisation obtenue $\delta(G, \hat{G}) = 0.2502$.

5.5. Conclusion

Nous avons présenté deux méthodes pour l'identification des facteurs premiers et normalisés d'un système. Dans la première méthode (section 5.2) l'erreur asymptotique dans le pire des cas de modélisation, exprimée en métrique de gap

ou ν -gap est bornée par $2\sigma_\nu + \gamma$. Le problème de l'identification est formulé en général comme un problème d'admissibilité non-convexe. La linéarisation des contraintes nous a permis de trouver itérativement une solution admissible pour le problème.

Dans la deuxième méthode nous avons étendu à la topologie \mathcal{H}_∞ l'algorithme à deux étapes de [HOF 95b] ce qui nous a permis d'identifier les facteurs (approximativement normalisés) du modèle et de minimiser une borne du gap ou le ν -gap entre le modèle \hat{G} et G . Une méthode est aussi présentée pour trouver une borne dans le pire des cas de l'erreur de modélisation. (suivant la stratégie 2.1).

Chapitre 6

Identification des modèles avec incertitude nonlinéaire ou variante dans le temps

Résumé : Dans ce chapitre nous présentons des algorithmes qui identifient un modèle linéaire d'ordre fixe d'un système qui possède une composante non-linéaire ou variante dans le temps bornée. La différence entre les approches étudiées dans ce chapitre et celles des chapitres précédents est que l'effet de l'opérateur Δ_{nl} n'est plus considéré dans le signal de perturbation $v(t)$. Ceci nous permet de trouver la meilleure approximation du système avec un modèle linéaire.

6.1. Introduction

Dans la section 2.1 et lors de la formulation du problème de l'identification des modèles avec des incertitudes LTI, nous avons supposé que le signal de perturbation $v(t)$ dans [2.1] contient l'effet de l'opérateur Δ_{nl} ainsi que le bruit $e(t)$ (voir 2.1). L'ensemble du modèle, \mathcal{G}_i dans [4.6] contient aussi un terme $\Delta_i(\vartheta^i)$ qui représente la dynamique linéaire et non-modélisée. Autrement dit, Δ_i représente une composante linéaire d'un élément \bar{G} dans l'ensemble des modèles qui ne peut pas être modélisée par $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$.

Nous supposons maintenant que les données expérimentales sont produites comme [2.1] avec $\|\Delta_{nl}\| \leq \gamma_{nl}$ et que le signal de perturbation $v(t)$ ne représente que l'effet du bruit $e(t)$. Nous supposons aussi que $\|v\|_\infty \leq \sigma_v$ avec σ_v donné. Nous définissons l'ensemble des modèles nonlinéaires et/ou variants dans le temps comme :

$$\mathcal{G} \triangleq \{\bar{G} \in \mathcal{B} \mid \bar{G} = \hat{G} + \Delta, \hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}, \Delta \in \mathcal{B}, \|\Delta\|_x \leq \gamma_{nl}\} \quad [6.1]$$

où \mathcal{B} est l'ensemble des systèmes (pas nécessairement linéaires) stables avec la norme l_1 bornée. La norme x est la norme induite soit l_1 soit l_2 (des systèmes).

Nous supposons que le vrai système, $G + \Delta_{nl}$ appartient à \mathcal{G} . L'opérateur Δ dans [6.1] représente une composante *linéaire ou nonlinéaire* d'un élément dans \mathcal{G} qui n'est pas représentée par $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$.

- Notre objectif est de présenter les algorithmes d'identification qui identifient un modèle non-falsifié, $\bar{G} \in S_N \cap \mathcal{G}$.

Notons qu'ici on n'identifie pas Δ mais qu'on le traite comme un opérateur dont la norme est bornée par une valeur connue γ_{nl} . Le point intéressant dans cette approche est que si une borne connue pour γ_{nl} n'est pas disponible on peut considérer γ_{nl} comme une variable et la minimiser.

L'erreur de modélisation entre \hat{G} et le vrai système $G + \Delta_{nl}$ est obtenue par :

$$\|(G + \Delta_{nl}) - \hat{G}\|_x \leq \|(G + \Delta_{nl}) - \bar{G}\|_x + \|\Delta\|_x \quad [6.2]$$

$$\leq \|(G + \Delta_{nl}) - \bar{G}\|_x + \gamma_{nl} \quad [6.3]$$

Malheureusement, puisque $G + \Delta_{nl}$ n'est pas linéaire, aucun résultat comme [2.22] concernant une borne pour l'erreur dans le pire des cas de $\|(G + \Delta_{nl}) - \bar{G}\|_x$ n'est pas disponible. Alors, notre problème d'identification dans ce chapitre est basé plutôt sur le concept d'identification des modèles non-falsifiés que sur l'identification robuste.

Nos méthodes d'identification sont basées sur l'application de certains résultats [KOS 97], [POO 94], [KHA 91a] qui imposent les contraintes convexes sur les signaux entrée-sortie d'un opérateur LTI ou NL/LTV pour garantir l'existence d'une borne connue pour cet opérateur. Nous présentons nos résultats dans les topologies l_1 et l_2 des systèmes.

6.2. Topologie l_1 -ind

Considérons une structure du modèle qui correspond à l'ensemble des modèles [6.1] :

$$y(t) = \hat{G}(\theta)u(t) + \Delta u(t) + \varepsilon(t) \quad [6.4]$$

avec $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$, $\Delta \in \mathcal{B}$, $\|\Delta\|_1 \leq \gamma_{nl}$ et $\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma_v$. Le problème d'identification défini dans la dernière section est équivalent à trouver un modèle \hat{G} dans

$\mathcal{RG}^{m,n}$ qui satisfait [6.4]. Comme ce problème n'est pas convexe, nous considérons d'abord une structure de modèle affine en les paramètres.

6.2.1. Structure de modèle affine en paramètres

Considérons la structure de modèle :

$$y(t) = \hat{G}(\theta)u(t) + \Delta \frac{F}{A(\theta_a)}u(t) + \frac{F}{A(\theta_a)}\varepsilon(t) \quad [6.5]$$

avec $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$, $F \in \mathcal{F}_n(\rho)$, $\rho < 1$, $\Delta \in \mathcal{B}$, $\|\Delta\|_1 \leq \gamma_{nl}$ and $\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma_v$.

L'objectif est de trouver un modèle, $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$ qui satisfait [6.5].

6.2.1.1. Synthèse

Les deux résultats suivants sont utilisés pour la construction de l'algorithme d'identification :

Théorème 6.21 [KHA 91a], [POO 94] Étant données $p_{[N]}$ et $q_{[N]}$, il existe un opérateur causal, stable et invariant dans le temps Δ avec $\|\Delta\|_1 < \gamma_{nl}$ tel que $p = \Delta q$ ssi :

$$\|p_{[i]}\|_\infty < \gamma_{nl}\|q_{[i]}\|_\infty \quad 1 \leq i \leq N \quad [6.6]$$

••

Le corollaire suivant donne une condition équivalente pour $\|\Delta\|_1 \leq \gamma_{nl}$.

Corollaire 6.1 [NAM 00b] Étant donné $p_{[N]}$ et $q_{[N]}$, il existe un opérateur causal, stable et invariant dans le temps Δ avec $\|\Delta\|_1 < \gamma_{nl}$ tel que $p = \Delta q$ ssi

$$|p(t)| \leq \gamma_{nl}\bar{q}(t) \quad 0 \leq t \leq N$$

où $\bar{q}(t)$ est une séquence non-décroissante et positive telle que :

$$\bar{q}(t) = \max_{0 \leq i \leq t \leq N} |q(i)|$$

••

En utilisant le résultat précédent, le problème d'identification d'un modèle, $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$ qui satisfait [6.5] est formulé comme :

Théorème 6.22 Étant données $u_{F[N]}$ et $y_{F[N]}$ obtenus par [3.17] le problème de l'identification de $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$ dans la topologie ℓ_1 qui satisfasse [6.5] peut être résolu via la solution d'un programme linéaire :

$$\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma_v \quad [6.7]$$

$$|y_{F[N]} + E_{[N]}\zeta| \leq \gamma_{nl}\bar{u} \quad [6.8]$$

avec $E_{[N]} = [-T_{u_F}^{[m]}, T_{y_1}^{[n]}, -I_{N+1}]$, $\bar{u}(t) = \max_{0 \leq i \leq t \leq N} |u(i)|$ et ζ défini comme :

$$\zeta = \begin{bmatrix} \theta_b \\ \theta_{a_1} \\ \varepsilon_{[N]} \end{bmatrix}$$

avec $\theta_{a_1} = [a_1, \dots, a_n]'$. La matrice T_{y_1} est obtenue comme : $T_{y_F} = [y_{F[N]}, T_{y_1}]$. ●●

Enfin, l'application du théorème 6.22 dans un algorithme itératif comme 3.2 a comme résultat l'identification d'un modèle $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$ qui satisfait [6.4]. L'analyse de la convergence de cet algorithme est exactement comme celle de l'algorithme 3.2.

6.3. Topologie l_2 -ind

Nous adoptons une structure de modèle comme [6.1] :

$$y(t) = \hat{G}(\theta)u(t) + \Delta u(t) + \varepsilon(t) \quad [6.9]$$

et notre objectif est d'identifier un modèle \hat{G} dans $\mathcal{RG}^{m,n}$ qui satisfait [6.9] avec $\|\Delta\|_2 \leq \gamma_{nl}$. Comme ce problème n'est pas convexe, on considère d'abord une structure du modèle affine en paramètres comme [6.5] et on identifie un modèle $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$ qui satisfait cette structure. Ensuite, via l'algorithme itératif 3.2, un modèle est identifié qui satisfait la structure de modèle [6.9] avec $\|\Delta\|_2 \leq \gamma_{nl}$.

Le théorème suivant impose les conditions sur l'entrée et la sortie d'un opérateur Δ pour que $\|\Delta\|_2 \leq \gamma_{nl}$.

Théorème 6.23 [POO 94] Étant donné les séquences $p_{[N]}$ et $q_{[N]}$, il existe un opérateur stable, causal et variant dans le temps avec $p(t) = \Delta q(t)$ tel que $\|\Delta\|_2 \leq \gamma_{nl}$ si et seulement si :

$$\|p_{[i]}\|_2 \leq \gamma_{nl} \|q_{[i]}\|_2, \text{ pour } 0 \leq i \leq N \quad [6.10]$$

••

Dans le résultat suivant, le problème de l'identification d'un modèle \hat{G} ayant une structure affine en les paramètres [6.5] est transformé en un problème d'admissibilité convexe.

Théorème 6.24 Étant donné $u_{F[N]}$ et $y_{F[N]}$, produits par [3.17], le problème de l'identification d'un modèle qui satisfasse [6.5] et dans la topologie l_2 , peut être résolu via la solution d'un problème d'admissibilité convexe comme :

$$\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma_v \quad [6.11]$$

$$\|y_{F[i]} + E_{[i]}\zeta\|_2 \leq \gamma_{nl} \|u_{[i]}\|_2, \text{ pour } 0 \leq i \leq N \quad [6.12]$$

avec $E = [-T_{u_F}^{[m]}, T_{y_1}^{[n]}, -I_{N+1}]$ et T_{y_1} défini dans le théorème 6.22.

••

Remarque 6.13 Ce problème d'admissibilité convexe est un *problème de cône du deuxième ordre (SOCP)*¹ qui peut être résolu par la méthode du point intérieur², [NES 94]. Ce problème peut être aussi exprimé comme un problème semi-défini (SDP). Cependant, cette formulation n'est pas numériquement efficace.

••

Le théorème 6.24 peut être appliqué dans un algorithme itératif comme 3.2 pour trouver un modèle $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$ qui satisfait [6.4].

¹Second Order Cone Problem

²Interior Point Method

6.4. Exemple

Supposons le système G et les données expérimentales obtenues dans des conditions indiquées dans l'exemple 3.5. Considérons maintenant un autre système décrit par :

$$G'(z) = \frac{0.0388z^3 + 0.0349z^2 + 0.0101z + 0.0009}{z^4 - 2.4z^3 + 2.4004z^2 - 1.0964z + 0.1825}$$

La Figure 6.1 compare les pôles et zéros de G et G' . Dans les mêmes conditions que dans l'exemple 3.5 on produit les données expérimentales par le système G' . Évidemment, la différence entre les données expérimentales est due à la variation ou au changement du système (de G à G'). Concernant l'ensemble des modèles \mathcal{G} défini dans [6.1] avec $x = l_1$, notre objectif est de trouver un élément dans cet ensemble qui ne soit pas falsifié par les données expérimentales obtenues par G et G' . Nous considérons deux cas :

1. $\hat{G}_1 \in \mathcal{RG}^{m,n}$, $n = 2$ et $m = 3$,
2. $\hat{G}_2 \in \mathcal{RG}^{m,n}$, $n = 4$ et $m = 4$,

Alors que l'opérateur Δ dans le cas 1. représente l'effet de l'incertitude LTI (due à la sous-estimation de l'ordre de G ou G' par \hat{G}) et l'effet de la variation de système (de G à G'), cet opérateur dans le cas 2 représente *seulement* l'effet de la variation du système (l'incertitude LTV).

Dans cet exemple on essaye de *minimiser* γ_{nl} . Par [6.3], ceci minimise la borne de l'erreur de modélisation. On applique itérativement l'algorithme d'optimisation du théorème 6.22 et on obtient

$$\hat{G}_1(z) = \frac{0.0525z^2 + 0.1264z + 0.0485}{z(z^2 - 1.3802z + 0.7479)}, \quad \gamma_{nl_1} = 0.7159$$

$$\hat{G}_2(z) = \frac{-0.0189z^3 + 0.2703z^2 - 0.3429z + 0.2393}{z^4 - 2.5991z^3 + 3.3345z^2 - 2.1664z + 0.6679}, \quad \gamma_{nl_2} = 0.602$$

Les Figures 6.2 et 6.3 montrent la comparaison entre la réponse fréquentielle de G , G' et celle des modèles \hat{G}_1 .

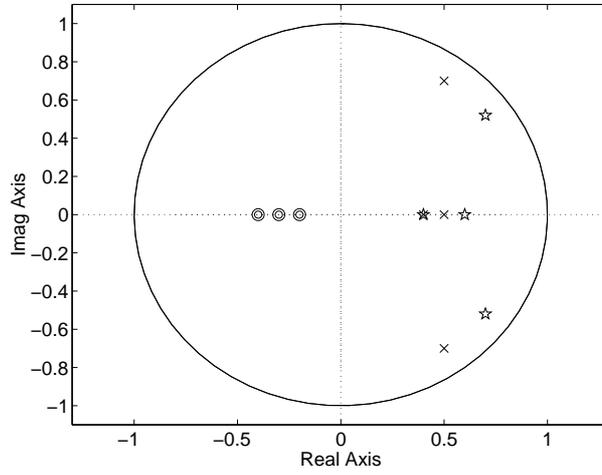


Figure 6.1. Pôles et zéros de G : (\times , o) et ceux de G' : (étoile, o)

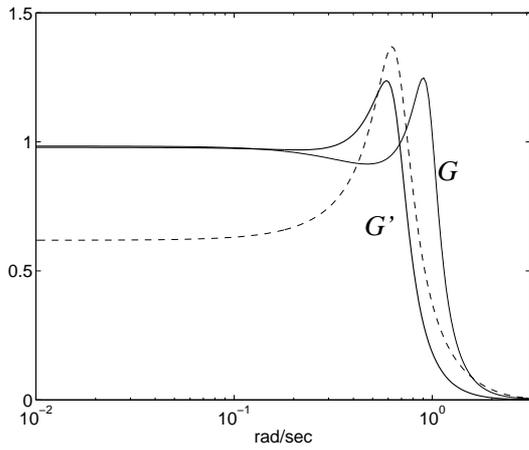


Figure 6.2. Comparaison entre la réponse fréquentielle de G : '—', G' : '---' (gras) et celle du modèle \hat{G}_1 : '—'.

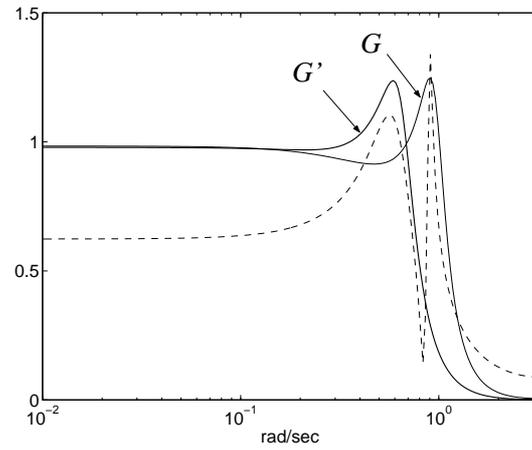


Figure 6.3. Comparaison entre la réponse fréquentielle de G : '—', G' : '---' (gras) et celle du modèle \hat{G}_2 : '—'.

