دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده مهندسی کامپیوتر

پایان‌نامه دکتری
گرایش نرم‌افزار

عنوان

بیشینه‌سازی سود فروشنده در بازارهای اجتماعی

نگارش
حمید مهینی

استاد راهنما
دکتر محمد قدسی

بهمن ۱۳۸۹

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده مهندسی کامپیوتر

رساله دکتری

بیشینه‌سازی سود فروشنده در بازارهای اجتماعی

نگارش: حمید مهینی

استاد راهنما: دکتر محمد قدسی	امضاء:
استاد ممتحن داخلی: دکتر حمید بیگی	امضاء:
استاد ممتحن داخلی: دکتر محمد علی صفری	امضاء:
استاد ممتحن خارجی: دکتر محسن بهرام‌گیری	امضاء:
استاد ممتحن خارجی: دکتر مهران سلیمان فلاح	امضاء:
استاد ممتحن خارجی: دکتر محمدرضا میبدی	امضاء:

سپاس‌گزاری

سپاس خداوند مهربان را که با لطف بی‌کران خود، مرا در این راه یاری داد.
در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمد قدسی، که همواره در طول تحصیل و تحقیق از راهنمایی‌های ارزنده‌شان استفاده کرده‌ام صمیمانه تشکر و قدردانی کنم.

هم‌چنین از دکتر سید وهاب میررکنی، دکتر محمدتقی حاجی آقایی، دکتر محمد علی صفری و دکتر نیکل ایمرلیکا [1] که در طول این رساله همواره از مشاوره‌های خوبشان استفاده کرده‌ام، کمال امتنان را دارم.

همین طور از دوستان خوبم مرتضی زادی‌مقدم، نیما حق‌پناه، افشین نیکزاد، شایان احسانی، نیما احمدی‌پور اناری، حامد قاسمیه، حسام الدین اخلاق‌پور و احمد خواجه‌نژاد که در طول این تحقیق همراه من بودند تشکر می‌نمایم.

در پایان، از پدر، مادر و همسر عزیزم که گرمی وجودشان در طول مدت تحصیل و تحقیق قوت قلبم بوده است، کمال قدردانی را دارم.

زمستان ۱۳۸۹

[1] Nicole Immorlica

چکیده

تمرکز اصلی این رساله طراحی سیاست‌گذاری‌های مختلف برای بیشینه‌سازی سود فروشنده در بازارهای اجتماعی مختلف است که نظر و رفتار افراد در آن تحت تأثیر دوستانشان است. در این رساله بازارهای اجتماعی مختلف با خواص متفاوت معرفی می‌شوند و مدل‌هایی برای تحلیل رفتار افراد ارائه می‌کنیم. در هریک از این مدل‌ها مسئله سیاست‌های قیمت‌گذاری مطالعه شده و الگوریتم‌های مختلفی برای فروشنده طراحی شده که سود خود را از فروش کالا بیشتر کند.

هم‌چنین به مطالعه بازارهای پیش‌بینی می‌پردازیم که افراد مختلفی با دیدگاه‌ها متفاوت در بازار حضور دارند. هر فرد با توجه به اطلاعات خود در بازار سرمایه‌گذاری می‌کند. مدلی از بازارهای پیش‌بینی ارائه می‌دهیم که قابل تحلیل و کاربردی باشد. هم‌چنین روش‌هایی ارائه می‌کنیم که مشخص کند صاحب بازار با چه افراد وارد مذاکره شود تا سودش بیشینه شود.

به طور خلاصه، این رساله به بررسی مسئله بیشینه‌سازی سود در این بازارها می‌پردازد: ۱) بازار با قیمت عمومی و خریداران نزدیک‌بین. ۲) بازاری که خریداران به صورت برخط وارد بازار می‌شوند و فروشنده باید به هرکدام یک قیمت پیشنهاد دهد. ۳) بازار با قیمت عمومی و خریداران هوشمند. ۴) بازار با قیمت عمومی و خریداران نیمه هوشمند. در این بازار خریداران اطلاعات کافی از بازار ندارند و ممکن است تصمیم خطادار بگیرند. ۵) بازارهای پیش‌بینی با یک زبان ساده برای سرمایه‌گذاری در بازار.

کلمات کلیدی: *الگوریتم، ، نظریه بازیها، بیشینه‌سازی سود، بازار، شبکه‌های اجتماعی، بهینه‌سازی*

فهرست

فهرست مطالب آ

فهرست شکل‌ها ت

فهرست جدول‌ها ج

۱ مقدمه ۱
۱.۱ قیمت‌گذاری در شبکه‌های اجتماعی ۳
۲.۱ بیشینه کردن سود در بازارهای پیش‌بینی ۶
۳.۱ بازی ساخت شبکه ۷

۲ پیشینه ریاضی و تعاریف اولیه ۸
۱.۲ نظریه بازی‌ها ۸
۱.۱.۲ نقطه تعادل نَش ۹
۲.۲ بازی‌های جمعیتی ۱۰
۱.۲.۲ بهترین پاسخ و نقطه تعادل نَش ۱۱
۳.۲ شبکه‌های اجتماعی ۱۱
۱.۳.۲ مدل خطی ۱۲
۲.۳.۲ مدل زیرپیمانه ۱۲
۳.۳.۲ مدل احتمالی ۱۳

۳ قیمت‌گذاری با قیمت عمومی ۱۵
۱.۳ مقدمه ۱۵
۱.۱.۳ نتایج بدست آمده ۱۸
۲.۱.۳ کارهای انجام شده توسط دیگران ۲۰
۲.۳ قیمت‌گذاری پایه ۲۲
۱.۲.۳ مدل قطعی ۲۲
۲.۲.۳ مدل احتمالی ۲۶
۳.۲.۳ نتایج تجربی بر روی شبکه‌های اجتماعی ۳۵
۳.۳ قیمت‌گذاری سریع ۳۷
۱.۳.۳ پیچیدگی مسئله ۳۸
۲.۳.۳ الگوریتم برای توزیع اولیه یکسان ۴۲
۴.۳ نتیجه‌گیری و کارهای آتی ۴۸

۴ بازارهای برخط ۵۰
۱.۴ مقدمه ۵۰
۱.۱.۴ نتایج بدست آمده ۵۲

۲.۴ قیمت یکتا ۵۳
۳.۴ قیمت‌های متفاوت ۵۷
۱.۳.۴ سختی مسئله برای مدل خطی غیرمتقارن ۵۷
۲.۳.۴ الگوریتم چندجمله‌ای برای مدل خطی متقارن ۵۸
۳.۳.۴ الگوریتم مکاشفه‌ای برای مدل خطی غیرمتقارن ۶۱
۴.۴ نتیجه‌گیری و کارهای آتی ۶۳

۵ بازار با افراد هوشمند ۶۴
۱.۵ مقدمه ۶۴
۱.۱.۵ نتایج بدست آمده ۶۷
۲.۱.۵ کارهای انجام شده توسط دیگران ۶۸
۲.۵ وجود نقطه تعادل ۶۹
۱.۲.۵ نقطه تعادل ۷۰
۲.۲.۵ نقطه تعادل خوش‌رفتار ۷۳
۳.۵ یکتایی نقطه تعادل ۷۵
۴.۵ بیشینه کردن سود فروشنده ۷۸
۱.۴.۵ مدل متقارن ۷۹
۲.۴.۵ مدل خطی ۸۱
۳.۴.۵ نتایج تجربی بر روی مدل متقارن ۸۴
۵.۵ مسئله پوشش مستطیلی ۸۷
۱.۵.۵ تابع محدب ۸۷
۲.۵.۵ تابع با مشتق محدود ۸۹
۳.۵.۵ پیش فرضهای در مورد تابع F ۹۲
۶.۵ نتیجه‌گیری و کارهای آتی ۹۳

۶ بازار با افراد هوشمند ولی بدون اطلاعات کامل ۹۴
۱.۶ مقدمه ۹۴
۱.۱.۶ نتایج بدست آمده ۹۸
۲.۱.۶ کارهای انجام شده توسط دیگران ۹۹
۲.۶ خواص بازار ۱۰۰
۱.۲.۶ بازی پتانسیلی کامل ۱۰۰
۲.۲.۶ حالت ایستای بازار ۱۰۱
۳.۶ رقابت بین شرکتها ۱۰۴
۱.۳.۶ بهترین پاسخ ۱۰۴
۲.۳.۶ نقطه تعادل نش ۱۰۸
۳.۳.۶ همگرایی ۱۱۱
۴.۳.۶ بازار یکنواخت ۱۱۲
۴.۶ نتیجه‌گیری و کارهای آتی ۱۱۴

۷ بازارهای پیش‌بینی : شرط‌بندی بر روی جایگشت ۱۱۵
۱.۷ مقدمه ۱۱۵
۱.۱.۷ شرط‌بندی روی جایگشت: ورودی به مسئله ۱۱۹
۲.۱.۷ نتایج بدست آمده ۱۲۱
۳.۱.۷ کارهای انجام شده توسط دیگران ۱۲۱
۲.۷ زبان شرط‌بندی زیرمجموعه‌ای با شرطهای غیر قابل قسمت ۱۲۳
۳.۷ زبان شرط‌بندی یگانه ۱۲۵

۱.۳.۷ بررسی مسئله وجود سود ۱۲۸
۲.۳.۷ بررسی مسئله بیشینه کردن سود ۱۳۲
۳.۳.۷ مسئله بیشینه کردن سود با اطلاعات اضافی ۱۳۷
۴.۳.۷ بررسی مسئله در حالت احتمالی ۱۴۰
۴.۷ کارهای آتی ۱۴۲

۸ مقاله‌های حاصل از این تحقیق ۱۴۵
۱.۸ مقاله‌های چاپ شده ۱۴۵
۲.۸ مقاله‌های ارسال شده ۱۴۶
۳.۸ مقاله‌های مرتبط ۱۴۶

مراجع ۱۴۸

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۵۲

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۵۴

فهرست شکل‌ها

۱.۳ هر رأس نشان‌دهنده‌ی یک فرد در جامعه است. اعدادی که نزدیک هر رأس نوشته شده است، نشان‌دهنده‌ی ارزش اولیه کالا برای آن فرد است. هر یال یک تأثیر به اندازه L را نشان میدهد. ۱۸

۲.۳ ارزش کالا در این مثال برای هر فرد ثابت است و در طول زمان تغییر نمی‌کند. ارزش کالا را مرتب شده در نظر می‌گیریم به طوری‌که $v_۱$ بیشترین مقدار را داشته باشد. منحنی نمایش داده شده تعداد افرادی که کالا را با قیمت خاصی می‌خرند نشان می‌دهد. مسئله قیمت‌گذاری به مسئله قرار دادن k مستطیل زیر منحنی با مساحت بیشینه تبدیل می‌شود. ۲۳

۳.۳ استراتژی قیمت‌گذاری بهینه برای توابع توزیع یکنواخت. ۳۶

۴.۳ رابطه میان سود بهینه و تعداد روزها. بیشتر سود با تغییرات کم در قیمت بدست می‌آید. . . ۳۷

۵.۳ رابطه سود بهینه و تعداد یال‌های گراف. هر چه تأثیرات در جامعه قوی‌تر باشد، سود بهینه به تعداد یال‌های وابستگی بیشتری دارد. ۳۷

۶.۳ ساختار یال‌های سیاه و سفید ۳۹

۷.۳ ساختار کلی بازار گراف متناظر با مسئله جمع زیرمجموعه ۴۱

۸.۳ منحنی تابع $۱ - F(x)$. متوسط تابع f برابر مساحت زیر منحنی $۱ - F(x)$ است که می‌توان آن را به دو قسمت $S_۱$ و $S_۲$ تقسیم کرد. p قیمتی است که مقدار $q(۱ - F(q))$ را بیشینه می‌کند. ۴۵

۹.۳ نحوه پوشاندن یک ناحیه با سه مستطیل با توجه به روش لم ۸.۳.۳. مساحت زیر نمودار برابر s_p و اندازه ضلع پایینی برابر e_p است ۴۶

۱.۴ شبکه شار برای حل مسئله زیرمجموعه وزن‌دار بیشینه. ۶۰

۱.۵ تابع ارزش برای افراد دسته ۱ و ۲. . . . . ۷۴

۲.۵ مسئله پوشش مستطیلی. ناحیه آبی مساحت پوشش داده شده توسط مستطیل‌های ضریب خورده را نشان می‌دهد. ۸۰