6.5. Conclusion

On a étudié le problème de l'identification d'un modèle linéaire pour un système presque linéaire mais avec des nonlinéarités bornées. Néanmoins, l'effet de l'opérateur Δ_{nl} est exclu du signal de perturbation $v(t)$. Cette approche a l'avantage que si la valeur d'une borne pour γ_{nl} n'est pas *a priori* connue, on peut facilement transformer les problèmes d'admissibilité en problèmes d'optimisation et trouver une borne pour Δ_{nl} . Nous avons présenté les résultats pour les topologies l_1 et l_2 des systèmes. Le problème du calcul d'une borne dans le pire des cas pour $\|(G + \Delta_{nl}) - \hat{G}\|_1$ reste ouvert.

Chapitre 7

Identification en boucle fermée

Résumé : Nous étudions l'identification des systèmes en boucle fermée dans les topologies ℓ_1 et \mathcal{H}_∞ . L'objectif est d'identifier un modèle pour le système de telle manière que la distance entre les fonctions de sensibilité nominale et réelle soit minimale. Nous construisons les algorithmes optimaux suivant les stratégies 2.1 et 2.2. Les modèles identifiés servent à l'identification et la commande consécutive qui en découle.

7.1. Introduction

Supposons que l'objectif de commande est la minimisation de la norme d'une certaine fonction de sensibilité en boucle fermée ; celle ci induit un objectif pour l'identification :

Identifier un modèle de telle manière que *la distance entre les fonctions de sensibilité réelle et nominale* soit minimisée.

La formulation d'un tel problème d'identification est probablement présentée pour la première fois dans [SCH 92] et développée dans [GEV 93] et [HOF 95a] dans la topologie H_2 des systèmes. Voir aussi [LAN 97b] et [LAN 97a] pour une approche récursive dans cette topologie.

Sachant que la distance entre les fonctions de sensibilité réelle et nominale peut toujours être exprimée comme la distance entre le modèle nominal et le vrai système *pondérée* par certaines fonctions de transfert en boucle fermée (soit réelle soit nominale), l'identification en boucle fermée identifie les modèles plus précisément dans les fréquences qui sont plus importantes pour la commande.

Comme l'objectif de commande peut être exprimé dans plusieurs normes des systèmes, notre objectif dans ce chapitre est d'appliquer les stratégies d'identification développées dans les chapitres précédentes pour l'identification en boucle fermée des modèles dans les topologies ℓ_1 et \mathcal{H}_∞ .

7.2. Schéma itératif : Nécessité de l'identification en boucle fermée

Considérons l'espace de Banach des systèmes linéaires et causaux, muni d'une norme $\|\cdot\|$. Supposons que l'objectif de commande soit de trouver un correcteur stabilisant C pour minimiser une certaine métrique d'une fonction de sensibilité en boucle fermée, $\|S_{cl}(G, C)\|$. Comme le vrai système est inconnu cet objectif est transformé en la minimisation d'une norme de la fonction de sensibilité *nominale*, $\|S_{cl}(\hat{G}, C)\|$. Évidemment, on a [SCH 92]

$$\|S_{cl}(G, C)\| \leq \|S_{cl}(\hat{G}, C)\| + \|S_{cl}(G, C) - S_{cl}(\hat{G}, C)\| \quad [7.1]$$

Pour minimiser la borne de $\|S_{cl}(G, C)\|$, l'idée générale est de minimiser *itérativement* les deux termes de droite de [7.1]. On peut alors proposer l'algorithme itératif suivant :

Algorithme 7.7 .

Identification : Avec un correcteur C_{k-1} stabilisant le vrai système G , et en utilisant les signaux mesurés selon le schéma de la figure 5.1 avec $C = C_{k-1}$, on identifie un modèle \hat{G}_k tel que $\|S_{cl}(G, C_{k-1}) - S_{cl}(\hat{G}_k, C_{k-1})\|$ soit minimisée.

Commande : On réalise un nouveau correcteur C_k tel qu'une norme de la fonction de sensibilité *nominale* $\|S_{cl}(\hat{G}_k, C_k)\|$ soit minimisée.

••

Lorsque l'on minimise $\|S_{cl}(\hat{G}_k, C_k)\|$ dans l'étape de commande, on *dégrade* le résultat obtenu dans la phase d'identification, i.e. avec le *nouveau correcteur* C_k , la distance entre les fonctions de sensibilité nominale et réelle $\|S_{cl}(G, C_k) - S_{cl}(\hat{G}_k, C_k)\|$ n'est pas encore *minimale*. Ce point est un facteur important pour expliquer une possible divergence de ce schéma itératif.

Dans ce chapitre nous continuerons à utiliser la terminologie "méthode simultanée" et "méthode non-simultanée" pour qualifier des algorithmes similaires à ceux présentés dans les stratégies 2.1 et 2.2.

7.3. Méthode non-simultanée

Considérons la figure 5.1 et supposons que $r_1(t) = 0$. Supposons aussi que le correcteur C stabilise le vrai système en boucle fermée. Évidemment

$$y(t) = GS(G, C)r_2(t) + S(G, C)v(t) \quad [7.2]$$

où le signal de perturbation $v(t)$ est défini dans la section 2.1. Choisissons d'abord comme structure de modèle :

$$y(t) = \hat{S}_p(\theta)r_2(t) + \varepsilon(t, \theta) \quad [7.3]$$

avec $S_p = GS(G, C)$ et $\hat{S}_p = \hat{G}S(\hat{G}, C)$. Le modèle $\hat{G}(\theta)$ est supposé de la forme : $\hat{G}(z) = \frac{B}{A}$ avec $B \in \mathcal{P}_m$, $A(z) \in \mathcal{P}_n$ et monique.

Contrairement à l'étude en boucle ouverte, nous ne supposons pas que les zéros de $A(z)$ se trouvent dans le cercle unité.

[7.2] et [7.3] impliquent que

$$\varepsilon(t, \theta) = (S_p - \hat{S}_p(\theta))r_2(t) + S(G, C)v(t) \quad [7.4]$$

Nous adoptons la première étape de la stratégie 2.1 pour minimiser

$$\|(S_p - \hat{S}_p(\theta))W(r)\|$$

Ceci est réalisé via la minimisation d'une certaine norme du signal de résidu, $\varepsilon(t, \theta)$ (voir la stratégie 2.1). On constate aussi que l'erreur de la fonction de sensibilité en boucle fermée peut être exprimée comme [LAN 97b] :

$$S_p - \hat{S}_p(\theta) = S(G, C) \cdot (G - \hat{G}(\theta))S(\hat{G}(\theta), C) \quad [7.5]$$

ce qui montre que la minimisation de la distance additive entre les fonctions de sensibilité réelle et nominale est équivalente à minimiser l'erreur additive de modélisation $G - \hat{G}(\theta)$ pondérée par $S(G, C)$ et $S(\hat{G}, C)$. Puisque la minimisation de $\|\varepsilon(t, \theta)\|_x$ par rapport à θ et pour la structure de modèle [7.3] conduit à un problème d'optimisation non-convexe, comme dans les chapitres précédents, nous présentons les résultats pour une structure affine en les paramètres. Ensuite, via un algorithme itératif une solution pour le problème nonconvexe sera obtenue.

7.3.1. Structure affine en les paramètres

Nous considérons un correcteur défini par :

$$C(z) = \frac{R(z)}{L(z)} \quad [7.6]$$

avec $R \in \mathcal{P}_{n_R}$ et $L \in \mathcal{P}_{n_L}$ où :

$$R(z) = \sum_{k=0}^{n_R} r_k z^{-k} \quad [7.7]$$

$$L(z) = \sum_{k=0}^{n_L} l_k z^{-k} \quad [7.8]$$

La fonction de sensibilité \hat{S}_p est calculée comme :

$$\hat{S}_p = \frac{BL}{P}$$

où

$$P \triangleq AL + BR \quad [7.9]$$

est le polynôme (en z^{-1}) caractéristique en boucle fermée. On peut construire des contraintes convexes qui garantissent que les racines de $P(z^{-1})$ se trouvent à l'intérieur de cercle unité et que $P(z^{-1})$ soit monique. Plus précisément $P \in \mathcal{F}_{n_c}(\rho)$ avec $\rho < 1$ et

$$n_c \triangleq \max(nn_L, mn_R)$$

Supposons d'abord la structure affine en les paramètres comme :

$$y(t) = \hat{S}_p r_2(t) + \frac{F}{P} \varepsilon(t, \theta) \quad [7.10]$$

où F est un filtre fixe, stable et à minimum de phase. Noter que cette structure est équivalente à :

$$A(Ly_F(t)) - B(Lr_{2_F}(t) - Ry_F(t)) = \varepsilon(t, \theta) \quad [7.11]$$

où $y_F(t) = F^{-1}y(t)$ et $r_{2_F}(t) = F^{-1}r_2(t)$. Cette structure est isomorphe à la structure affine en les paramètres utilisée en boucle ouverte [3.1] par la transformation :

$$\underline{B.O.} \quad \underline{B.F.} \quad [7.12]$$

$$y(t) \longleftarrow Ly(t) \quad [7.13]$$

$$u(t) \longleftarrow Lr_2(t) - Ry(t) \quad [7.14]$$

L'application de l'algorithme 3.1 et le problème [4.2] avec ces transformations, conduisent à la minimisation de $\|\frac{P}{F}(S_p - \hat{S}_p)\chi_{r_2}(\omega)\|_\infty^1$ et $\|\frac{P}{F}(S_p - \hat{S}_p)r_2(t)\|_\infty^2$ où $\chi_{r_2}(\omega)$ est le facteur spectral de spectre de $r_2(t)$.

7.3.2. Algorithme itératif

Pour illustrer l'idée, nous expliquerons l'algorithme 3.1 adapté pour l'identification \mathcal{H}_∞ en boucle fermée :

Dans l'algorithme suivant on définit ϵ_j comme :

$$\epsilon_j \triangleq \|P^j(\theta) - P^{j-1}(\theta)\|_1 \cdot \|1/P^{j-1}(\theta)\|_1, \forall j \geq 1 \quad [7.15]$$

où $\epsilon_0 = \|P^0 - 1\|_1$.

Algorithme 7.8 .

1. Poser $j = 0$ et $F = 1$. Utiliser $u(t)$ et $r_2(t)$ et la structure [7.10] pour résoudre le problème d'optimisation du théorème 3.4 avec la transformation [7.12], ensuite calculer $A^j(z)$, $B^j(z)$ et $P^j(z)$. Poser $j = j + 1$.
2. Poser $F = P^{j-1}$ et construire $u_F(t)$ et $r_{2_F}(t)$ et résoudre le même problème d'optimisation en utilisant la structure [7.10] pour obtenir A^j et B^j , avec la contrainte supplémentaire :

$$\epsilon_j \leq \varsigma \cdot \epsilon_{j-1} \text{ for } j \geq 1 \quad [7.16]$$

avec

$$0 < \varsigma < \min(1, \epsilon_0^{-1}) \quad [7.17]$$

3. Si $\epsilon_0 \varsigma < \kappa$ pour un κ donné s'arrêter, sinon $j = j + 1$ et aller à l'étape 2.

••

Pour rendre $P \in \mathcal{F}_{n_c}(\rho)$ il faut placer les zéros de P dans \mathcal{D}_ρ avec $\rho < 1$. Dans la section suivante une condition suffisante est présentée pour atteindre cet objectif.

¹Avec l'hypothèse que $v(t)$ est indépendante de $r_2(t)$

²La première norme est en \mathcal{H}_∞ et la deuxième en l_∞

7.3.2.1. *Condition de stabilité*

Pour placer dans \mathcal{D}_ρ les pôles du polynôme caractéristique en boucle fermée du système P nous utilisons le résultat du théorème 4.14. Nous caractérisons \mathcal{D}_ρ avec $f_{\mathcal{D}}(z)$ défini par :

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} -\rho & z \\ \bar{z} & -\rho \end{bmatrix} < 0$$

alors selon le théorème 4.14, une condition suffisante pour que les pôles de P se trouvent dans \mathcal{D}_ρ est :

$$\begin{bmatrix} -\rho X & Y \\ Y' & -\rho X \end{bmatrix} < 0 \quad [7.18]$$

avec

$$Y = \left[\theta_P \mid \begin{array}{c} Q \\ 0 \end{array} \right], \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

où $Q \geq 0$ et θ_P est le vecteur des coefficients du polynôme P exprimé comme :

$$\theta_P = [T_R^{[m]}, T_L^{[n]}]\theta \triangleq T_{LR}\theta$$

T_R et T_L sont les matrices LT construites par les coefficients de R et de L .

Remarque 7.14 Comme un procédé réel possède un retard d'un échantillon au moins, dans le modèle \hat{G} on peut toujours considérer que $b_0 = 0$. Avec cette hypothèse et en sachant que A est monique, on peut vérifier que le polynôme caractéristique P sera monique.

••

7.3.2.2. *Convergence de l'algorithme 7.8*

Théorème 7.25 La séquence des modèles générée par l'algorithme 7.8, $\{\hat{G}^j\}$, converge vers un élément, \hat{G}^* tel que $\|(S_p - \hat{S}_p^*)\chi_u\|_\infty$ soit minimal.

••

La démonstration de ce théorème est comme celle du théorème 3.5.

Le tableau 7.1 montre les différents types d'objectifs dans l'identification en boucle fermée.

Transformation ↓ \ Topologie →	\mathcal{H}_∞	ℓ_1
Boucle ouverte ← Boucle fermée	Théorème 3.4	Problème [4.2]
$y(t) \longleftarrow Ly(t)$ $u(t) \longleftarrow Lr_2(t) - Ry(t)$	minimiser : $\ (S_p - \hat{S}_p(\theta))\mathcal{X}_{r_2}\ _\infty$	minimiser : $\ (S_p - \hat{S}_p(\theta))r_2\ _\infty$
$y(t) \longleftarrow -Ru(t)$ $u(t) \longleftarrow Lu(t) - Lr_2(t)$	$\ (S - \hat{S}(\theta))\mathcal{X}_{r_2}\ _\infty$	$\ (S - \hat{S}(\theta))r_2\ _\infty$
$y(t) \longleftarrow Ly(t) - Lr_1(t)$ $u(t) \longleftarrow -Ry(t)$	$\ (S - \hat{S}(\theta))\mathcal{X}_{r_1}\ _\infty$	$\ (S - \hat{S}(\theta))r_1\ _\infty$
$y(t) \longleftarrow -Ru(t)$ $u(t) \longleftarrow Lu(t) + Rr_1(t)$	$\ (S_u - \hat{S}_u(\theta))\mathcal{X}_{r_1}\ _\infty$	$\ (S_u - \hat{S}_u(\theta))r_1\ _\infty$

Tableau 7.1. Identification en boucle fermée : Méthode non-simultanée. $S_p = GS$, $S_u = CS$

7.4. Méthode simultanée : Identification de la fonction de sensibilité

Nous adoptons la stratégie 2.2 pour construire l'algorithme quasi-optimal présenté dans le théorème 2.1. Nous supposons que le correcteur C stabilise le vrai système. Considérer la figure 5.1 avec $r_1(t) = 0$ ce qui implique :

$$y(t) = S_p r_2(t) + Sv(t)$$

Le terme $Sv(t)$ est le signal de perturbation mesuré en sortie quand le signal de consigne $r_2(t)$ est nul. Nous supposons que $\|Sv\|_\infty \leq \sigma_v^{cl}$ et que la valeur de σ_v^{cl} est disponible.

Définissons un ensemble des modèles qui représente l'ensemble des fonctions de transfert en boucle fermée comme :

$$\mathcal{G}^{cl} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_p \mid \bar{S}_p = \hat{S}_p + \Delta; \hat{S}_p = \frac{\hat{G}}{1 + \hat{G}C}, \hat{G} = \frac{B}{A}, B \in \mathcal{P}_m, A \in \mathcal{P}_n \text{ et monique,} \\ P \in \mathcal{F}_{n_c}(\rho), \Delta \in \ell_1, \|\Delta\|_x \leq \gamma \end{array} \right\} \quad [7.19]$$

où P est le polynôme caractéristique défini dans [7.9]. La norme x est soit ℓ_1 soit \mathcal{H}_∞ . La construction de contraintes convexes, garantissant $P \in \mathcal{F}_{n_c}(\rho)$ est réalisable selon [7.18] et la remarque 7.14. Notons que contrairement au cas de la

boucle ouverte, il n'y a pas de contrainte sur les zéros de $A(z)$. Nous supposons aussi que le vrai système S_p appartient à \mathcal{G}^{cl} .