۳.۵ سود فروشنده با توجه به تابع H. ۸۴

۴.۵ نحوه تغییرات قیمت در طول زمان. قیمت‌ها در طول زمان زیاد می‌شوند. ۸۵

۵.۵ رابطه جمعیت خریدار و زمان. هر چه تحدب تابع ارزش کالا بیشتر باشد، افراد تمایل به خرید دیرتر کالا دارند. ۸۶

۶.۵ وابستگی سود فروشنده به میزان کاهش ارزش پول در طول زمان. وابستگی سود فروشنده به میزان کاهش ارزش کالا در طول زمان نیز به همین صورت است. ۸۶

۷.۵ وابستگی سود فروشنده به میزان کاهش ارزش پول در طول زمان. وابستگی سود فروشنده به میزان کاهش ارزش کالا در طول زمان نیز به همین صورت است. ۸۷

۸.۵ ناحیه با مساحت A. ۸۸

۹.۵ ناحیه با مساحت B. ۹۱

۱.۶ ماتریس سود $\mathbf{U}$. ۹۵

۲.۶ یک بازی با چهار ناحیه $\mathcal{R}_A$، $\mathcal{R}_A^j$، $\mathcal{R}_A^k$ و $\mathcal{R}_A^m$ که $۰ < j < k < m$. ۹۸

۳.۶ پوش محدب نقاط به صورت (y, f_g^y) برای $m \leq y \leq ۰$. نقاط قرمز مشخص کننده‌ی ناحیه‌های فعال هستند. ۱۰۹
۴.۶ پاسخ شرکت A و B به ترتیب با خط سبز و قرمز نشان داده شده است. ۱۱۰

۱.۷ گراف G^* ۱۲۷
۲.۷ ساختن شبکه شار F از روی گراف H ۱۳۱
۳.۷ جوابی با سود تضمین شده ۰/۲ ۱۳۳
۴.۷ مسئله بیشنیه کردن سود با اطلاعات اضافی ۱۳۸

فهرست جدول‌ها

۱.۳ خلاصه‌ای از نتایج بدست آمده. حالت I زمانی است که توابع ارزش زیرپیمانه هستند و شرط یکنوا بودن میزان مخاطره را دارند. حالت II زمانی است که توابع ارزش علاوه بر زیرپیمانه بودن و داشتن شرط یکنوا بودن میزان مخاطره دارای توزیع اولیه یکسان نیز هستند. ۲۰

فصل ۱

مقدمه

متفکران و اقتصاددانان در دوره‌های مختلف در مورد چگونگی بازار، تبادل کالا و پول فکر کرده‌اند. گذشت زمان، افزایش جمعیت و تغییر ساختار بازار باعث به وجود آمدن مسئله‌های جدید در بازارها و پیچیده‌تر شدن تصمیم‌ها در مسائل اقتصادی شده است. به همین دلیل، تحلیل دقیق این مسئله‌ها در دنیای امروز بسیار مفید به نظر می‌رسد. در رفتارهای اجتماعی هر سازمان، شرکت یا فردی به دنبال بیش‌تر کردن سود خود است. با توجه به این رفتارها می‌توان روش‌هایی را بررسی نمود که یک شخص بتواند سود خود را در بازار بیشتر کند. برای مثال این موضوع که قیمت یک کالا را در بازار چگونه تعیین کنیم که سودمان بیشینه شود، یا این‌که چگونه توسط تبلیغات در به وجود آوردن احساس نیاز به کالای تولیدی خود در بازار تأثیر بگذاریم، و از این گونه سؤال‌ها، سؤالاتی هستند که در فضای اقتصادی امروز دنیا بسیار مهم هستند.

پیشرفت تکنولوژی و فراهم آمدن بستر مناسب برای تبادل‌های الکترونیکی روز به روز به تعداد استفاده‌کنندگان از سرویس‌های الکترونیکی می‌افزاید. همان‌طور که مشاهده می‌شود در بسیاری از کشورهای پیشرفته استفاده از کارت اعتباری[۱] در مبادلات تجاری ضروری و غیر قابل اجتناب است و به طور قطع به زودی در دیگر کشورها نیز چنین خواهد شد. فراگیر شدن فضاهای مجازی مانند تلویزیون، اینترنت[۲] و دیگر رسانه‌ها در ماهیت بازارها تأثیر چشمگیری گذاشته‌اند. در دنیای امروز یک نفر می‌تواند بدون حضور فیزیکی و با استفاده از اینترنت کالایی را خریداری کند. وقتی شخصی می‌تواند در چند دقیقه کالای مورد نظر خود را خریداری کند دیگر سراغ بازارهای سنتی که مجبور به گذراندن چندین ساعت وقت در آن است نخواهد رفت. شاید یکی از دلایلی که در حال حاضر استفاده از سرویس‌های مبتنی بر شبکه اینترنت رایج نشده است این است که هنوز مردم عادی به آن عادت نکرده‌اند و به آن اطمینان ندارند. به طور قطع در سال‌های آینده با فراگیر شدن فرهنگ استفاده از

[۱] Credit Card

[۲] Internet

اینترنت و افزایش کیفیت و قدرت این شبکه‌ها شاهد تأثیر فزاینده آن‌ها بر بازارهای اقتصادی هستیم.

در این رساله به بررسی چند مسئله در بازارهای اجتماعی [۳] خواهیم پرداخت. هدف اصلی در تمام این مسئله‌ها طراحی یک استراتژی مناسب برای فروشنده کالا است به طوری که با توجه به ماهیت بازارهای اجتماعی سود بیشتری کسب کند. بازارهای اجتماعی متفاوتی با اهداف و کارآیی‌های متفاوت در دنیای امروز وجود دارند و به همین دلیل مسئله‌های مختلفی می‌توان در هریک تعریف نمود. برای مثال چند نمونه در ادامه آورده شده است:

- با توجه به گسترش فضای مجازی و این حقیقت که افراد زمان زیادی از وقت خود را در فضای مجازی به خصوص شبکه‌های اجتماعی برخط مانند facebook می‌گذرانند، تبلیغات در این‌گونه فضاها بسیار سودمند خواهد بود. به همین دلیل یکی از مسئله‌های جذاب مطالعه رفتار افراد در فضای مجازی و مقایسه آن با فضای واقعی متفاوت است. با تحلیل مناسب از رفتار افراد در فضای مجازی می‌توان روش‌های مناسبی برای تبلیغات در این فضا ارائه کرد.

- در دنیای واقع مردم از یکدیگر تأثیر می‌پذیرند و نظر هر شخص راجع به کالا و قیمت تحت تأثیر نظر و رفتار دوستانش است. این‌که کالای خود را به چه قیمتی عرضه کنیم و واکنش بازار نسبت به قیمت پیشنهادی ما چه خواهد بود نیز از مسئله‌های جالب است. مطالعه این تأثیرگذاری‌ها و تصمیم در مورد قیمت کالا و تغییر آن در طول زمان با توجه به روابط اجتماعی بسیار سودمند خواهد بود.

- در روابط اقتصادی و سیاسی، قدرت چانه‌زنی [۴] یک فرد به گزینه‌های که در دست دارد بستگی دارد. هر چه گزینه‌های یک فرد بیشتر باشد، می‌تواند با به وجود آوردن رقابت بین گزینه‌های مختلف سود خود را بیشتر کند. از طرفی دیگر هر چه یک فرد محدودتر باشد، مجبور به پذیرش گزینه‌های موجود است. یک مسئله بسیار مهم در بازارهای اجتماعی بررسی قدرت چانه‌زنی یک فرد با توجه به ساختار اجتماع است.

- با گسترش اینترنت بازارهای پیش‌بینی [۵] نیز در این فضا گسترش یافته‌اند. در حال حاضر سایت‌های بسیاری وجود دارند که افراد در آن در مورد وقایع آینده شرط‌بندی می‌کند. این وقایع می‌توانند یک واقعه ورزشی باشد مانند این‌که «تیم منچستر یونایتد بر بارسلونا در این فصل لیگ قهرمانان اروپا پیروز خواهد شد» و یا یک واقعه سیاسی باشد مانند این‌که «کدام گروه در انتخابات ریاست جمهوری آینده پیروز

---

[۳] Social Market

[۴] Bargaining Power

[۵] Prediction Markets

خواهند شد» و یا هر واقعه‌ی دیگری. بررسی این نوع بازارها که به بازارهای پیش‌بینی معروف هستند بسیار مفید خواهد بود.

این مثال‌ها و بسیاری مثال‌های مشابه دیگر در بازارهای اجتماعی وجود دارند که مطالعه آن‌ها بسیار ضروری است. در این رساله چند مسئله را از نگاه فروشنده یا کسی که بازار را طراحی می‌کند، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در حقیقت هدف طراحی استراتژی‌ها مختلف برای فروشنده به طوری است که سودش بیشینه شود. به طور خاص تمرکز اصلی بر روی قیمت‌گذاری کالا در حالی است که افراد در جامعه بر روی هم تأثیر می‌گذارند و تصمیم افراد به یکدیگر وابسته است. هدف طراحی یک استراتژی قیمت‌گذاری مناسب برای فروشنده است. این مسئله را از ابعاد گوناگون مطالعه می‌کنیم. موضوع دیگر که در این رساله به بررسی آن می‌پردازیم، مسئله بیشینه کردن سود صاحب بازار در بازارهای پیش‌بینی است. هدف طراحی یک استراتژی بهینه برای عملکرد صاحب بازار برای بدست آوردن سود بیشتر در بازارهای پیش‌بینی است.

۱.۱ قیمت‌گذاری در شبکه‌های اجتماعی

گسترش شبکه‌های اجتماعی بر روی وب این قابلیت را به محققین و شرکت‌ها داده است تا بتوانند اطلاعات مناسبی از شبکه‌های اجتماعی، انسان‌ها و نوع روابط آن‌ها بدست آورند. با بررسی شبکه‌های اجتماعی مانند Twitter، Facebook، Orkut و MySpace می‌توان اطلاعات فراوانی از رابطه اجتماعی افراد بدست آورد. اطلاعاتی مانند این‌که چه افرادی با هم دوست هستند، چه افرادی بیشتر با هم تعامل دارند، چه افرادی علایق مشترک دارند و مانند آن را می‌توان به راحتی با تحلیل این شبکه‌ها بدست آورد. افراد به طور معمول وقت زیادی را در سایت‌های شبکه‌های اجتماعی صرف می‌کنند. برای مثال در [۳۵] سایت‌ها بر اساس متوسط زمانی که افراد در آن‌ها می‌گذرانند رتبه‌بندی شده‌اند. در این میان MySpace و facebook در بین ۱۰ رتبه اول قرار گرفته‌اند.

مطالعاتی در مورد چگونگی استفاده از شبکه‌های اجتماعی جهت بیشتر کردن سود انجام شده است. در بعضی از مقالات در مورد این‌که چگونه تبلیغات را در شبکه‌های اجتماعی به صورت کارآ انجام دهیم تحقیق شده است [۵۱، ۳۹]. در بعضی دیگر این‌که چگونه به صورت هوشمند یک جنس را به فروش برسانیم مورد بررسی قرار گرفته است[۲۶]. در این مسئله، که تمرکز ما در این رساله هم بیش‌تر روی آن است، یک فروشنده می‌خواهد جنس خود را در یک شبکه اجتماعی به فروش برساند. در شبکه‌های اجتماعی افراد روی هم تأثیر می‌گذارند و وقتی فردی می‌خواهد یک کالا را خریداری کند، میزان پولی که حاضر است برای خرید کالا پرداخت کند به اطرافیان و دوستانش که این کالا را خریده‌اند بستگی دارد. این تأثیر و وابستگی در دنیای واقع نیز وجود دارد. این تأثیر می‌تواند از جنبه‌های متفاوت باشد:

- فرض کنید شرکت ایرانسل [۶] سیاست‌گذاری کرده است مبنی بر این‌که هزینه مکالمه بین دو شخص که هر دو ایرانسل دارند کمتر از حالت معمول باشد. در این صورت این موضوع که دوستان یک فرد از ایرانسل استفاده می‌کنند بر روی علاقه فرد برای خرید ایرانسل تأثیر می‌گذارد. در این موارد در حقیقت نحوه سیاست‌گذاری بر مبنای تأثیر کالا در شبکه اجتماعی است.

- اطلاعات در مورد یک کالا در خیلی از موارد رو در رو منتقل می‌گردد. هنگامی که شخصی اقدام به خرید کالایی می‌کند، این موضوع که اطلاعات کافی از نوع کالا، کارآیی آن، نقاط ضعف و قوت آن داشته باشد در خریدش مؤثر است. در حقیقت افراد دوست دارند کالایی که اطلاعات مناسبی از آن دارند را خریداری کنند و ندانسته در خرید کالا ریسک نمی‌کنند. این موضوع باعث می‌شود که یک فرد در صورتی که آشنایانش از کالای خاصی استفاده می‌کنند، اطلاعات کافی در مورد کالا را از آشنایان دریافت کند و اطمینان او در خرید افزایش پیدا کند. در این وضعیت اغلب افراد حاضرند حتی پول بیش‌تری برای خرید جنس مطمئن‌تر پرداخت کنند.