Définissons l'ensemble des fonctions de transfert en boucle fermée, non falsifiées jusqu'au temps N comme :

$$S_N^{cl} \triangleq \{\bar{S}_p \in \mathcal{G}^{cl} \mid \|\Pi_N(y(t) - \bar{S}_p r_2(t))\|_\infty \leq \sigma_v^{cl}\} \quad [7.20]$$

Comme dans le chapitre 2 on peut définir le diamètre de l'information par le diamètre du plus grand ensemble des fonctions de transfert en boucle fermée, $D(\mathcal{G}^{cl}, u, \sigma_v^{cl})$.

\mathcal{G}^{cl} peut être sous-divisé en $\mathcal{G}^{cl} = \cup_i \mathcal{G}_i^{cl}$, $\mathcal{G}_i^{cl} \subset \mathcal{G}_{i+1}^{cl}$ avec :

$$\mathcal{G}_i^{cl} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_p \mid \bar{S}_p = \hat{S}_p + \Delta_i; \hat{S}_p = \frac{\hat{G}}{1 + \hat{G}C}, \hat{G} = \frac{B}{A}, B \in \mathcal{P}_m, A \in \mathcal{P}_n \text{ et monic,} \\ P \in \mathcal{F}_{nc}(\rho), \Delta_i \in \mathcal{P}_i, \|\Delta_i\|_x \leq \gamma \end{array} \right\} \quad [7.21]$$

Puisque \mathcal{G}^{cl} et \mathcal{G}_i^{cl} sont compacts (on peut le démontrer comme dans [NAM 01b]), un algorithme quasi-optimal peut être construit qui identifie un modèle dans $S_N^{cl} \cap \mathcal{G}_{\underline{i}}^{cl}$ où \underline{i} est le plus petit i tel que $S_N^{cl} \cap \mathcal{G}_i^{cl}$ ne soit pas nul. Selon le théorème 2.1 l'erreur asymptotique dans le pire des cas de cet algorithme est bornée par le diamètre de l'information :

$$e_\infty(\phi, \mathcal{G}^{cl}, u, \sigma_v^{cl}) \leq D(\mathcal{G}^{cl}, u, \sigma_v^{cl})$$

Selon [7.18], \mathcal{G}^{cl} contient seulement les systèmes stables ($\mathcal{G}^{cl} \subset \ell_1$). De plus, selon la remarque 2.2 si le signal d'excitation contient toutes les séquences de 1 et -1 , alors :

$$D(\mathcal{G}^{cl}, u^o, \sigma_v^{cl}) \leq 2\sigma_v^{cl}$$

L'erreur additive entre les fonctions de sensibilité nominale et réelle est calculée comme :

$$\|S_p - \hat{S}_p\|_x \leq \|S_p - \bar{S}_p\|_x + \|\Delta_i\|_x \quad [7.22]$$

$$\leq e_\infty(\phi, \mathcal{G}^{cl}, u^o, \sigma_v^{cl}) + \gamma \quad [7.23]$$

$$\leq D(\mathcal{G}^{cl}, u^o, \sigma_v^{cl}) + \gamma \quad [7.24]$$

$$\leq 2\sigma_v^{cl} + \gamma \quad [7.25]$$

7.4.1. Structure de modèle affine en les paramètres

Pour trouver un élément dans $S_N \cap \mathcal{G}_i^{cl}$ nous considérons d'abord une structure du modèle affine dans les paramètres comme :

$$y(t) = (\hat{S}_p(\theta) + \frac{F}{P}\Delta_i(\vartheta_i))r_2(t) + \frac{F}{P}\varepsilon(t) \quad [7.26]$$

avec $\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma_v^{cl}$. Ici $F \in \mathcal{F}_{nc}(\rho)$ est un filtre fixe. Pour identifier θ et ϑ_i qui satisfassent [7.26] on peut la réécrire comme :

$$[Ly(t)] = \hat{G}(\theta)[Lr_2(t) - Ry(t)] + \frac{F}{A}\Delta_i r_2(t) + \frac{F}{A}\varepsilon(t) \quad [7.27]$$

Pour le cas \mathcal{H}_∞ si on compare [7.27] avec [3.16] on constate qu'on peut construire des contraintes similaires à celles indiquées dans le théorème 3.6 :

Théorème 7.26 Fixons i , n et m et supposons que $r_2(0) \neq 0$. Les contraintes suivantes caractérisent un problème d'admissibilité convexe qui identifie \hat{G} et $\Delta_i \in \mathcal{P}_i$ avec $\|\Delta_i\|_\infty \leq \gamma$ qui satisfont [7.26]. Ici $Q_i \geq 0 \in \mathcal{R}^{i \times i}$, $X \geq 0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ et $\zeta \in \mathcal{R}^{m+n+i+3}$ sont considérés comme les variables d'optimisation :

$$\begin{bmatrix} Q_i & A_i'Q_i & E_i W^{cl}\zeta & 0 \\ Q_i A_i & Q_i & 0 & Q_i e_i \\ \zeta' W^{cl} E_i' & 0 & 1 & e_N' W^{cl} \zeta \\ 0 & e_i' Q_i & \zeta' W^{cl} e_N & \gamma^2 \end{bmatrix} > 0 \quad [7.28]$$

$$\|\pi_3 V^{cl} \zeta\|_\infty \leq \sigma_v^{cl} \quad [7.29]$$

avec $W^{cl} \triangleq T_{r_2}^{-1} T_{uy}^{cl} V^{cl}$ et $T_{uy}^{cl} \triangleq [-T_{u_F}^{[m]}, T_{y_F}^{[n]}, -I_{N+1}]$ où $u_F^{cl}(t)$ et $y_F^{cl}(t)$ sont obtenus comme :

$$u_F^{cl}(t) = F^{-1}(Lr_2(t) - Ry(t)), \quad y_F^{cl}(t) = F^{-1}Ly(t)$$

Les colonnes de la matrice, $V^{cl} \in \mathcal{R}^{(N+m+n+3)(m+n+3i)}$ engendrent l'espace nul de $E_{N-i} T_{r_2}^{-1} T_{uy}^{cl}$. Les matrices A_i , E_i , E_{N-i} , e_i et e_N sont définies dans le théorème 3.6.

••

Pour trouver un élément dans $S_N^{cl} \cap \mathcal{G}_i^{cl}$ nous proposons un algorithme itératif :

7.4.2. Algorithme itératif

Dans cette section nous proposons un algorithme itératif, qui pour un i fixe, produit une séquence de modèles $\{\bar{S}_p^j\}$ qui converge vers un élément dans $S_N^{cl} \cap \mathcal{G}_i^{cl}$. Nous considérons une séquence $\{\epsilon_j\}$ produite comme dans [7.15].

Algorithme 7.9 .

1. Poser $j = 0$ et $F = 1$ et considérer l'ensemble des modèles \mathcal{G}_i^{cl} . Résoudre un problème d'admissibilité convexe conformément au théorème 7.26 et calculer ϵ_0 .
2. Poser $j = j + 1$ et $F = P^{j-1}$. Résoudre le problème d'admissibilité convexe du théorème 7.26 en imposant la contrainte supplémentaire [3.10]. Répéter l'étape 2 jusqu'à ce que $\epsilon_0 \varsigma^j \leq \kappa$, pour une précision κ donnée.

••

Théorème 7.27 Si chaque problème dans l'algorithme est admissible, alors $\{\bar{S}_p^j\}$ converge vers un élément dans $S_N^{cl} \cap \mathcal{G}_i^{cl}$.

••

La démonstration de ce théorème est exactement comme celle du théorème 3.7. Si un de ces problèmes d'admissibilité convexe n'a pas une solution, il faut augmenter soit ς , soit γ , soit σ_v^{cl} .

Remarque 7.15 Il est aussi possible de construire des algorithmes qui minimisent l'erreur multiplicative entre les fonctions de sensibilités nominale et réelle. Voir [NAM 00a] pour le cas où l'objectif de l'identification est de minimiser

$$\left\| \frac{S_u - \hat{S}_u}{S_u} \right\|_\infty \text{ avec } S_u = CS.$$

7.5. Réduction de l'ordre de correcteur

Plusieurs stratégies de commande robuste réalisent des correcteurs complexes, qui les rendent difficilement utilisables sur le procédé réel. La complexité des correcteurs robustes est souvent une conséquence de la complexité du modèle nominal ainsi que de l'existence des fonctions de pondérations utilisées pour garantir

la robustesse en stabilité et la performance. Il existe de nombreuses méthodes dans la littérature pour la réduction de l'ordre d'un correcteur, qui donnent des conditions suffisantes pour la conception d'un correcteur avec ordre réduit. Ce correcteur, s'il existe, peut préserver la performance nominale en boucle fermée [ZHO 96] et [GOD 94].

L'identification directe d'un correcteur d'ordre réduit en utilisant un algorithme récursif est présentée dans [LAN 00a] où on utilise des données expérimentales obtenues par l'opération du correcteur original avec le modèle \hat{G} . On identifie un correcteur d'ordre réduit \hat{C} tel que la distance (en norme H_2) entre les fonctions de sensibilité originale $S(\hat{G}, C)$ et réduite $S(\hat{G}, \hat{C})$ soit minimale. Pour assurer que \hat{C} peut aussi stabiliser le système G , on valide \hat{C} par le test de stabilité dual de Vinnicombe.

L'identification d'un correcteur d'ordre réduit peut aussi être réalisée dans la topologie \mathcal{H}_∞ en appliquant les deux stratégies d'identification en boucle fermée présentées dans les sections 7.3 et 7.4. Le problème peut être posé comme :

$$\begin{aligned} \min_{\hat{C}} & \|S_p(G, C) - S_p(\hat{G}, \hat{C})\|_\infty \\ \text{s.r. :} & \quad \hat{C} \text{ stabilise } \hat{G}. \end{aligned}$$

La stabilité de la boucle nominale \hat{G}, \hat{C} peut être garantie *a priori* par la contrainte [7.18]. Pour construire l'algorithme d'identification il suffit de se rappeler que \hat{C} est inconnu, et \hat{G} est connu. Ensuite échanger les rôles de \hat{C} et de \hat{G} dans les algorithmes [7.8] et [7.9].

7.6. Exemple

Étant donné le système G défini dans l'exemple 3.5 et un correcteur optimal C^3 (voir Annexe II) placé dans la boucle de contrôle de la figure 5.1, nous avons appliqué un signal SBPA d'amplitude 1 avec 6 registres comme le signal d'excitation $r_2(t)$. On ajoute un bruit $e(t) = v(t)$ avec $\|e\|_\infty = 0.0906$ tel que $\frac{\|v\|_\infty}{\|y\|_\infty} = 5.6\%$.

³Ce correcteur est réalisé à partir du modèle \hat{G} identifié en boucle ouverte dans la section 3.5

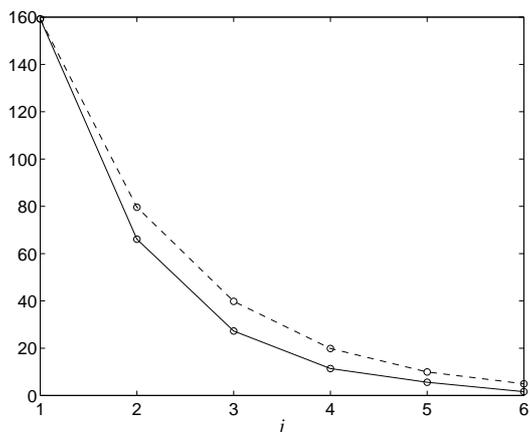


Figure 7.1. Convergence de l'algorithme 7.9, ϵ_j : '—' et $\zeta^{j-1}\epsilon_1$: '- -' avec $\zeta = 0.5$

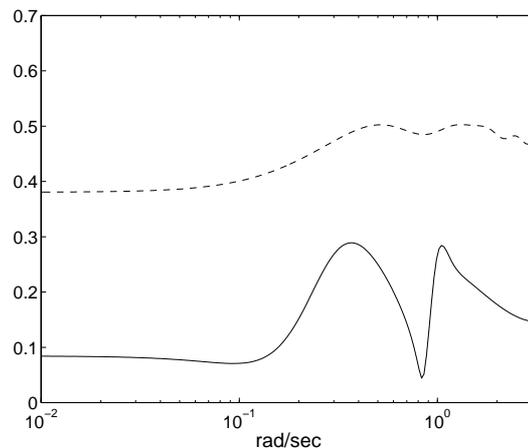


Figure 7.2. Erreur entre les fonctions de sensibilité. $|S_p(G, C) - S_p(\hat{G}_{cl}, C)|$: '—' et sa borne $2\sigma_v^{cl} + \gamma$: '- -'

Avec $N = 60$ nous avons appliqué la méthode simultanée de la section 7.4 pour identifier un modèle $\hat{G}_{cl} \in \mathcal{RG}^{m,n}$ avec $n = 2$ et $m = 3$. Nous avons considéré $\sigma_v^{cl} = 0.13$. Avec $\gamma = 0.1979$ le plus petit i tel que $S_N^{cl} \cap \mathcal{G}_i^{cl} \neq \emptyset$ est trouvé comme $\hat{i} = 12$. Avec $i = 12$, l'algorithme 7.9 s'arrête après $j = 6$ itérations. ($\epsilon_j = 1.62$). Nous avons trouvé alors

$$\hat{G}_{cl} = \frac{0.1136z^2 + 0.0772z + 0.3487}{z(z^2 - 0.8825z + 0.5957)}$$

La figure 7.1 montre la convergence de l'algorithme. La figure 7.2 montre l'erreur entre les fonctions de sensibilité réelle et nominale et sa borne selon [7.25].

D'après 7.5, $\|S_p(G, C) - \hat{S}_p(\hat{G}_{cl})\|_\infty = \|S(G, C)(G - \hat{G}_{cl})S(\hat{G}_{cl}, C)\|_\infty$. La figure 7.3 montre que le modèle identifié en boucle fermée est plus précis aux fréquences où $|S(G, C).S(\hat{G}_{cl}, C)|$ est grand.

7.7. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté des algorithmes qui identifient des modèles d'ordre fixe de telle manière que la distance en norme \mathcal{H}_∞ entre les fonctions de sensibilité nominale et réelle soit minimisée. *Le modèle nominal est stabilisé de*

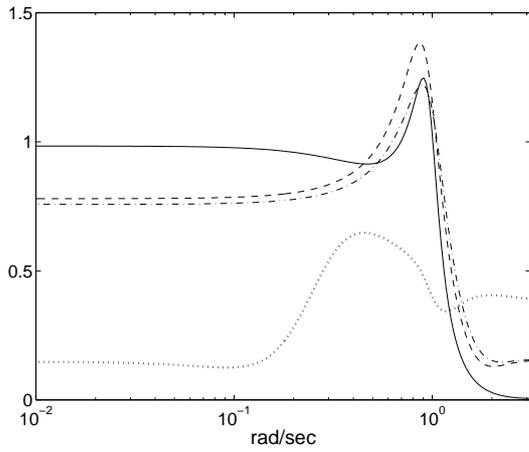


Figure 7.3. Réponse fréquentielle de G : '—' et celle du modèle identifié en boucle ouverte \hat{G} : '- -' et du modèle identifié en boucle fermée \hat{G}_{cl} : '· ·'. Fonction de pondération $0.2|S(G, C) \cdot S(\hat{G}_{cl}, C)|$: '· ·'

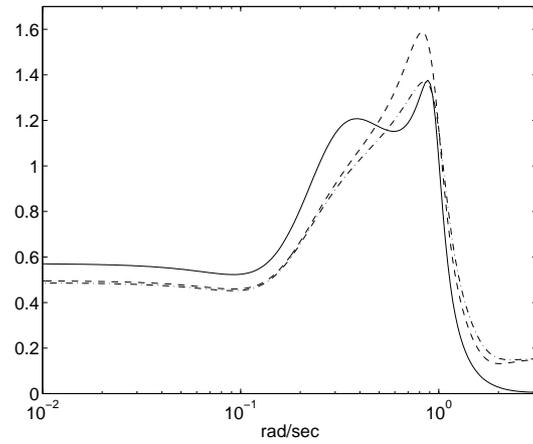


Figure 7.4. Différentes fonctions de sensibilité en boucle fermée. $S_P(G, C)$: '—'. $S_P(\hat{G}, C)$: '- -' et $S_P(\hat{G}_{cl}, C)$: '· ·'

façon garantie avec le correcteur. Les algorithmes présentés sont aussi applicables pour l'identification d'un correcteur d'ordre réduit qui stabilise aussi le modèle nominal.