- کیفیت کالا با افزایش استفاده از آن بیشتر می‌شود. مشکلات بسیاری از محصولات در طول زمان بروز میکند و شرکت سازنده نسبت به برطرف کردن آن اقدام می‌کند. در نتیجه یک فرد این اطمینان را دارد که با گسترش استفاده از یک محصول، مشکلات آن برطرف شده است و محصول از کیفیت قابل قبولی برخوردار است. در این شرایط علاقه‌مند به استفاده از محصول خواهد بود. این دلیل در محصولات نرم‌افزاری به وضوح مشاهده می‌شود.

- این موضوع که یک فرد از چه سیستم عاملی و یا چه محیط ویرایشی استفاده می‌کند بسیار به میزان استفاده دوستانش بستگی دارد. این موضوع که چقدر از نرم‌افزار فارسی‌تک جهت نوشتن مقاله‌ی خود استفاده می‌کنیم به میزان استفاده دیگر دانشجویان و استادها وابسته است. در حقیقت یک فرد دوست دارد متن‌های دوستان خود را مطالعه کند و متن‌هایش توسط دیگر دوستانش مورد استفاده قرار گیرد. در این شرایط افراد دوست دارند از ویرایشگری استفاده کنند که دوستانش نیز استفاده می‌کنند. این دلیل در بسیاری محصولات به خصوص محصولات نرم‌افزاری مشاهده می‌شود.

با توجه به خاصیت تأثیرگذاری و تأثیرپذیری در شبکه‌های اجتماعی ، فروشنده یک کالا می‌تواند از این تأثیرات اجتماعی بهره ببرد و کالای خود را طوری قیمت گذاری کند که سود بیشتری ببرد. برای مثال یک فروشنده باهوش می‌تواند برای این‌که فروش کالایش بیشتر شود ابتدا کالا را با قیمت پایین به یک سری افراد که در شبکه‌های اجتماعی تأثیر گذارند بفروشد و سپس قیمت کالا را افزایش دهد. دقت کنید که در این حالت

[۶] Irancell, http://www.irancell.ir/EN/

تأثیری که افراد تأثیرگذار در شبکه اجتماعی دارند باعث می‌شود که دیگر افراد حاضر باشند کالا را با قیمت بالاتری بخرند. قابل توجه است که این تکنیک در عمل نیز استفاده شده است و TiVo که یک شرکت تولید محصولات ضبط ویدیوئی دیجیتال است از این روش برای بیش‌تر کردن سود بهره جسته است.

مسئله اصلی این است که چگونه قیمت‌گذاری را انجام دهیم که با بهره از تأثیرات اجتماعی سود را بیشینه کنیم. البته در بررسی این مسئله باید شرایط بازار، نحوه تأثیرگذاری انسان‌ها، محدودیت‌های فروشنده و بسیاری مسائل دیگر را به خوبی در نظر گرفت. در این رساله این مسئله در حالت‌های گوناگون مورد بررسی واقع شده است. در حقیقت تلاش شده است با درک مناسبی از رفتار افراد در جامعه، شرایط بازار و عملکرد فروشنده استراتژی‌های مناسب برای قیمت‌گذاری کالا پیشنهاد دهیم. برای مثال می‌توان سؤال‌های زیر را برای تعیین مدل پرسید که جواب هریک در چگونگی مدل‌سازی مسئله تأثیر می‌گذارد:

- آیا بازار به گونه‌ای است که بتوان به هر فرد قیمت مخصوص خودش را پیشنهاد داد یا قیمت کالا به صورت عمومی اعلام می‌شود و هر فرد که علاقه‌مند باشد کالا را خریداری می‌کند؟

- افراد جامعه به چه مقدار آینده‌نگر و به چه مقدار عجول هستند؟ آیا اگر قدرت خرید کالایی را داشته باشند، برای خرید آن با قیمت مناسب در آینده صبر می‌کنند؟

- فروشنده و افراد چه مقدار اطلاعات از جامعه در اختیار دارند؟ آیا فروشنده رفتار افراد در مورد خرید کالا را می‌داند؟ این موضوع در عمل بسیار مهم است که آیا فروشنده می‌داند که اگر کالا را با قیمت x تومان ارائه دهد شخص A کالا را می‌خرد یا نه.

- افراد با چه ترتیبی وارد بازار می‌شوند؟ آیا ترتیب ورود را می‌تواند فروشنده تعیین کند؟ آیا ترتیب ورود به صورت اتفاقی تعیین می‌شود؟

ابتدا در فصل ۳ بازاری را بررسی می‌کنیم که قیمت کالا به صورت عمومی اعلام می‌شود. در حقیقت قیمت کالا برای تمام افراد یکسان است و هنگامی که قیمت کالا تغییر پیدا کند، تمام افراد از تغییر آن آگاه خواهند شد. هم‌چنین فرض می‌کنیم افراد در این بازار آینده‌نگر نیستند. به این معنی که هنگامی که قدرت خرید کالا را داشته باشند آن را خریداری می‌کنند. دقت کنید که افراد می‌توانند با تحلیل هوشمندانه در مورد چگونگی تغییرات قیمت در آینده برای خرید مناسب کالا در آینده صبر کنند. بازار با افراد آینده‌نگر در فصل‌های دیگر مورد مطالعه قرار گرفته است. در این فصل مشاهده می‌کنیم که نحوه سیاست‌گذاری به سرعت انتشار اخبار در جامعه وابسته است. مسئله طراحی یک سیاست قمیت‌گذاری بهینه را در بازارهای مختلف با سرعت انتشار اخبار متفاوت بررسی کرده‌ایم.

در فصل ۴ به بررسی بازارهای برخط می‌پردازیم. در این بازارهای افراد به صورت برخط وارد بازار می‌شوند و فروشنده همان لحظه باید نسبت به قیمت کالا برای فرد تصمیم بگیرد. برای مثال در بسیاری موارد که از طریق اینترنت کالایی را خریداری می‌کنید، می‌تواند مثال خوبی از بازارهای برخط باشد. شرایطی را تصور کنید که یک شرکت اطلاعات خوبی از یک فرد و دوستانیش داشته باشد و هنگامی که فرد قصد خرید کالایی را دارد، با توجه به این اطلاعات قیمتی را به او پیشنهاد دهد. در فصل ۴ مسئله قیمت‌گذاری بهینه را در بازارهای برخط مطالعه می‌کنیم.

همان‌طور که اشاره شد یک موضوع مهم در مدل‌سازی افراد جامعه، میزان آینده‌نگری آن‌هاست. در فصل ۵ بازاری با افراد آینده‌نگر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. این افراد تغییرات قیمت در طول زمان را می‌دانند و یا تخمین قابل قبولی از آن دارند. بدین ترتیب با توجه به تغییرات قیمت در طول زمان، بهترین زمان برای خرید کالا را انتخاب می‌کنند. در این شرایط کار فروشنده برای قیمت‌گذاری سخت‌تر خواهد شد و باید رفتار هوشمندانه افراد جامعه را مد نظر داشته باشد. می‌توان بازار را به مانند یک بازی مدل کرد که استراتژی فروشنده تعیین قیمت و استراتژی افراد خرید یا عدم خرید کالا است و در صورت خرید کالا، استراتژی آن‌ها تعیین دقیق زمانی است که کالا را می‌خرند. در فصل ۵ مسئله قیمت‌گذاری با افراد عاقل که با آینده‌نگری نسبت به خرید تصمیم می‌گیرند، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مدل ارائه شده در فصل ۵ افراد جامعه را عاقل و با اطلاعات کافی در مورد آینده در نظر گرفته است. در حالی که در دنیای واقع افراد تا این حد عقلانی عمل نمی‌کنند. این موضوع می‌توانند دلایل مختلف داشته باشد. یک دلیل این است که افراد ممکن است اطلاعات کافی یا دقیق از جامعه نداشته باشند که این موضوع باعث تصمیم اشتباه شود. یا این‌که افراد در بعضی موارد قدرت محاسبه و تحلیل محدودی دارند و نمی‌توانند بهترین راه حل را در هر زمان انتخاب کنند. به همین دلیل یک مدل واقع‌بینانه این است که افراد را عاقل و با قابلیت خطا تصور کنیم. در فصل ۶ چنین مدلی از بازار بررسی شده است. در این فصل بازاری با دو فروشنده را بررسی کردیم که افراد عاقل هستند ولی در تصمیم‌گیری خود خطا دارند. دقت کنید که رقابت بین دو فروشنده نیز در چگونگی تغییر قیمت‌ها بررسی شده است.

۲.۱ بیشینه کردن سود در بازارهای پیش‌بینی

پیش‌بینی آینده در دنیای پیچیده امروز در نوع تصمیم‌گیری‌ها و سیاست‌گذاری‌ها بسیار مؤثر خواهد بود. اگر بتوانیم به طریقی آینده‌ی سیاسی، اجتماعی و اقتصادی دنیا را پیش‌بینی کنیم می‌توانیم در بسیاری از موارد تصمیم‌های درستی اتخاذ کنیم. یکی از راه‌های پیش‌بینی یک رویداد تحلیل اطلاعات موجود در بازارهای پیش‌بینی است. در این بازارها افراد بر روی این‌که یک رویداد در آینده رخ خواهد داد شرط‌بندی می‌کنند. در

حقیقت چون پای پول در میان است و افراد سود خود را وابسته به اظهارنظر خود می‌بینند سعی در ابراز درست نظرات خود دارند و به طریقی اطلاعات افراد مختلف را می‌توان از این طریق جمع‌آوری کرد. با تحلیل این اطلاعات که با احتمال خوبی قابل اطمینان می‌باشد می‌توان امید داشت که رویدادی را در آینده پیش‌بینی کنیم.

بازارهای شرط‌بندی بر روی جایگشت یک نوع از بازارهای پیش‌بینی است که افراد در آن در مورد رتبه‌بندی n نماینده اظهار نظر می‌کنند. در این رساله به بررسی بازارهای شرط‌بندی بر روی جایگشت پرداخته‌ایم. در حقیقت این موضوع که افراد چگونه می‌توانند نظرهای خود را اعلام کنند و چه محدودیت‌هایی در شرط‌بندی دارند در کیفیت بازار مؤثر است. از طرفی صاحب بازار می‌خواهد بازار به گونه‌ای باشد که تحلیل آن برایش پیچیده نباشد و بتواند در زمان چندجمله‌ای آن را تحلیل کند و شرط‌ها را طوری قبول یا رد کند که در نهایت سود ببرد. در فصل ۷ این موضوع را بررسی می‌کنیم که چه محدودیت‌هایی را در اظهار نظر افراد بگذاریم که از طرفی افراد در اظهار نظر آزاد باشند و بتوانند نظرات خود را بیان کنند و از طرفی صاحب بازار قادر به تحلیل شرط‌ها باشد. در تحقیقات قبلی، بازارهای شرط‌بندی بر روی جایگشت به گونه‌ای طراحی شده‌اند که تحلیل شرط‌ها توسط صاحب بازار بسیار پیچیده و در بیشتر مواقع *NP*-Hard می‌شود. در این رساله شرایط و محدودیت‌هایی را برای بازارهای شرط‌بندی بر روی جایگشت معرفی می‌کنیم که مسئله تحلیل شرط‌ها در زمان چندجمله‌ای قابل حل باشد.