Chapitre 8

Conclusion générale et perspectives

Nous avons présenté différents algorithmes quasi-optimaux permettant d'identifier des modèles rationnels d'ordre fixe, dans les topologies \mathcal{H}_∞ , ℓ_1 et de graphe. Dans le cas où l'effet de la nonlinéarité ou de la variation du système est incluse dans *le signal de perturbation* $v(t)$, les algorithmes quasi-optimaux donnent des bornes dans le pire des cas pour l'erreur entre le modèle identifié et la partie linéaire du vrai système. Nous avons démontré que si le signal d'entrée possède certaines propriétés d'optimalité, la distance entre le modèle identifié \hat{G} et la partie linéaire du système G , est bornée asymptotiquement par $2\sigma_v + \gamma$.

Si la valeur de γ , qui représente une borne pour la dynamique linéaire et non-modélisée, est considérée *a priori* connue alors le problème de l'identification est formulé par une séquence de problèmes *d'admissibilité* convexe. Néanmoins, dans le cas où γ n'est pas connu, on peut le considérer comme une variable d'optimisation et le minimiser. Dans ce cas, la valeur minimale γ^o est évidemment une fonction de σ_v et la borne dans le pire des cas $2\sigma_v + \gamma^o(\sigma_v)$ est ultérieurement une fonction de σ_v . Une méthode pour l'estimation de σ_v est d'évaluer la valeur de cette borne pour chaque σ_v et de choisir une valeur de σ_v minimisant cette borne [NAM 01a], [NAM 01b]. Un autre avantage de considérer γ comme une variable d'optimisation est que dans ce cas, le problème d'identification est formulé par une séquence des problèmes *d'optimisation* convexe. Par conséquent, l'existence d'une solution est garantie. La difficulté majeure de cette approche est que γ^o n'est pas nécessairement une valeur globalement optimale. Dans notre opinion, le choix de ς dans les algorithmes itératifs, est un facteur important pour obtenir une solution globalement optimale.

Nos méthodes sont particulièrement orientées vers l'identification des modèles non-affines en les paramètres. Les modèles identifiés par ces méthodes sont plus

précis et moins complexes que les modèles affines en les paramètres identifiés par les algorithmes classiques [NAM 01b]. Néanmoins, la résolution de tous les problèmes d'identification formulés dans cette thèse est basée sur la résolution des problèmes d'optimisation (ou d'admissibilité, quand γ est connu, *non-convexes*). Ces problèmes sont résolus via des algorithmes itératifs où un problème convexe est résolu à chaque itération. La convergence de ces algorithmes itératifs est garantie si chaque problème convexe est admissible.

Les modèles non-affines en les paramètres sont aussi utilisés par les algorithmes standard comme par exemple l'algorithme des moindres carrés. Ces algorithmes sont souvent analysés dans un environnement stochastique et possèdent des propriétés d'optimalité dans la topologie H_2 [LJU 87]. Néanmoins, dans les analyses stochastiques, pour établir certaines propriétés de convergence, il est nécessaire de considérer des hypothèses importantes sur le signal de perturbation et sur la dynamique non-modélisée. Par exemple, on suppose que le signal de perturbation est un bruit blanc ou qu'il est indépendant de signal d'entrée ou qu'il est quasi-stationnaire. Ces hypothèses ne sont pas satisfaites dans plusieurs problèmes pratiques [VEN 97]. C'est pour cette raison que l'algorithme des moindres carrés est loin d'être optimal dans le sens du pire des cas. On sait que par exemple l'erreur dans le pire des cas de cet algorithme augmente quand l'ordre du modèle augmente. Même si le nombre des données expérimentales augmente, l'erreur dans le pire des cas de cet algorithme peut augmenter [AKC 94], [GIA 97a]. De plus, dans les analyses stochastiques l'erreur de modèle est souvent quantifiée par un interval de confiance et avec des bornes probabilistes, tandis que l'analyse de stabilité et de performance nécessitent essentiellement des bornes déterministes pour l'erreur de modèle. Dans les méthodes présentées dans cette thèse (surtout la méthode non-simultanée), nous avons considéré la plus faible des hypothèses possibles sur le signal de perturbation et seulement une borne simple est supposée connue pour ce signal. Avec ces hypothèses pas très contraignantes, nous avons démontré que les algorithmes sont quasi-optimaux.

Dans le cas où l'effet de la nonlinéarité ou de la variation du système n'est pas incluse dans le signal de perturbation, nous avons présenté des algorithmes optimaux (chapitre 6) permettant d'identifier un modèle nominal linéaire de telle

manière que la distance (l_1 ou l_2) entre le modèle et le vrai système (nonlinéaire ou LTV) soit minimale.

Nous avons démontré que les algorithmes proposés sont aussi applicables à l'identification en boucle fermée où l'objectif est de minimiser la distance (l_1 , \mathcal{H}_∞) entre les fonctions de sensibilité réelle et nominale. Ces algorithmes sont également applicables pour l'identification d'un correcteur d'ordre réduit préservant la performance en boucle fermée de correcteur original.

Dans la topologie l_1 , la dualisation des problèmes d'identification (en dimension infinie) nous a permis d'obtenir plus d'information sur la structure de l'incertitude ainsi que de présenter une méthode pour corriger l'estimation de la borne du signal de perturbation. Plus particulièrement, nous avons démontré que dans le cas l_1 et sous certaines conditions sur les signaux expérimentaux, la dynamique (linéaire) non-modélisée peut être représentée par un FIR.

Les deux stratégies générales qui sont présentées pour résoudre le problème de l'identification et de la quantification des incertitudes peuvent être comparées de différents points de vue. Par exemple, dans la méthode non-simultanée, le nombre de variables d'optimisation est équivalent au nombre des paramètres dans le modèle \hat{G} . Dans la méthode simultanée nous avons souvent certaines variables d'optimisation supplémentaires. Donc, en général, pour identifier un modèle nominal, le temps de calcul pour la méthode non-simultanée est plus court que pour la méthode simultanée. Néanmoins, comme le calcul d'une borne de l'erreur de modèle dans la méthode simultanée est réalisé dans la même étape que l'identification du modèle nominal \hat{G} , la comparaison entre le temps de calcul final (le temps pour l'identification de \hat{G} et la quantification de l'incertitude du modèle) n'est pas facile pour les deux stratégies, i.e. chaque stratégie peut être plus efficace (de point de vue du temps de calcul) que l'autre dans un cas particulier.

Du point de vue des calculs numériques, les problèmes d'optimisation et d'admissibilité sont formulés soit par des LMI soit par des LP (ou de façon mixte). Bien que la solution par LMI nécessite plus de temps, la convergence de la méthode du point intérieur¹ est garantie. Néanmoins dans le cas LP, parfois la

¹Interior point method

convergence n'est pas établie. En effet, la méthode du simplexe [DAH 95] qui est souvent utilisée pour la résolution de LP, utilise un processus de pivotation² qui possède une complexité non polynômiale. La complexité et le temps de calcul pour les différents algorithmes proposés dépendent principalement du nombre des paramètres dans les modèles et du nombre des données expérimentales N .

8.1. Perspectives

- Pour \mathcal{G} comme un sous-ensemble de ℓ_1 , quand le signal d'entrée contient tous les séquences possible de -1 et 1, alors $D(u, \mathcal{G}, \sigma_v) \leq 2\sigma_v$. Évidemment, ce résultat est correct quand $N \rightarrow \infty$. L'étude sur l'estimation d'une borne pour le diamètre de l'information pour N fini ainsi que l'étude sur les signaux d'entrée optimaux, peuvent être des sujets de future recherches.
- Comme les méthodes présentées dans cette thèse minimisent souvent une borne supérieure de $\delta(G, \hat{G})$, une étude supplémentaire est nécessaire sur les méthodes fréquentielles minimisant directement le gap (l'écart) ou ν -gap entre le modèle et le système.
- Normalement, les données fréquentielles sont plus informatives que les données temporelles. En revanche, l'acquisition des données fréquentielles est plus difficile que les données temporelles. Donc, une approche fréquentielle-temporelle mixte semble être plus efficace. Étendre les algorithmes tels qu'ils puissent utiliser des données fréquentielles ou des données mixtes temporelles et fréquentielles, peut être un sujet de future recherche.
- Quand la valeur de γ n'est pas connue *a priori*, on essaie de minimiser la valeur de γ . Dans [NAM 01a] nous avons étudié les propriétés de $\gamma^o(\sigma_v)$. Une étude supplémentaire peut servir à trouver des nouvelles méthodes pour l'estimation de σ_v .
- Trouver une borne inférieure pour ς dans l'algorithme 3.3 garantissant l'admissibilité de tous les problèmes convexes dans les itérations. Dans le cas où la valeur de γ n'est pas connue *a priori*, cette étude peut servir à trouver la valeur globalement minimale pour γ .

²Pivoting

- Dans notre opinion, les résultats de base du chapitre 6 donnent les éléments nécessaires pour présenter des méthodes intéressantes pour l'identification des systèmes non linéaires. Par exemple, un système non linéaire peut être considéré comme une combinaison d'un système linéaire et d'opérateurs non linéaires bornés dans une certaine norme. Une méthode est d'identifier le modèle linéaire en minimisant les normes des opérateurs non linéaires. L'identification d'une telle structure de modèle est plus convenable pour la commande robuste que l'identification des *paramètres* éléments non linéaires réalisée par des méthodes de connaissance.
- Recherche sur la réduction de l'ordre du correcteur de telle manière que le correcteur réduit stabilise non seulement le modèle nominal mais tous les modèles qui se trouvent dans une région autour du modèle nominal.
- Étude sur la solution non conservative représentation d'état pour le problème de la commande l_1 .
- Recherche sur la résolution simultanée d'un problème d'identification et commande comme une alternative pour l'approche l'identification et commande consécutive. Formulation BMI³ du problème et étude de la complexité du problème.
- Étendre les résultats obtenus pour les systèmes multi-échantillonnés⁴.

³Bilinear Matrix Inequality

⁴Multirate systems

Annexe I

Identification et commande d'un système de transmission flexible

9.1. Introduction

La commande des systèmes mécaniques flexibles est principalement motivée par la nécessité d'un haut niveau de performance dans les applications comme l'industrie aérospatiale. L'identification et la commande d'un système de transmission flexible a été le sujet de nombreuses recherches dans les dernières années. [M'S 94], [LAN 95], [LAN 97c], [LAN 97b] et [LAN 00b]. Dans cette section nous présentons une méthode pour l'identification et la commande d'un système de transmission flexible. La méthode utilisée pour l'identification du système est basée sur les résultats obtenus dans la thèse. Nous adoptons une stratégie de commande robuste et multiobjectives pour satisfaire plusieurs critères de performance soit temporels soit fréquentiels. Plus précisément, nous résolvons un problème mixte l_1 - \mathcal{H}_∞ où l'objectif principal est de minimiser la norme l_1 de la fonction de transfert en sortie sous une contrainte \mathcal{H}_∞ sur la fonction de sensibilité en entrée.

9.2. Description du système

Le système de transmission flexible montré dans la figure 9.1, se compose de trois poulies, reliées par des ressorts. L'une d'entre elles est solidaire de l'axe d'un moteur électrique à courant continu. Le moteur est asservi en position par un asservissement analogique local (retour en vitesse et position). Le problème de commande est de positionner la troisième poulie en agissant sur la tension de

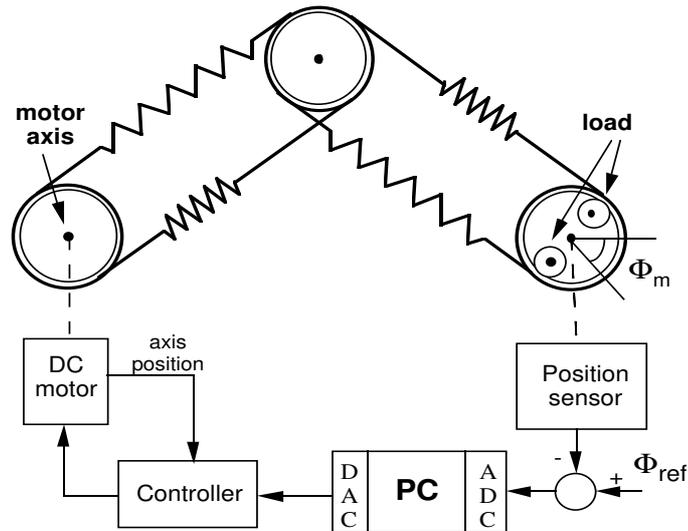


Figure 9.1. Schéma du système de transmission flexible

consigne de l'asservissement analogique du moteur. La sortie du procédé est la position analogique de la troisième poulie et la commande $u(t)$ est la tension de consigne d'asservissement. Les charges mécaniques peuvent faire varier l'inertie de la troisième poulie et par conséquent les modes naturels de vibration du procédé. Ce système présente deux modes de vibration très peu amortis dont les fréquences de résonance varient fortement avec les charges ajoutées sur la dernière poulie. Voir [KAR 97] pour la description supplémentaire du procédé.

9.3. Identification

Nous avons identifié trois modèles pour trois charges différentes :

NL : Sans charge (0%)

HL : Demi charge (50%)

FL : Pleine charge (100%)

Le signal d'entrée est une SBPA d'amplitude 0.2 et de période $256T_e$ (la période d'échantillonnage T_e étant de 50 ms). En appliquant la méthode non-simultanée de la section 4.2, les modèles du système pour les trois charges sont identifiés :

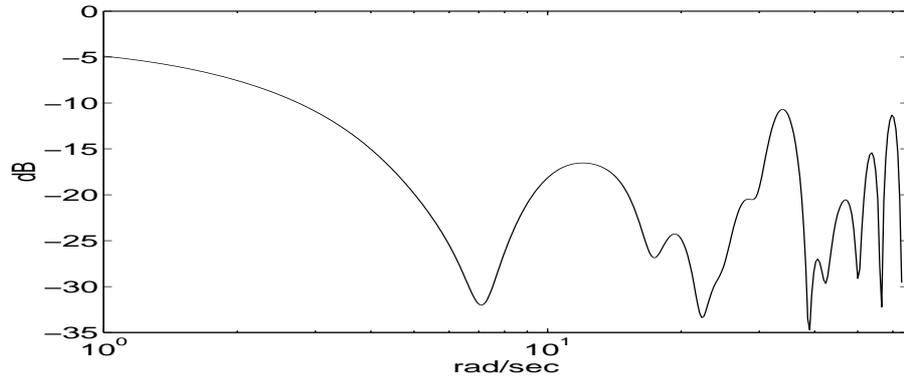


Figure 9.2. Erreur de modélisation (LTI) pour $\hat{G}_{NL}(z)$

$$\begin{aligned}\hat{G}_{NL}(z) &= \frac{0.3778z + 0.4619}{z^4 - 1.3943z^3 + 1.608z^2 - 1.3543z + 0.9618} \\ \hat{G}_{HL}(z) &= \frac{0.0683z^2 + 0.0575z + 0.1898}{z^4 - 1.9712z^3 + 2.2283z^2 - 1.944z + 0.9808} \\ \hat{G}_{FL}(z) &= \frac{0.1155z^3 - 0.0792z^2 + 0.2087z - 0.0918}{z(z^4 - 2.0873z^3 + 2.3381z^2 - 2.0513z + 0.9797)}\end{aligned}$$

Rappelons que pour l'identification d'un modèle nominal dans la première étape de cette stratégie, la connaissance de σ_v n'est pas nécessaire. Comme la bande passante du système sans charge est plus grande que celles des autres cas, sa stabilisation est aussi plus difficile. C'est pourquoi nous avons choisi le modèle identifié pour *le système sans charge*, $\hat{G}_{NL}(z)$ pour la conception d'un correcteur robuste.

Nous avons appliqué la deuxième étape de la stratégie 2.1 pour la quantification de l'incertitude LTI due à la sous-estimation de l'ordre de système par $\hat{G}_{NL}(z)$. La figure 9.2 montre la borne calculée pour l'incertitude LTI. Rappelons que $v(t) = \Delta_{nl}u(t) + e(t)$. Nous supposons que pour ce système la dynamique nonlinéaire est quasiment négligeable i.e. $\Delta_{nl} \approx 0$. Dans cette situation si le signal d'entrée est nul, le signal de sortie mesuré sera égal au signal de bruit $e(t)$. En pratique, quand $u(t) = 0$, la sortie mesurée est quasiment nulle. Par conséquent, pour le calcul de la borne de la figure 9.2, nous avons supposé $\sigma_v \approx 0$.

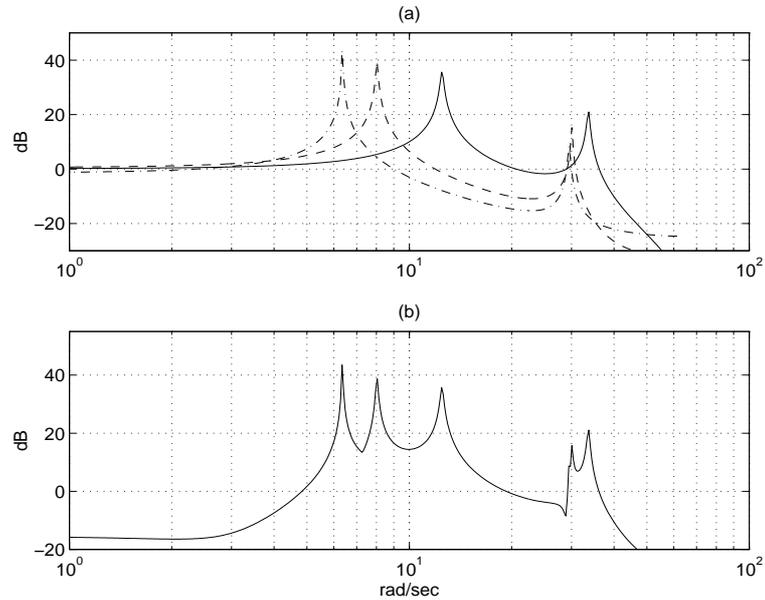


Figure 9.3. (a) : Réponse fréquentielle de $\hat{G}_{NL}(z)$: '--', $\hat{G}_{HL}(z)$: '- -' et $\hat{G}_{FL}(z)$: '- .'. (b) : Erreur due au changement de charge, $|E(\omega)|$.

La figure 9.3(a) montre les réponses fréquentielle de trois modèles identifiés. Pour quantifier l'erreur produite par le changement de charge nous avons calculé

$$E(\omega) = \max(|\hat{G}_{NL}(\omega) - \hat{G}_{HL}(\omega)|, |\hat{G}_{NL}(\omega) - \hat{G}_{FL}(\omega)|)$$

La figure 9.3(b) montre que la variation de charge produit une incertitude importante pour $\omega \in [6, 13]$ rad/sec. Cette incertitude est beaucoup plus importante que l'incertitude LTI (dynamique non-modélisée) montrée à la figure 9.2. Donc pour réaliser un correcteur robuste, il faut prendre en compte $E(\omega)$.

9.4. Commande multiobjectif

D'après la figure 5.1 si on considère $r_1(t)$ comme le signal de consigne ($r_2 = 0$), l'erreur de poursuite $y(t)$ s'écrit :

$$y(t) = S(G, C)r_1(t) + S(G, C)v(t)$$

On constate que pour minimiser l'effet du signal de la perturbation $v(t)$ ou du signal de consigne $r_1(t)$ dans le signal d'erreur $y(t)$, il faut minimiser une norme

de la fonction de sensibilité $S(G, C)$. Pour la conception du correcteur C nous avons minimisé la norme l_1 de la fonction de sensibilité nominale $\|S(\hat{G}_{NL}, C)\|_1$ pour les raisons suivantes :

- En minimisant $\|S(\hat{G}_{NL}, C)\|_1$ on minimise le gain dans le pire des cas entre $\|y\|_\infty$ et $\|r_1\|_\infty$ ou $\|v\|_\infty$. Si $r_1(t)$ et $v(t)$ appartiennent à l_∞ , seulement la minimisation de $\|S(\hat{G}_{NL}, C)\|_1$ garantit que ce gain soit minimal. Évidemment dans la topologie \mathcal{H}_∞ on doit supposer que le signal de consigne ou de perturbation soit borné en énergie (appartiennent à l_2).
- Sachant que

$$\|S(\hat{G}_{NL}, C)\|_2 \leq \|S(\hat{G}_{NL}, C)\|_\infty \leq \|S(\hat{G}_{NL}, C)\|_1$$

la minimisation d'une borne de $\|S(\hat{G}_{NL}, C)\|_1$ implique la minimisation d'une borne des autres normes mais la réciproque n'est pas correcte.

- Comme $\|S(\hat{G}_{NL}, C)\|_1 \leq (2n + 1)\|S(\hat{G}_{NL}, C)\|_\infty$ avec n le degré de S , on constate que pour des systèmes de grande complexité un correcteur optimal au sens \mathcal{H}_∞ est très loin de l'optimalité au sens l_1 .

9.4.1. Stabilité robuste

Nous supposons que le vrai système G appartient à l'ensemble des modèles $\mathcal{G} = \{G \in \ell_1 \mid G = \hat{G}_{NL} + \Delta_{nl}\}$ où

$$|\Delta_{nl}(\omega)| \leq |E(\omega)|, \omega \in [0, 65] \text{ rad/sec}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que le correcteur réalisé en utilisant le modèle $\hat{G}_{NL}(z)$ stabilise tous les modèles dans \mathcal{G} est que [ZHO 96], [YOU 95]

$$|S_u(\hat{G}_{NL}, C)(\omega)| \leq |E(\omega)^{-1}|, \omega \in [0, 65] \text{ rad/sec} \quad [9.1]$$

où $S_u(\hat{G}_{NL}, C)$ est la fonction de sensibilité en entrée ($S_u = CS$). Pour satisfaire la condition de stabilité robuste [9.1] et pour diminuer la complexité de correcteur, nous avons choisi une fonction de transfert plus simple que $|E(\omega)|$ (voir la figure 9.4)

$$W_E(z) = \frac{0.7631z^3 - 1.6373z^2 + 1.2117z - 0.2502}{z^3 - 1.2633z^2 - 0.3543z + 0.6216}$$

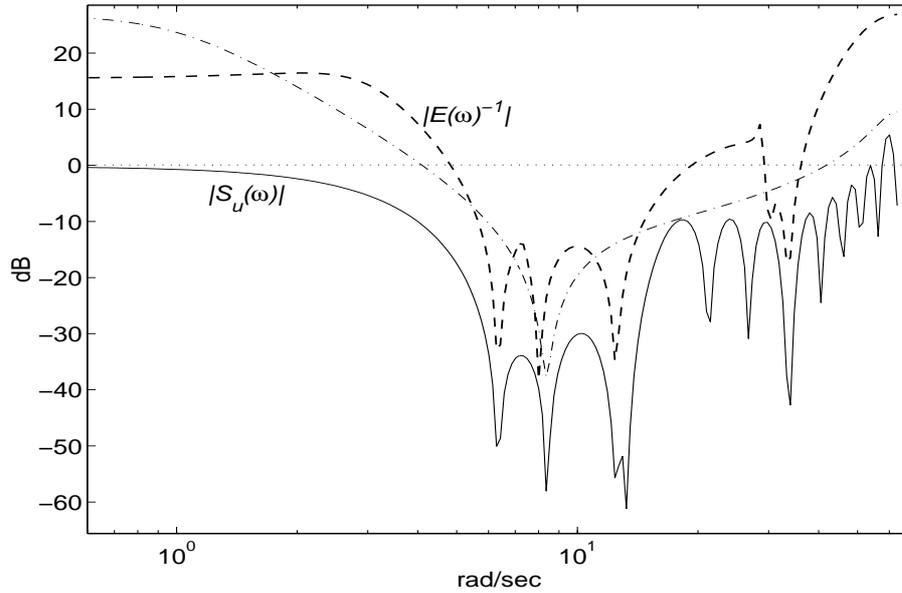


Figure 9.4. Fonction de sensibilité en entrée $|S_u(\hat{G}_{NL}, C)(\omega)|$: '-'. Borne pour la fonction de sensibilité en entrée, $|E(\omega)^{-1}|$: '- -'. Borne utilisée pour la conception du correcteur, $|W_E(\omega)|$: '- . -'

Pour satisfaire la condition [9.1] nous avons imposé la contrainte

$$|S_u(\hat{G}_{NL}, C)(\omega)| \leq |W_E(\omega)|, \omega \in [0, 65] \text{ rad/sec} \quad [9.2]$$

avec les contraintes supplémentaires :

$$|S_u(\hat{G}_{NL}, C)(6^{\text{rad/sec}})| \leq -30 \text{ dB} \quad [9.3]$$

$$|S_u(\hat{G}_{NL}, C)(7^{\text{rad/sec}})| \leq -30 \text{ dB} \quad [9.4]$$

$$|S_u(\hat{G}_{NL}, C)(8^{\text{rad/sec}})| \leq -30 \text{ dB} \quad [9.5]$$

$$|S_u(\hat{G}_{NL}, C)(10^{\text{rad/sec}})| \leq -10 \text{ dB} \quad [9.6]$$

9.4.2. Synthèse du correcteur

Nous avons considéré une structure FIR pour la fonction de sensibilité : $S(\hat{G}_{NL}, C) = \sum_{i=0}^n s_i z^{-i}$. Comme le modèle nominal $\hat{G}_{NL}(z)$ contient trois retards alors

$$s_i = 0, i = 1, 2 \quad [9.7]$$

$$s_1 = 1 \quad [9.8]$$

Le modèle \hat{G}_{NL} contient aussi un zéro instable en $z = -1.2226$ ce qui nécessite que

$$S(z = -1.2226) = 1 \quad [9.9]$$

Enfin pour inclure un intégrateur dans le correcteur on impose la contrainte

$$S(z = 1) = 1 \quad [9.10]$$

Les conditions [9.7], [9.9] et [9.10] sont souvent appelées [DAH 87], [DAH 95], [DIA 93], [ELI 97] les conditions d'interpolation ¹. Ces conditions doivent être obligatoirement imposées pour éviter la simplification entre les pôles et les zéros instables du modèle avec ceux du correcteur.

Pour assurer la condition [9.2] nous avons appliqué le lemme de BRL ² [ZHO 96]. Les conditions [9.2]-[9.6] sont aussi transformées au contraintes LMI [ELI 97].

En résumé nous avons résolu le problème suivant d'optimisation convexe (LMI) :

$$\begin{aligned} \min_C & \|S(\hat{G}_{NL}, C)\|_1 \\ \text{s.r. :} & [9.2] \cdots [9.10] \end{aligned}$$

Le correcteur final est calculé comme : $C(z) = \frac{R(z)}{L(z)}$ avec :

R(z)	0.1500	-0.1529	0.1349	-0.1014	0.1194	0.0169	0.0962	-0.0267
	0.0626	0.0313	0.0459	0.0328	0.0716	0.0904	0.0216	0.0599
	0.0154	0.0894	-0.0617	0.1185	-0.0116	0.1742	-0.1622	0.2015
	-0.2121	0.1740						
L(z)	1.0000	0.0000	-0.0000	-0.0567	-0.0905	-0.0155	0.0233	-0.0091
	-0.0455	-0.0466	-0.0608	-0.0741	-0.0656	-0.0417	-0.0281	-0.0319
	-0.0599	-0.0801	-0.0642	-0.0446	-0.0508	-0.0269	0.0292	0.0077
	-0.0841	-0.0836						

9.4.3. Évaluation de performance

La valeur optimale de $\|S(\hat{G}_{NL}, C)\|_1$ est égale à 2 ce qui implique que pour une perturbation d'amplitude 1, l'amplitude du signal de sortie ne dépasse pas 2.

¹Zero interpolation conditions

²Bounded Real Lemma

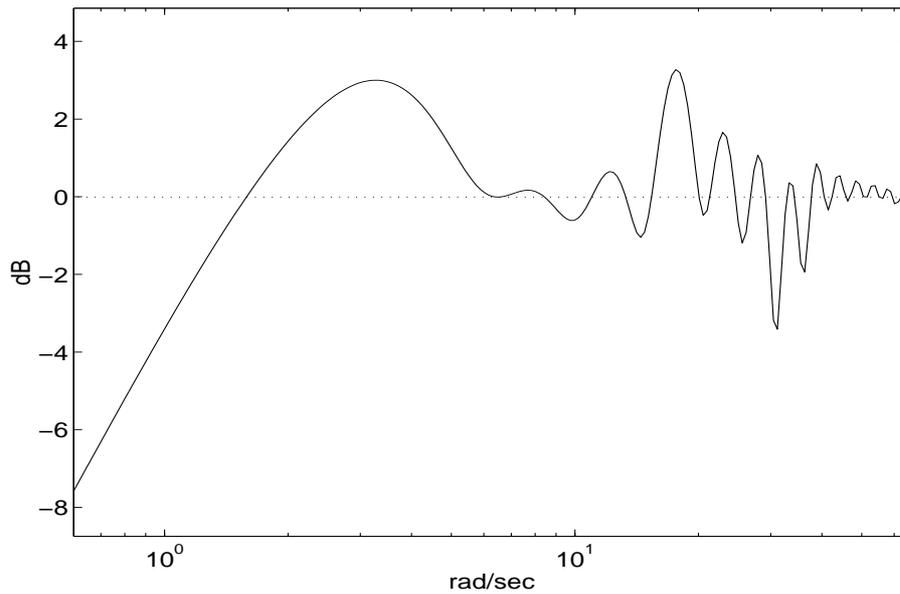


Figure 9.5. Réponse fréquentielle de la fonction de sensibilité nominale $S(\hat{G}_{NL}, C)$

Autrement dit, pour un signal de consigne d'amplitude 1, l'amplitude du signal de sortie est toujours inférieure à 2. D'après la figure 9.5 qui montre la réponse fréquentielle de la fonction de sensibilité nominale, la valeur de la marge de module vaut -3.5dB ce qui démontre que la boucle nominale peut tolérer une incertitude du type contre-réaction de moins de -3.5dB . La figure 9.4 montre que la réponse fréquentielle de la fonction de sensibilité en entrée est largement au-dessous de la borne $|E(\omega)|$ ce qui implique que la boucle nominale est robuste vis-à-vis du changement de charge.

Pour évaluer les performances du correcteur optimal en temps réel, nous avons appliqué un échelon d'amplitude 1 en consigne. Pour vérifier la robustesse de la boucle nominale vis-a-vis de l'incertitude LTI, nous avons comparé la sortie simulée avec la sortie mesurée. La figure 9.6 montre que les sorties sont presque identiques. Comme prévu, la sortie simulée est parfaitement amortie³ en 1.3 sec.