۳.۱ بازی ساخت شبکه

در این رساله این موضوع را مورد بررسی قرار داده‌ایم که چگونه قیمت یک کالا را در یک شبکه اجتماعی تعیین کنیم. در این راستا بررسی چگونگی تشکیل یک شبکه اجتماعی و خواص آن نیز می‌تواند بسیار سودمند باشد. تا به حال کارهای زیادی در زمینه چگونگی تشکیل شبکه‌ها صورت گرفته است [۳، ۱۹، ۱۶، ۱۷]. در این مقاله‌ها چگونگی تشکیل رابطه میان دو نفر با یک بازی مدل شده است. در این بازی هر کس می‌خواهد طوری با دیگر افراد رابطه برقرار کند که سودش بیشینه شود. به همین دلیل افراد با توجه به سودشان به دنبال رابطه با دیگر افراد هستند. در نتیجه شبکه روز به روز تغییر می‌کند تا به یک نقطه تعادل می‌رسد. در بسیاری از این مقاله‌ها خواص نقطه‌ی تعادل این بازی مطالعه شده است. از آن‌جا که شبکه‌های اجتماعی و چگونگی شکل‌گیری آن‌ها شباهت زیادی به مدل ارائه شده در مقاله‌های مذکور دارد، بررسی خواص شبکه‌های اجتماعی با توجه به این مدل بسیار مفید خواهد بود. در حقیقت می‌توان خواص مختلفی از شبکه‌های اجتماعی از جمله بیشینه فاصله میان افراد در شبکه در حالت تعادل و مانند آن را بررسی کرد. استفاده از این خواص می‌تواند در چگونگی قیمت‌گذاری و تحلیل بازار مؤثر باشد. در راستای این رساله تحقیقاتی در این زمینه انجام شده است [۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷]. البته در این نوشتار به بررسی این تحقیقات نخواهیم پرداخت.

فصل ۲

پیشینه ریاضی و تعاریف اولیه

در این فصل بعضی تعاریف اولیه که در ادامه رساله به آن نیاز داریم را تعریف می‌کنیم. ابتدا در بخش ۱.۲ مفاهیم اولیه در نظریه بازی‌ها را بیان می‌کنیم. سپس در بخش ۲.۲ بازی‌های جمعیتی را تعریف خواهیم کرد. در بخش ۳.۲ بعضی از انواع مدل‌های تأثیرگذاری در شبکه‌ها اجتماعی را معرفی می‌کنیم.

۱.۲ نظریه بازی‌ها

نظریه بازی‌ها مطالعه تراکنش بین موجودیت‌های مختلفی است که هر یک به دنبال سود خودشان هستند. با استفاده از نظری بازی‌ها برآن هستیم که ابزاری برای تجزیه و تحلیل و پیش‌بینی نتیجه تعامل بین گروهی از افراد بیابیم که عموماً اهداف و خواسته‌های متضاد با یکدیگر دارند. نظریه بازی‌ها کاربردهای موفقی در علوم مختلف از جمله سیستم‌های بیولوژیکی تکاملی، علوم کامپیوتر، علوم سیاسی، فلسفه اخلاق و اقتصاد داشته است. در این فصل بر آن هستم که تعریف‌ها و نتیجه‌های اولیه این نظریه را بیان کنم.

تعریف ۱.۱.۲. یک بازی با تعداد متناهی بازیکن را با سه‌تایی (N, S, u) نشان می‌دهیم، که در آن:

- $N = \{۱, ۲, \cdots, n\}$، مجموعه متناهی از n بازیکن است.

- $S = S_۱ \times \cdots \times S_n$ ، که در آن S_i مجموعه متناهی حرکت‌های ممکن برای بازیکن i است. به حرکت‌های ممکن برای بازیکن i استراتژی‌های بازیکن i هم می‌گویند. بردار $s = (s_۱, \ldots, s_n) \in S$ نمایشگر یک حالت بازی است.

- $u_i : S \mapsto \mathbb{R}$ ، که u_i تابع هزینه یا سود برای بازیکن i است. در حقیقت این مقدار میزان هزینه یا سود بازیکن i در یک حالت از بازی را مشخص می‌کند.

در حالت خاصی که فقط دو بازیکن داشته باشیم و مجموعه حرکات بازیکن‌ها به صورت $S_1 = \{e_1, \ldots, e_Q\}$ و $S_2 = \{f_1, \ldots, f_R\}$ باشد می‌توانیم بازی را با جدول زیر نمایش داد.

		بازیکن ۲		
		f_1	$\cdots$	f_R
	e_1	(A_{11}, B^T_{11})	$\cdots$	(A_{1R}, B^T_{1R})
بازیکن ۱	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	e_Q	(A_{Q1}, B^T_{Q1})	$\cdots$	(A_{QR}, B^T_{QR})

در اینجا $A_{ij} = u_1(e_i, f_j)$ و $B_{ij} = u_2(e_i, f_j)$ هزینه یا سود را برای حالت (e_i, f_j) ازبازی نشان می‌دهند.

۱.۱.۲ نقطه تعادل نَش

در نظریه بازی‌های کلاسیک دو فرض اساسی وجود دارد. اول این‌که بازیکن‌ها بی‌نقص و عقلانی عمل می‌کنند و دوم این‌که این شیوه عملکرد عقلانی جزئی از اطلاعات عمومی جامعه است. بدان معنا که بازیکن‌ها یک تابع هزینه خوش‌تعریف دارند و کاملاً از استراتژی‌های موجود خودشان و حریفانشان و مقادیر هزینه حاصل از آن‌ها آگاهی دارند. بازیکن‌ها فارغ از پیچیدگی بازی هیچ محدودیتی در استنتاج بهترین حرکت ندارند و هزینه این استنتاج نادیده گرفته می‌شود و فرض می‌شود که در یک لحظه قابل انجام است. از طرف دیگر اطلاع عمومی دلالت بر آن دارد که بازیکن‌ها علاوه بر آن که منطقی عمل می‌کنند، می‌دانند که بقیه نیز عقلانی و بی‌نقص عمل خواهند کرد، و هر بازیکن می‌داند که بقیه آگاهند که او بی‌نقص عمل خواهد کرد و به همین ترتیب این روند ادامه دارد.

برای بازیکن i استراتژی s_i بر استراتژی s'_i غالب است اگر برای هر حالت بازی $s_{-i} = (s_1, \ldots s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_N)$ بهتر باشد که i، s_i را انتخاب کند، به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\forall s_{-i} : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \qquad (۱.۲)$$

اما در بیشتر بازی‌ها هیچ استراتژی مغلوبی وجود ندارد. یک مفهوم کاربردی‌تر که قابل استفاده برای تمام بازی‌هاست، مفهوم *نقطه تعادل نَش* است.

تعریف ۲.۱.۲. حالت بازی $s^* = (s^*_1, \cdots, s^*_N)$ یک تعادل نَش [1] است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\forall i, \forall s_i \neq s^*_i : u_i(s^*_i, s^*_{-i}) \geq u_i(s_i, s^*_{-i}) \qquad (۲.۲)$$

[1] Nash Equilibrium

به عبارت دیگر استراتژی s_i^* هر بازیکن، بهترین پاسخ به انتخاب حریفانش در حالت s^* است.