Pour évaluer la robustesse en performance de la boucle nominale vis-à-vis du changement de charge, nous avons appliqué un échelon en consigne pour trois charges différentes. Les figures 9.7 et 9.9 comparent les sorties mesurées. Pour

³Dead-beat

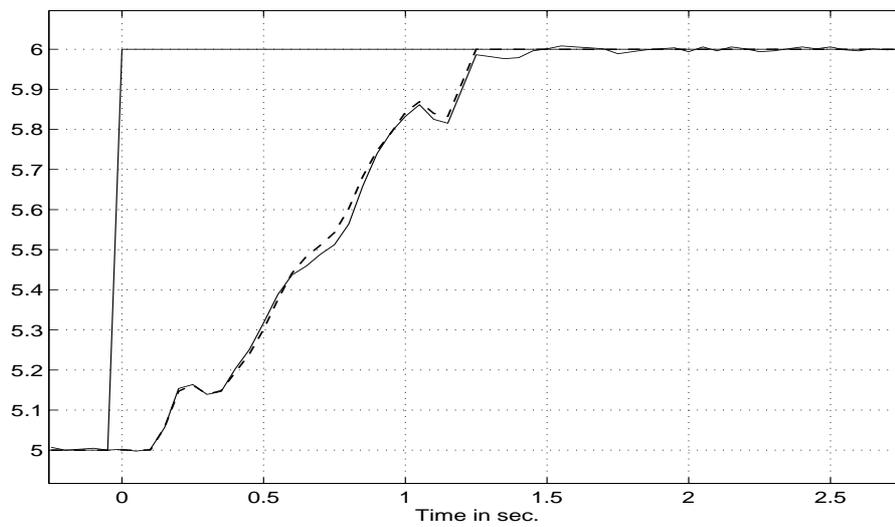


Figure 9.6. Robustesse vis-à-vis de l'incertitude LTI : Comparaison entre la sortie mesurée : '—' et la sortie simulée avec \hat{G}_{NL} et C : '- -'

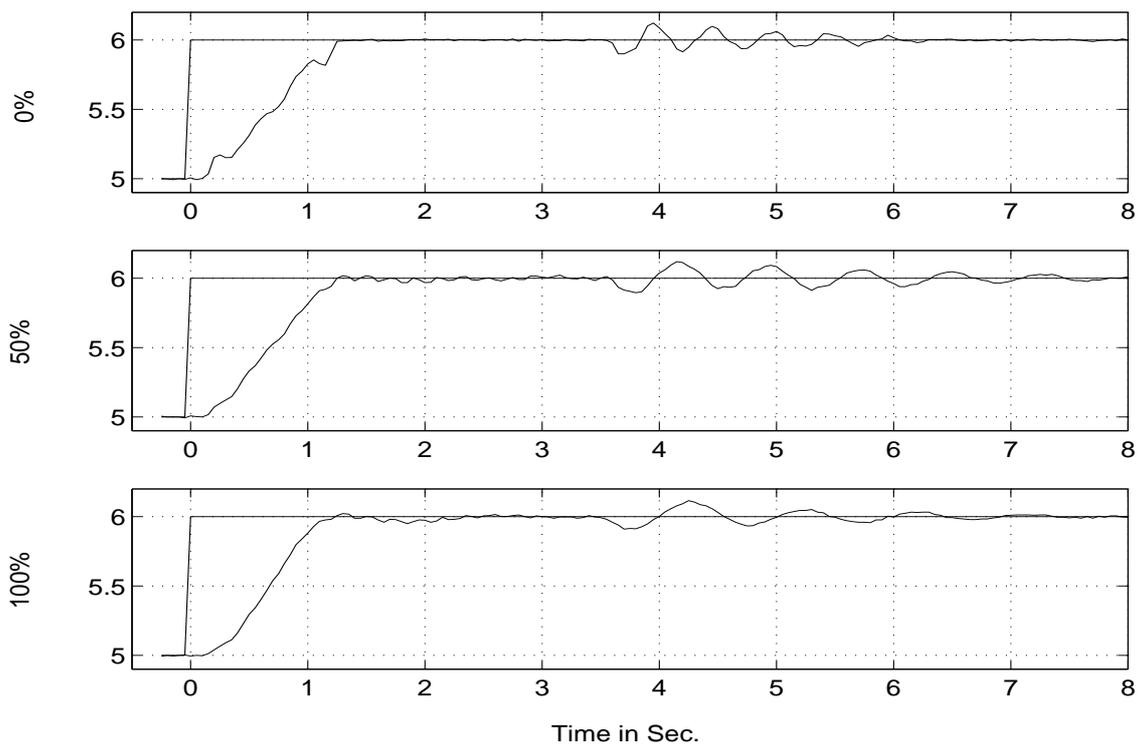


Figure 9.7. Robustesse vis-à-vis du changement de charge : Comparaison entre les signaux de sortie mesurés pour trois charges différentes/ Réponse du système à une impulsion sur la sortie, appliquée vers l'instant 3.5 sec.

	0 %	50 %	100 %
Temps de montée ⁴ (sec.) t_r	1.2	1.09	1
Temps d'établissement ⁵ t_s	1.22	1.2	1.8
Rejet de perturbation ⁶ t_{rej}	3	5.5	5.5
Dépassement ⁷	0	0.01	0.01

Tableau 9.1. *Performance du correcteur*

vérifier la performance du système pour le rejet de perturbation, nous avons appliqué une impulsion approximativement à l'instant 3.5 sec sur la sortie du système (en frappant sur la troisième poulie). La figure 9.7 montre que le délai pour le rejet d'une perturbation du type impulsion est relativement long. Sachant que la norme H_2 d'une fonction de transfert est égale à l'énergie de la réponse impulsionnelle de cette fonction, il est facile d'imposer une contrainte sur la norme H_2 de la fonction de sensibilité nominale $S(\hat{G}_{NL}, C)$ pour améliorer la réponse impulsionnelle du système en boucle fermée. A notre avis *l'amplitude* du signal de sortie doit être considérée comme un critère de performance.

9.4.3.1. *Changement de système*

Nous avons testé la performance du correcteur dans un autre système de transmission flexible (système 2) qui est moins souple que le système (système 1) utilisé pour la réalisation du correcteur. La figure 9.8 montre la comparaison entre les réponses fréquentielle des modèles identifiés pour chaque système. La figure 9.9 et le tableau 9.2 montrent la performance de correcteur testé avec le système 2. On constate de la figure 9.9 que pour le système 2, la perturbation est rejetée plus rapidement que dans le système 1.

La performance globale du correcteur sur le système 2 est calculée selon le critère :

$$\sum t_r + (\sum t_{rej})/1.2 + (\sum t_s)/1.4 = 8.64$$

Sans prendre en compte la complexité du correcteur, cette performance est meilleure que celles des autres correcteurs réalisés dans [LAN 95], [LAN 97c], [LAN 00b].

Les figures 9.10, 9.11 et 9.12 montrent une comparaison entre la performance du correcteur l_1 - \mathcal{H}_∞ avec celle d'un correcteur QFT réalisé par *Nordin et Gutman*

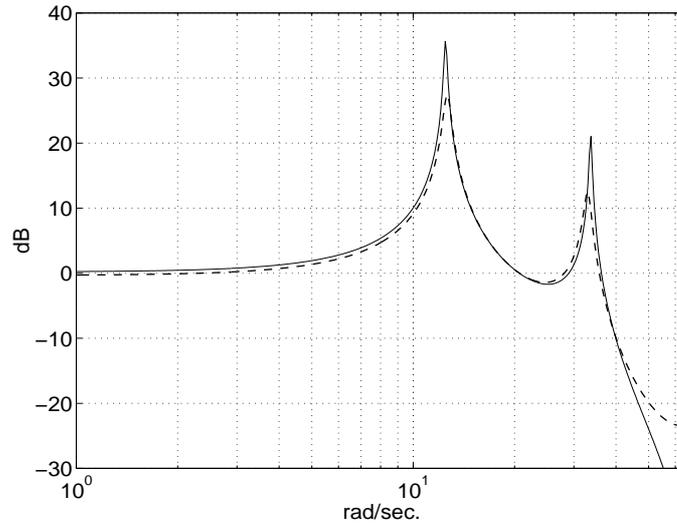


Figure 9.8. *Système de transmission flexible, Système 1 (utilisé pour la conception du correcteur : '—' et Système 2 : '- - -')*

	0 %	50 %	100 %
Temps de montée (sec.) t_r	1.15	1.05	1
Temps d'établissement t_s	1.2	1.2	1.07
Rejet de perturbation t_{rej}	1.45	1.05	1.05
Dépassement	0.03	0.04	0.04

Tableau 9.2. *Performance du correcteur sur le système 2*

(correcteur N) et d'un correcteur réalisé par une méthode de placement des pôles avec le calibrage de la fonction de sensibilité, (correcteur La), (*Langer et Constantinescu*) [LAN 00b]. Le correcteur N est en effet, le gagnant d'un benchmark sur le système de transmission flexible.

Cette expérience est menée sur le système 2. Évidemment, la condition du test pour le correcteur $l_1\text{-}\mathcal{H}_\infty$ était plus difficile, car ce correcteur a été réalisé à partir d'un modèle du système 1.

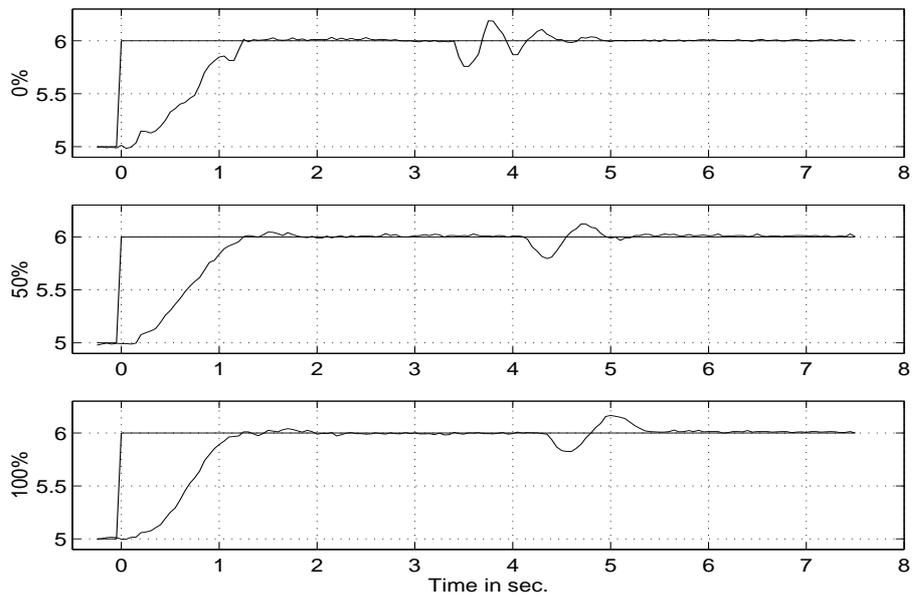


Figure 9.9. Robustesse vis-à-vis du changement du système : La performance du correcteur testée dans l'autre système de transmission souple.

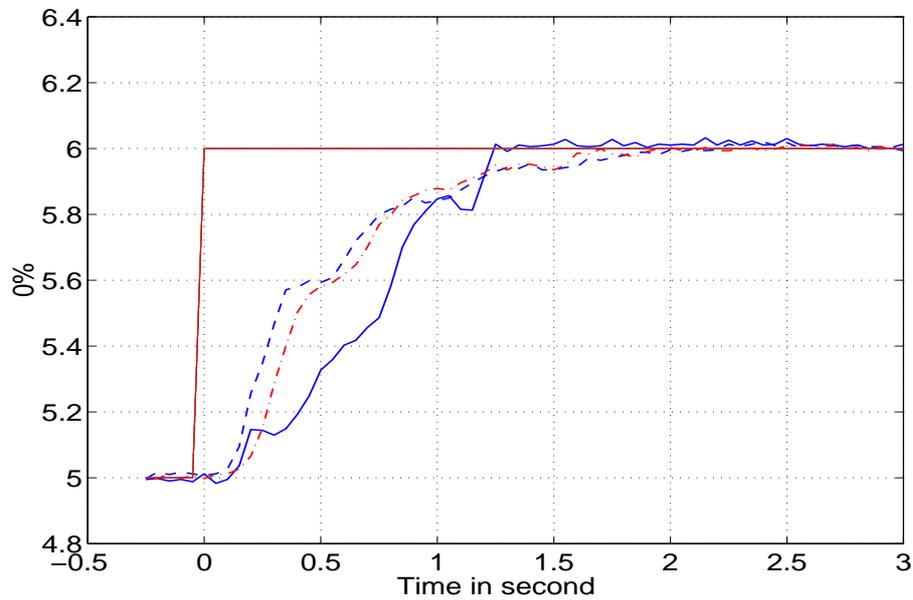


Figure 9.10. Réponse du système 2 sans charge à un échelon en présence de trois correcteurs : Correcteur $l_1\text{-}\mathcal{H}_\infty$: '—', Correcteur La : '- -' et Correcteur N : '- . -'

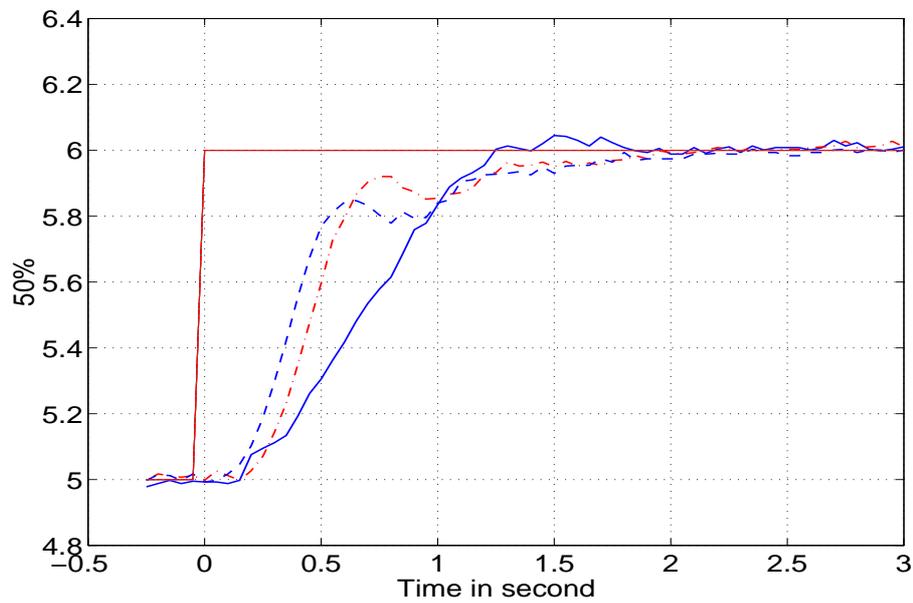


Figure 9.11. Réponse du système 2 en demi-charge à un échelon en présence de trois correcteurs : Correcteur $l_1\text{-}\mathcal{H}_\infty$: '—', Correcteur La : '- -' et Correcteur N : '- . -'

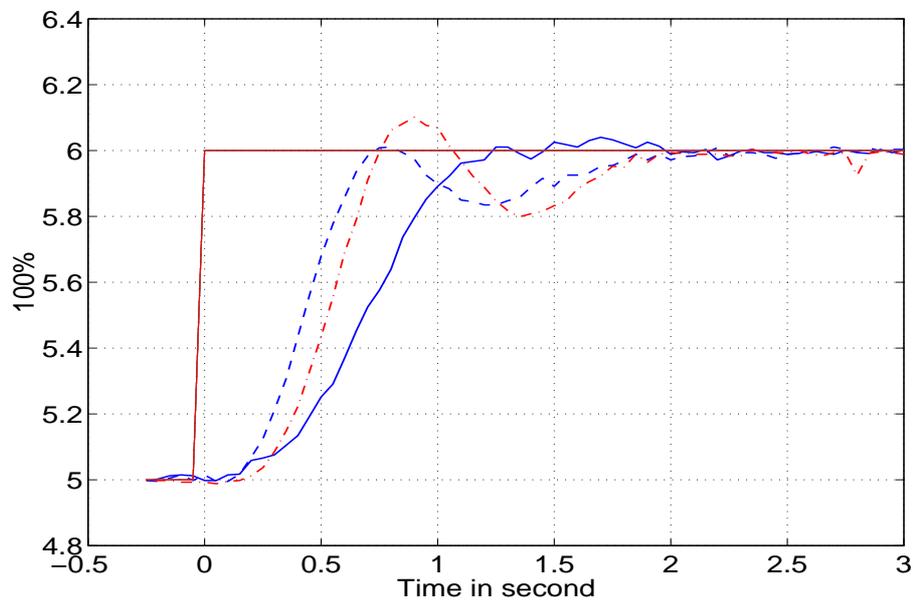


Figure 9.12. Réponse du système 2 en pleine charge à un échelon en présence de trois correcteurs : Correcteur $l_1\text{-}\mathcal{H}_\infty$: '—', Correcteur La : '- -' et Correcteur N : '- . -'

Annexe II

10.1. Preuves et Démonstrations

Dans les démonstrations suivantes, pour simplifier la notation la dépendance des modèles aux paramètres ne sera pas montrée.

Démonstration du théorème 3.5 : A partir des structures [3.8] et [2.1] on obtient :

$$\Phi_\varepsilon(\omega, \theta^j) = \left| \frac{A^j}{A^{j-1}} \right|^2 |G - \hat{G}^j|^2 \Phi_u(\omega) + \left| \frac{A^j}{A^{j-1}} \right|^2 \Phi_v(\omega) \quad [10.1]$$

qui implique :

$$\|\varepsilon(t, \theta^j)\|_s = \left\| \frac{A^j}{A^{j-1}} \cdot [(G - \hat{G}^j)\chi_u + \chi_v] \right\|_\infty^2 \quad [10.2]$$

On a aussi :

$$\|A^j - A^{j-1}\|_1 \leq \left\| \frac{A^j - A^{j-1}}{A^{j-1}} \right\|_1 \cdot \|A^{j-1}\|_1 \quad [10.3]$$

mais de [3.10] on peut déduire que [NAM 01b] : $\left\| \frac{A^j - A^{j-1}}{A^{j-1}} \right\|_1 \leq \epsilon_0 \varsigma^j$ qui avec [10.3] implique :

$$\|A^j - A^{j-1}\|_1 \leq \epsilon_0 \varsigma^j \|A^{j-1}\|_1$$

comme $A^{j-1} \in \mathcal{F}_n(\rho)$, sa norme l_1 est toujours bornée, alors :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|A^j - A^{j-1}\|_1 = 0$$

Comme la convergence des FIR dans la topologie ℓ_1 et \mathcal{H}_∞ est équivalente à la convergence de leurs coefficients, on déduit que $A^j \rightarrow A^{j-1}$ et que

$$\left\| \frac{A^{j-1}}{A^j} \right\|_1 \downarrow 1$$

Ceci avec [10.2] impliquent que :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varepsilon(t, \theta^j)\|_s = \|\varepsilon(t, \theta^o)\|_s = \|(G - \hat{G}(\theta^o))\chi_u + \chi_v\|_\infty^2$$

et que la minimisation de $\|\varepsilon(t, \theta)\|_s$ par rapport à θ implique la minimisation de $\|(G - \hat{G}(\theta))\chi_u\|_\infty$.

■

Démonstration du théorème 3.10 : L'inégalité $T'_p T_p \leq \gamma^2 T'_q T_q$ est équivalente à

$$T'_q T'_\Delta T_\Delta T_q \leq \gamma^2 T'_q T_q \quad [10.4]$$

Si $q(0) \neq 0$ (ce qui implique que T_q n'est pas singulier) alors [10.4] est équivalent à $T'_\Delta T_\Delta \leq \gamma^2$ ou $\bar{\sigma}(T_\Delta) \leq \gamma$. On définit $\bar{T}_\Delta \triangleq T_1 T_\Delta$ et on peut vérifier que $T_\Delta = T_1 \bar{T}_\Delta$. Évidemment $\bar{\sigma}(\bar{T}_\Delta) \leq \gamma$. Le reste de la démonstration est l'application de théorème AAK dans [ZHO 95]¹ et la substitution de \bar{T}_Δ par rapport au T_Δ en considérant le fait que $T'_1 T_1 = I$.

■

Démonstration du théorème 4.12 : Comme pour le théorème 3.5 on peut démontrer que :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varepsilon(t, \theta^j)\|_\infty = \|\varepsilon(t, \theta^o)\|_\infty = \|(G - \hat{G}(\theta^o))u + v\|_\infty$$

ce qui implique qu'à la limite la minimisation de $\|\varepsilon(t, \theta)\|_\infty$ par rapport à θ , minimise $\|(G - \hat{G})u\|_\infty$.

Définissons maintenant $w(t) = (G - \hat{G})u(t)$ ce qui implique $\|w\|_\infty \leq \|G - \hat{G}\|_1$. Supposons aussi que $G - \hat{G} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k}$ ce qui implique $w(t) = \sum_{k=-\infty}^t g_{t-k} u(k)$. Comme u contient toutes les séquences de 1 et -1 , il existe t tel que

$$\{u(k)\} = \{\text{sgn}(g_{t-k})\}, \quad -\infty < k \leq t$$

où

$$\text{sgn}(x) \triangleq \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

¹La définition de la transformation en z dans cette référence est telle que l'intérieur du cercle unité est la région stable

ceci implique :

$$w(t) = \sum_{k=-\infty}^t |g_{t-k}| = \|G - \hat{G}\|_1$$

on constate que pour un certain t , $\|w\|_\infty$ atteint sa borne supérieure et on obtient : $\|(G - \hat{G})u\|_\infty = \|G - \hat{G}\|_1$. Il est maintenant clair que la minimisation de $\varepsilon(t, \theta)$ par rapport à θ avec l'algorithme itératif minimise $\|G - \hat{G}(\theta)\|_1$. ■

Démonstration du théorème 5.20 : Si le signal d'entrée peut tester la stabilité et si l'ensemble des modèles $\tilde{\mathcal{G}}$ a les propriétés indiqués dans le théorème 2.1, l'application d'un algorithme quasi-optimal, ϕ^o comme [2.18] pour la structure du modèle [5.32], implique que l'erreur dans le pire des cas de l'identification est bornée par $2\sigma_v$ (voir la stratégie 2.1 et [2.18]) :

$$e_\infty(\phi^o, \tilde{\mathcal{G}}, u, \sigma_v) \leq 2\sigma_v$$

ce qui implique :

$$\delta\left(\begin{bmatrix} N_x - N(\theta^o) \\ D_x - D(\theta^o) \end{bmatrix}, \Delta_c(\vartheta^o)\right) \leq 2\sigma_v \quad [10.5]$$

alors :

$$\delta(G_x, \hat{G}(\theta^o)) \stackrel{[5.5]}{\leq} \left\| \begin{bmatrix} N_x - N(\theta^o) \\ D_x - D(\theta^o) \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad [10.6]$$

$$\stackrel{[5.4]}{\leq} \|\Delta_c(\vartheta^o)\|_\infty + \delta\left(\begin{bmatrix} N_x - N(\theta^o) \\ D_x - D(\theta^o) \end{bmatrix}, \Delta_c(\vartheta^o)\right) \quad [10.7]$$

$$\leq \|\Delta_c(\vartheta^o)\|_\infty + e_\infty(\phi^o, \tilde{\mathcal{G}}, u, \sigma_v) \quad [10.8]$$

$$\leq \|\Delta_c(\vartheta^o)\|_\infty + 2\sigma_v \quad [10.9]$$

■

10.2. Un exemple pour la conception d'un correcteur robuste \mathcal{H}_∞

Considérons la figure 5.1 où l'on suppose que le vrai système G appartient à l'ensemble des modèles incertains : $\{G \in \ell_1 \mid G = \hat{G} + W_u \Delta, \|\Delta\|_\infty \leq 1\}$ où \hat{G}

est un modèle nominal donné et w_u est un filtre connu et stable. Le problème de trouver un correcteur C qui minimise l'effet de $r_1(t)$ dans l'erreur de poursuite $y(t)$ peut être formulé comme :

$$\min_C \|W_f \frac{1}{1 + (\hat{G} + W_u \Delta)C}\|_\infty \quad [10.10]$$

$$\forall \Delta, \|\Delta\|_\infty \leq 1 \quad [10.11]$$

D'après les résultats de [YOU 95] on peut démontrer que le problème d'optimisation non-convexe suivant minimise une borne du problème [10.10] :

$$\min_{C,D} \|D^{-1}MD\|_\infty \quad [10.12]$$

où

$$M = \frac{1}{1 + \hat{G}C} \begin{bmatrix} -CW_u & CW_f \\ -W_u & W_f \end{bmatrix}$$

et $D = \text{diag}(\lambda, 1)$, $\lambda > 0$. Il est aussi démontré dans [DAH 95] que quand Δ est un opérateur LTV ou nonlinéaire avec $\|\Delta\|_2 \leq 1$ le problème [10.12] est équivalent à [10.10].

Le correcteur C dans l'exemple 7.6 est réalisé à partir de la solution du problème 10.12 avec la méthode basée sur la solution d'un problème du type LMI présenté dans [SCH 97], [CHI 96] et [BOY 94]. On utilise le modèle \hat{G} identifié dans la section 3.5.2 et

$$W_u(z) = \frac{0.3867z - 0.1467}{z - 0.3333}, \quad W_f(z) = 0.001 \frac{2.3z^2 + 4.7z + 2.3}{z^2 - 1.86z + 0.87}$$

Le choix de $W_u(z)$ correspond à la borne dans le pire des cas obtenu dans la section 3.5.2. Pour la valeur optimale de $\lambda = 1$ on trouve :

$$C(z) = \frac{0.176z^5 - 0.384z^4 - .0371z^3 - 0.186z^2 + .032z}{z^6 - 2.746z^5 + 3.215z^4 - 2.14z^3 + 0.746z^2 - 0.044z - 0.02}$$

Voir [BES 00] pour la conception d'un correcteur robuste pour un actionneur pneumatique (vérin).

Annexe III

Exemples pour la programmation linéaire et LMI

Tous les problèmes d'optimisation et d'admissibilité convexe qui sont formulés dans cette thèse peuvent être résolus par l'utilisation de la boîte à outils LMI de MATLAB [GAH] ou par la commande "linprog". Nous présentons ici deux exemples pour démontrer le principe générale de la programmation.

11.1. Exemple 1 : LMI

Considérons un problème d'admissibilité convexe similaire au celui du théorème 3.9. L'objectif est d'identifier un modèle $\hat{G} \in \mathcal{RG}^{m,n}$ et $\Delta \in \ell_1$ satisfaisant

$$y(t) = (\hat{G} + \frac{1}{A}\Delta)u(t) + \frac{1}{A}\varepsilon(t)$$

tel que $\|\Delta\|_\infty \leq \gamma$ et $\|\varepsilon\|_2 \leq \sigma$. Ce problème peut être formulé par les inégalités matricielles suivantes :

$$\|\varepsilon\|_2 \leq \sigma \quad [11.1]$$

$$\begin{bmatrix} \gamma^2 T_u' T_u & * \\ T_y T_A - T_u T_B - T_\varepsilon & I \end{bmatrix} > 0 \quad [11.2]$$

Les matrices (variables d'optimisations), $T_A, T_B, T_\varepsilon \in \mathcal{R}^{(N+1)(N+1)}$ sont des matrices LT construites à partir de $[a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0], [b_0, b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0], \varepsilon_{[N]} \in \mathcal{R}^{N+1}$, respectivement. $T_u, T_y \in \mathcal{R}^{(N+1)(N+1)}$ sont aussi les matrices LT construites à partir de $u_{[N]}, y_{[N]}$, respectivement.

Supposons que :

$$\text{um} \triangleq u_{[N]}$$

$$\text{ym} \triangleq y_{[N]}$$

$$\text{sig} \triangleq \sigma^2$$

$$\text{Tep} \triangleq T_\varepsilon$$

$$g \triangleq \gamma^2$$

Les matrices LT , T_u et T_y sont construites comme :

$$>\text{Tu} = \text{toeplitz}(\text{um}, [\text{um}(1), \text{zeros}(1, N)]);$$

$$>\text{Ty} = \text{toeplitz}(\text{um}, [\text{ym}(1), \text{zeros}(1, N)]);$$

Pour définir les variables d'optimisation, T_A , T_B et T_ε , il faut d'abord définir leurs structures [GAH]. Par exemple, les codes suivants définissent une structure Toeplitz pour T_A pour le cas $n = 2$:

$$>\text{setlms}([\]);$$

$$>\text{TA} = \text{lmivar}(3, \text{structA});$$

où structA est une matrice LT comme

$$\text{structA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \cdots & \\ & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

Pour définir T_B (avec $m = 2$) comme une variable d'optimisation on écrit :

$$>\text{TB} = \text{lmivar}(3, \text{structB});$$

avec

$$\text{structB} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & \cdots & \\ & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

Pour définir T_ε (avec $N = 10$) comme une variable d'optimisation on écrit :

$$>\text{Tep} = \text{lmivar}(3, \text{structep});$$

avec

$$\text{structep} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 0 & \cdots & 0 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & \cdots & \\ & & & & \vdots & \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

Il faut noter que chaque numéro dans structA, structB et structep correspond à une variable d'optimisation indépendante.

Après avoir défini les variables d'optimisation TA, TB et Tep, l'inégalité 11.2 est construite comme :

```
>lmiterm([-1 1 1 g], Tu, Tu');
>lmiterm([-1 1 2 TB], -Tu, 1);
>lmiterm([-1 1 2 TA], Ty, 1);
>lmiterm([-1 1 2 Tep], -1, 1);
>lmiterm([-1 2 2 0], 1);
```

On peut vérifier que l'inégalité 11.1 est équivalente à

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 & * \\ T_\varepsilon e_1 & I \end{bmatrix} \geq 0$$

avec $e_1 = [1, 0 \cdots 0]' \in \mathcal{R}^{N+1}$.

Cette inégalité est formulée comme :

```
>lmiterm([-2 1 1 0], sig);
>lmiterm([-2 2 1 Tep], 1, e1);
>lmiterm([-2 2 2 0], 1);
```

Après avoir construit toutes les contraintes, nous pouvons résoudre le problème d'admissibilité convexe par :

```
>lmisys=getlmis;
>[tmin,Txf]= feasp(lmisys, 1, [1,15,-1,5,0]);
```

où les valeurs optimales TAopt, TBopt et Tepopt peuvent être obtenues par :

```
>TAopt=dec2mat(lmisys,Txf,TA);
>TBopt=dec2mat(lmisys,Txf,TB);
>Tepopt=dec2mat(lmisys,Txf,Tep);
```

11.2. Exemple 2 : La programmation linéaire

Supposons que le modèle \hat{G} a une structure FIR comme $\hat{G} = \sum_{k=0}^m g_k z^{-k}$ avec $\theta = [g_0, \dots, g_m]$ et considérons aussi la structure du modèle suivante

$$y(t) = (\hat{G}(\theta) + \Delta_i(\vartheta^i))u(t) + \varepsilon(t) \quad [11.3]$$

avec $\|\varepsilon\|_\infty \leq \sigma$ et $\Delta_i = \sum_{k=0}^i \vartheta_k z^{-k}$. Considérons le problème primaire dans le théorème 4.13 qui identifie \hat{G} et Δ_i tel que [11.3] soit satisfait et que $\|\Delta_i\|_1$ soit minimal. Ce problème peut être formulé comme :

$$\min \gamma \quad [11.4]$$

$$\sum_{k=0}^i |\vartheta_k| \leq \gamma \quad [11.5]$$

$$y_{[N]} = T_u^m \theta + T_u^i \vartheta^i + \varepsilon_{[N]} \quad [11.6]$$

$$\|\varepsilon_{[N]}\|_\infty \leq \sigma_v \quad [11.7]$$

Ce problème d'optimisation est transformé en la forme standard de programmation linéaire comme :

$$\min \gamma \quad [11.8]$$

$$\sum_{k=0}^i \beta_k \leq \gamma \quad [11.9]$$

$$|\vartheta_k| \leq \beta_k, \forall k \quad [11.10]$$

$$\beta_k \geq 0 \quad [11.11]$$

$$y_{[N]} = T_u^m \theta + T_u^i \vartheta^i + \varepsilon_{[N]} \quad [11.12]$$

$$\|\varepsilon_{[N]}\|_\infty \leq \sigma_v \quad [11.13]$$

Définissons maintenant le vecteur des variables d'optimisation comme :

$$x \triangleq \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \\ \vartheta^i \\ \varepsilon_{[N]} \\ \theta \end{bmatrix}$$

ainsi que $e_i \triangleq [1, 1 \dots 1]' \in \mathcal{R}^i$ et $e_N \triangleq [1, 1 \dots 1]' \in \mathcal{R}^N$. L'inégalité [11.9] est équivalente à

$$[0, e'_i, 0, 0, 0]x \leq \gamma$$

L'inégalité [11.10] peut être représentée par :

$$[0, -I_i, I_i, 0, 0]x \leq 0$$

$$[0, -I_i, -I_i, 0, 0]x \leq 0$$

et l'inégalité [11.11] est évidemment équivalente à :

$$[0, -I_i, 0, 0, 0]x \leq 0$$

De plus, [11.13] peut être transformé en :

$$[0, 0, 0, I_N, 0]x \leq \sigma_v e_N$$

$$[0, 0, 0, -I_N, 0]x \leq \sigma_v e_N$$

Enfin, [11.12] est équivalent à :

$$[0, 0, T_u^i, I_N, T_u^m]x = y_{[N]}$$

La commande suivant calcule donc le vecteur optimal x_{opt} :

$$>x_{opt}=\text{linprog}(\text{fip},\text{Alp},\text{blp},\text{Aeq},\text{beq});$$

avec

$$\text{fip} \triangleq [1, 0, 0, 0, 0]' \in \mathcal{R}^{1+i+i+N+m}$$

$$\text{Alp} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & e'_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_i & I_i & 0 & 0 \\ 0 & -I_i & -I_i & 0 & 0 \\ 0 & -I_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_N & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{blp} \triangleq \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_v e_N \\ \sigma_v e_N \end{bmatrix}$$

et

$$\text{Aeq} \triangleq [0, 0, T_u^i, I_N, T_u^m]$$

$$\text{beq} = y_{[N]}$$

Index

- Algorithme itératif, 30, 96, 97, 99, 103, 110, 131
- Algorithme quasi-optimal, 23–25, 28, 30–32, 41, 44, 47, 60, 64, 83, 101, 102, 131
- Biais, 41, 59
- Commande multiobjectif, 118
- Commande robuste, 37, 104, 113, 115
- Compact, 23, 102, 131
- Convergence, 21, 23, 25, 28, 30, 36, 41, 42, 58, 59, 67, 80, 84, 90, 100, 106, 110–112, 129
- Diamètre d'information, 22–24, 31
- Erreur dans le pire des cas, 20–23, 110, 131
- Facteurs premiers, 73, 74
- Identification en H_∞ , 35
- Identification en l_1 , 57
- Identification en boucle fermée, 95, 96, 100, 111
- LMI, 35, 41, 64, 111, 121, 132
- Méthode non-simultanée, 52, 55, 110, 111
- Méthode simultanée, 31, 47, 55, 106, 111
- Métrique gap, 19, 73
- Métrique de Vinicombe, 78
- Modèle affine en les paramètres, 27, 38, 39, 45, 48, 58, 59, 64, 65, 89, 90, 103
- Modèle non-falsifié, 78
- Norme s , 27, 29, 39, 40
- Optimisation convexe, 30, 60, 67, 121
- Programmation linéaire, 27, 57, 59, 62
- Semi-définie, 40, 57, 91
- Signal de résidu, 32, 38–40, 62, 63, 69, 97
- Théorie de dualité, 57, 61
- Topologie \mathcal{H}_∞ , 29, 37, 39, 69, 81, 85, 105, 119
- Topologie l_1 , 69
- Topologie de graphe, 30

Sélection d'articles

- Namvar M., A. Besançon-Voda et I. D. Landau " Approaches in identification and model validation for robust control design ", proceedings of the 14th World conference of IFAC 99, China.
- Namvar M. et A. Besançon-Voda, "Approaches to control-oriented \mathcal{H}_∞ identification, proceedings of IFAC symposium on system identification, SYSID2000, Santa Barbara, June 2000.
- Namvar M. et A. Besançon-Voda, "A near-optimal algorithm for \mathcal{H}_∞ identification of fixed order rational models ", submitted to International Journal of Control, 2000.
- Namvar M. et A. Besançon-Voda, "Control-oriented l_1 identification", submitted to European Journal of Control, 2001.
- Besançon-Voda A. et M. Namvar, "Interaction entre l'identification et la commande- Chapitre 6" de "Identification des systèmes", édité par I. D. Landau and A. Besançon-Voda, Hermes, 2000, Paris.
- Namvar M. et A. Besançon-Voda, "LMI-based approaches to identification and uncertainty bounding", Rapport interne, 2000.

Bibliographie

Références

- [AKC 94] H. AKCAY ET H. HJALMARSON. The least-squares identification of FIR systems subject to worst-case noise. *Systems and Control Letters*, 24 :329–338, 1994.
- [BES 00] A. BESANÇON-VODA ET M. NAMVAR. *Interaction entre identification et commande, chapitre 6 dans "Identification des systèmes", édité par (I.D. Landau et A. Besançon-Voda)*. Hermes, Paris, 2000.
- [BOY 87] S. BOYD ET J. DOYLE. Comparison of peak and RMS gains for discrete-time systems. *Systems and Control Letters*, 9 :1–6, 1987.
- [BOY 94] S. BOYD, L. EL GHAOU, E. FERON ET V. BALAKRISHNAN. *Linear matrix inequality in system and control theory*. Siam studies in applied mathematics, 1994.
- [BOY 99] S. BOYD ET L. VANDENBERGHE. *Introduction to convex optimization with engineering applications*. Course reader, Stanford university, 1999.
- [CHE 95] J. CHEN, C. NETT ET M. FAN. Worst-case system identification in H_∞ : validation of a priori information, essentially optimal algorithms and error bounds. *IEEE Transactions on Automatic control*, 40(7) :1260–1265, July 1995.
- [CHI 96] M. CHILALI ET P. GAHINET. H_∞ design with pole placement constraints : An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic control*, 41(3) :358–367, March 1996.
- [DAH 87] M. DAHLEH ET J. PEARSON. ℓ_1 - optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 32(8) :314–322, April 1987.
- [DAH 95] M. DAHLEH ET I. DIAZ-BOBILLO. *Control of uncertain systems, a linear programming approach*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [DIA 93] I. DIAZ-BOBILLO ET M. DAHLEH. Minimization of the maximum pick-to-pick gain : The general multiblock problem. *IEEE Transactions on Automatic control*, 38(10) :1459–1482, October 1993.
- [DUG 80] L. DUGARD ET I. D. LANDAU. Recursive output error identification algorithms, Theory and evaluation. *Automatica*, 16 :443–462, 1980.
- [ELI 97] N. ELIA ET M. DAHLEH. Controller design with multiple objectives. *IEEE Transactions on Automatic control*, 42(5) :596–611, May 1997.
- [GAH] P. GAHINET, A. NEMIROVSKI, A. LAUB ET M. CHILALI. *LMI Control Toolbox, For use with MATLAB*. The MathWorks.

- [GAR 98] A. GARULLI, B. KACEWICZ, A. VICINO ET G. ZAPPA. Properties of conditional algorithms in restricted complexity set membership identification. *Proceedings of the 37th IEEE CDC, Florida*, pages 4452–4457, December 1998.
- [GEO 90] T. GEORGIU ET M. SMITH. Optimal robustness in the gap metric. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(6) :673–686, June 1990.
- [GEO 92] T. GEORGIU ET M. SMITH. Robust stabilization in the gap metric : Controller design for distributed plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(8) :1133–1143, August 1992.
- [GEV 92] M. GEVERS, G. GOODWIN ET B. NINNES. Quantifying the error in estimated transfer function with application to model order selection. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(7) :913–928, 1992.
- [GEV 93] M. GEVERS. Towards a joint design of identification and control. In *2nd European Control Conference (ECC 93)*, 1993.
- [GIA 97a] L. GIARRÉ ET M. MILANESE. Model quality evaluation in H_2 identification. *IEEE Transactions on Automatic control*, 42(5) :691–698, May 1997.
- [GIA 97b] L. GIARRÉ, M. MILANESE ET M. TARAGNA. H_∞ identification and model quality evaluation. *IEEE Transactions on Automatic control*, 42(2) :188–199, February 1997.
- [GOD 94] P. GODDARD ET K. GLOVER. Performance preserving frequency weighted controller approximation : a coprime factor approach. *Proceedings of the 33rd CDC, Florida*, December 1994.
- [GRE 95] M. GREEN ET D. LIMEBEER. *Linear robust control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [GU 92] G. GU ET P. KHARGONEKAR. Linear and nonlinear algorithms for identification in H_∞ with error bounds. *IEEE Transactions on Automatic control*, 37(7) :953–963, July 1992.
- [HAK 94] R. HAKVOORT. System identification for robust process control : Nominal models and error bounds. *PhD dissertation, Delf Univ. Tech.*, 1994.
- [HEL 91] A. HELMICKI, C. JACOBSON ET C. NETT. Control oriented system identification : A worst-case/deterministic approach in H_∞ . *IEEE Transactions on Automatic control*, 36(10) :1163–1176, October 1991.
- [HEU 95a] P. HEUBERGER, P. VAN DEN HOF ET O. BOSGRA. A generalized orthonormal basis for linear dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3) :451–465, March 1995.
- [HEU 95b] P. HEUBERGER, P. VAN DEN HOF ET O. BOSGRA. A generalized orthonormal basis for linear dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3) :451–465, March 1995.
- [HOF 95a] P. VAN DEN HOF ET R. SCHRAMA. Identification and control, closed-loop issues. *Automatica*, 31(12) :1751–1770, 1995.
- [HOF 95b] P. VAN DEN HOF, R. SCHRAMA, R. CALLAFON ET O. BOSGRA. Identification of normalized coprime plant factors from closed-loop experimental data. *European Journal of Control*, 2(1) :62–74, 1995.
- [JAC 92] C. JACOBSON, C. NETT ET J. PARTINGTON. Worst-case identification in l_1 : Optimal algorithms and error bounds. *Systems and Control Letters*, 19 :419–424, 1992.

- [KAR 97] A. KARIMI. *Conception des régulateurs numériques robustes et adaptatifs*. Thèse de doctorat, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, INPG, 1997.
- [KHA 91a] M. KHAMMASH ET J. PEARSON. Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(4) :398–412, April 1991.
- [KHA 91b] P. KHARGONEKAR ET M. ROTEA. Mixed H_2/H_∞ control : A convex optimization approach. *IEEE Transactions on Automatic control*, 36(7) :824–837, July 1991.
- [KHA 96] M. KHAMMASH. Synthesis of globally optimal controllers for robust performance to unstructured uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic control*, 41(2) :189–198, February 1996.
- [KHA 00] M. KHAMMASH. A new approach to the solution of the l_1 control problem : The scaled- q method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(2) :180–187, February 2000.
- [KOS 92] R. KOSUT, M. LAU ET S. BOYD. Set-membership identification of systems with parametric and non-parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic control*, 37 :929–941, 1992.
- [KOS 97] R. KOSUT ET B. ANDERSON. Uncertainty model unfalsification. *Proceeding of 36th IEEE CDC, San Diego, California*, pages 163–168, December 1997.
- [LAN 95] I.D. LANDAU, D. REY, A. KARIMI, A. VODA ET A. FRANCO. A flexible transmission system as a benchmark for robust digital control. *European Journal of Control*, 1 :77–96, 1995.
- [LAN 97a] I. LANDAU ET A. KARIMI. Recursive algorithms for identification in closed loop - a unified approach and evaluation. *Automatica*, 33(8), August 1997.
- [LAN 97b] I. D. LANDAU. *Adaptive Control*. Springer Verlag, London, 1997.
- [LAN 97c] I.D. LANDAU ET A. KARIMI. Robust digital control using pole placement with sensitivity function shaping method. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 7, 1997.
- [LAN 00a] I. LANDAU ET A. KARIMI. Direct closed loop identification of reduced order controllers. *Proceedings of IFAC symposium on system identification (Sysid2000), Santa Barbara*, June 2000.
- [LAN 00b] J. LANGER ET A. CONSTANTINESCU. Pole placement design using convex optimization criteria for the flexible transmission benchmark. *European Journal of Control*, 5(2-4) :193–207, 2000.
- [LJU 87] L. LJUNG. *System identification, Theory for user*. Prentice Hall, 1987.
- [LUE 69] D. LUENBERGER. *Optimization by vector space methods*. John Wiley and sons, Inc, 1969.
- [MAK 91] P. MAKILA. Robust identification and Galois sequences. *International Journal of Control*, 54(5) :1189–1200, 1991.
- [MAS 93] M.A. MASSOUMNIA ET R. KOSUT. A family of norms for system identification problems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 39(5) :1027–1031, 1993.
- [MIL 91] M. MILANESE ET A. VICINO. Optimal estimation theory for dynamic systems with set membership uncertainty : An overview. *Automatica*, 27(6) :997–1009, 1991.

- [MIL 95] M. MILANESE. Properties of least squares estimates in set membership identification. *Automatica*, 31(2) :327–332, 1995.
- [MIL 98] M. MILANESE ET M. TARAGNA. H_∞ identification of "soft" uncertainty models. *Systems and Control Letters*, (37) :217–228, 1998.
- [M'S 94] M. M'SAAD ET I. HEJDA. Adaptive control of a flexible transmission system. *Control Engineering Practice*, 2(4) :629–639, 1994.
- [NAM 99] M. NAMVAR, A. VODA ET I. LANDAU. Approaches to identification and model validation for robust control design. *Proceedings of 14th IFAC World Congress, China*, pages 307–312, June 1999.
- [NAM 00a] M. NAMVAR ET A. BESANÇON-VODA. Approaches to control-oriented H_∞ identification. *Proceedings of IFAC symposium on system identification (Sy-sid2000), Santa Barbara*, June 2000.
- [NAM 00b] M. NAMVAR ET A. BESANÇON-VODA. LMI-based approaches to identification and uncertainty bounding. *Internal report, Laboratoire d'Automatique de Grenoble*, (1), 2000.
- [NAM 01a] M. NAMVAR ET A. BESANÇON-VODA. Control oriented l_1 identification. *Submitted to European Journal of Control*, 2001.
- [NAM 01b] M. NAMVAR ET A. BESANÇON-VODA. A near-optimal algorithm for H_∞ identification of fixed order rational models. *Submitted to International Journal of Control*, 2001.
- [NES 94] Y. NESTEROV ET A. NEMIROVSKY. *Interior point polynomial methods in convex programming : Theory and applications*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [NEW 98] M.P. NEWLIN ET R.S. SMITH. A generalization of the structured singular value and its application to model validation. *IEEE Transactions on Automatic control*, 43(7) :901–907, July 1998.
- [POO 94] K. POOLLA, P. KHARGONEKAR, A. TIKKU, J. KRAUSE ET K. NAGPAL. A time domain approach to model validation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(5) :951–959, 1994.
- [SCH 92] R. SCHRAMA. Accurate identification for control, the necessity of an iterative scheme. *IEEE Transactions on Automatic control*, 37(7) :991–994, July 1992.
- [SCH 97] C. SCHERER, P. GAHINET ET M. CHILALI. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic control*, 42(7) :896–911, July 1997.
- [SMI 90] R. SMITH ET J. DOYLE. Towards a methodology for robust parameter identification. *Proceedings of American Control Conference*, 3 :2394–2399, 1990.
- [SMI 92a] R. SMITH. Model validation and parameter identification in H_∞ and l_1 . *Proceedings of American Control Conference*, pages 2852–2856, 1992.
- [SMI 92b] R. SMITH ET J. DOYLE. Model validation : a connection between robust control and identification. *IEEE Transactions on Automatic control*, 37(7) :942–952, July 1992.
- [STO 81] P. STOICA ET T. SÖDERSTRÖM. The Steiglitz-McBride identification algorithm Revisited-Convergence analysis and accuracy aspects. *IEEE Transactions on Automatic control*, 26(3) :712–717, June 1981.
- [TRA 88] J. TRAUB, G. WASILKOWSKI ET H. WAZNIAKOWSKI. *Information-based complexity*. Academic Press, 1988.

- [TSE 93] D. TSE, M. DAHLEH ET J. TSITSIKLIS. Optimal asymptotic identification under bounded disturbances. *IEEE Transactions on Automatic control*, 38(8) :1176–1190, August 1993.
- [VEN 97] S. VENKATESH ET M. DAHLEH. Identification in the presence of classes of unmodeled dynamics and noise. *IEEE Transactions on Automatic control*, 42(12) :1620–1635, December 1997.
- [VER 91] S. M. VERES ET J. P. NORTON. Structure selection for bounded-parameter models : Consistency conditions and selection criterion. *IEEE Transactions on Automatic control*, 36(4) :474–480, April 1991.
- [VID 84] M. VIDYASAGAR. The graph metric for unstable plants and robustness estimates for feedback stability. *IEEE Transactions on Automatic control*, 29(5) :403–418, May 1984.
- [VID 86] M. VIDYASAGAR. Optimal rejection of persistent bounded disturbances. *IEEE Transactions on Automatic control*, 31, June 1986.
- [VIN 93] G. VINNICOMBE. Frequency domain uncertainty and the graph topology. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(9) :1371–1383, September 1993.
- [WAH 94] B. WAHLBERG. System identification with Kautz models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(6) :1276–1281, 1994.
- [WAH 96] B. WAHLBERG ET P. MÄKILÄ. On approximation of stable linear systems using orthonormal functions. *Automatica*, 32(5), 1996.
- [WAL 96] E. WALTER ET H. PIET-LAHANIER. *Recursive robust minmax estimation, chapitre 12 : "Bounding approaches to system identification (M. Milanese, J. Norton, H. Piet-Lahanier et E. Walter)*. Plenum Press, New York and London, 1996.
- [WAL 97] E. WALTER ET L. PRONZATO. *Identification of parametric models from experimental data*. Springer-Verlag, London, 1997.
- [WAN 99] S. WANG, J. DAI ET M. TANAKA. A parametric approach for l_1 robust identification. *IEEE Transactions on Automatic control*, 44(6) :1282–1286, June 1999.
- [WHA 94] B. WHALBERG. System identification with Kautz models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(6) :1276–1281, 1994.
- [WHA 96] B. WHALBERG ET P. MÄKILÄ. On approximation of stable linear systems using orthonormal functions. *Automatica*, 32(5), 1996.
- [YAM 98] Y. YAMADA ET S. HARA. Global optimization for H_∞ control with constant diagonal scaling. *IEEE Transactions on Automatic control*, 43(2) :191–203, February 1998.
- [YOU 95] P. YOUNG ET M. DAHLEH. Robust l_p stability and performance. *Systems and control letters*, (26) :305–312, 1995.
- [ZHO 95] T. ZHOU ET H. KIMURA. Structure of model uncertainty for a weakly corrupted plant. *IEEE Transactions on Automatic control*, 40(4) :639–655, April 1995.
- [ZHO 96] K. ZHOU ET J. DOYLE. *Essentials in robust control*. Prentice Hall, 1996.
- [ZHO 97a] T. ZHOU. Model uncertainty in frequency domain response based system identification. *Systems and Control Letters*, (32) :121–133, 1997.
- [ZHO 97b] T. ZHOU. Unfalsified plant model parallelization from closed-loop experimental data. *Automatica*, 33(5) :805–820, 1997.