شرایط تعادل نش اطمینان حاصل می‌کند که هیچ بازیکنی به تنهایی انگیزه‌ای برای تغییر حالت بازی ندارد، چرا که با داشتن انتخاب سایرین، هیچ راهی برای بهتر کردن وضعیت خودش ندارد. نکته‌ای که باید به آن دقت شود این است که نقطه تعادل نَش بیان کننده پایداری بازی در حالتی است که در یک لحظه فقط یک بازیکن حق تغییر استراتژی داشته باشد. این مفهوم اطلاعاتی درباره تغییر استراتژی همزمان بازیکن‌ها نمی‌دهد. هم‌چنین دقت کنید که یک بازی ممکن است تعادل نش نداشته باشد و یا چندین تعادل نش داشته باشد.

تعریف ۲.۱.۳. بازی (N, S, u) پتانسیلی است اگر تابع پتانسیل $f : S \mapsto \mathbb{R}$ بگونه‌ای وجود داشته باشد که برای هر $i \in N$ و هر $s_{-i} \in S_{-i}$ و $s_i, s_i' \in S_i$ داشته باشیم:

$$u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(s_i', s_{-i}) = f(s_i, s_{-i}) - f(s_i', s_{-i}) \qquad (۲.۳)$$

به تابع f *تابع پتانسیل* می‌گوییم. در بازی‌های پتانسیلی می‌توان تمام اطلاعات بازی را توسط تابع پتانسیل نشان داد. این بازی‌ها معمولاً خواص جالبی دارند. برای مثال اثبات وجود نقطه تعادل خالص برای بازی‌های پتانسیلی بسیار ساده است و میتوان نشان داد که نقاط بیشینه تابع پتانسیل یک نقطه تعادل نش بازی را مشخص می‌کنند.

۲.۲ بازی‌های جمعیتی

در این بخش به بررسی *بازی‌های جمعیتی* [۲] می‌پردازیم. در دنیای واقعی به بازی‌هایی برخورد می‌کنیم که خصوصیات زیر را دارند:

۱. *تعداد بازیکن‌ها بسیار زیاد هستند.*

۲. *هر بازیکن نسبت به جمعیت کل بسیار کوچک است و* رفتار هر بازیکن بر سود یا هزینه سایرین تأثیر بسیار اندکی دارد، یا حتی قابل چشم‌پوشی و کاملاً بی‌اثر است.

بازی‌های جمعیتی چارچوبی را فراهم می‌کند که در آن تعامل‌های استراتژیک با خواص فوق قابل بررسی باشند. طیف وسیعی از کاربردها، از مسائل اقتصادی گرفته تا زیست‌شناسی، علوم حمل و نقل و علوم کامپیوتر برای چارچوب فوق متصور است.

در این بخش جمعیتی به طور رسمی معرفی می‌شوند.

[۲] Population Games

فرض کنید $P = \{۱, \dots, p\}$ جامعه‌ای با $p \geq ۱$ گروه از بازیکن‌ها باشد. همچنین برای هر $p \geq t \geq ۱$، جمعیت بازیکن‌های گروه t برابر $m^t > ۰$ است. مجموعه استراتژی‌های ممکن برای بازیکن‌های گروه t را با $S^t = \{۱, \cdots, n^t\}$ نشان می‌دهیم. همچنین قرار می‌دهیم $n = \sum_{t=۱}^{p} n^t$ که با تعداد استراتژی‌های ممکن در تمامی گروه‌ها برابر است.

در هنگام بازی هر بازیکن از گروه t یک استراتژی از مجموعه S^t انتخاب می‌کند. مجموعه حالت‌های گروه t را با

$$X^t = \{x^t \in \mathbb{R}_+^{n^t} : \sum_{i \in S^t} x_i^t = m^t\}$$

نمایش می‌دهیم، که در آن عدد $x_i^t \in \mathbb{R}_+$ تعداد یا به عبارت دیگر جمعیت بازیکن‌هایی را نشان می‌دهد که در گروه t استراتژی $i \in S^t$ را انتخاب کرده‌اند. اعضای $X = \prod_{t \in P} X^t$ مجموعه حالت‌های جامعه را بیان می‌کند. به بیانی دیگر X رفتار همه گروه‌ها را توصیف می‌کنند. معمولاً برای مشخص کردن یک بازی جمعیتی، مجموعه جمعیت‌ها و استراتژی‌ها ثابت فرض می‌شوند و فقط از *تابع سود جمعیتی* استفاده می‌شود. تابع سود $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی است که به هر حالت جامعه یک بردار سود نسبت می‌دهد، که هر عضو آن مقدار سود برای یک استراتژی در یک گروه است. در حقیقت $F_i^t : X \rightarrow \mathbb{R}$ بیان‌گر سود استراتژی $i \in S^t$ است، در حالی که $F^t : X \rightarrow R^{n^t}$ نمایان‌گر تمامی توابع سود برای همه استراتژی‌های گروه t است.

۱.۲.۲ بهترین پاسخ و نقطه تعادل نَش

برای این‌که رفتار بهینه و نقطه تعادل را بتوانیم تعریف کنیم، بهترین پاسخ یک جامعه، $b^t : X \Rightarrow S^t$ را معرفی می‌کنیم، که برای هر حالت جامعه استراتژی‌های بهینه را نشان می‌دهد:

$$b^t(x) = argmax_{i \in S^t} F_i^t(x) \tag{۴.۲}$$

تعریف ۱.۲.۲. حالت جامعه $x \in X$، یک *نقطه تعادل نَش* است اگر در همه گروه‌ها، هر استراتژی که در حال استفاده است سود بیشینه را به دست دهد:

$$NE(F) = \{x \in X | \forall t \in P, i, j \in S^t : [x_i^t > ۰ \Rightarrow F_i^t(x) \geq F_j^t(x)]\} \tag{۵.۲}$$

۳.۲ شبکه‌های اجتماعی

به طور کلی در شبکه‌های اجتماعی زمانی که تأثیر افراد بر روی یکدیگر را در نظر می‌گیریم، ارزش کالا نزد هر نفر در هر زمان تابعی از افرادی است که تا به آن زمان کالا را خریداری کرده‌اند و می‌توان ارزش کالا را نزد

فرد i را با تابع $v_i : 2^V \rightarrow R$ نشان داد که $v_i(S)$ ارزش کالا نزد فرد i است اگر افراد مجموعه S کالا را داشته باشند. دقت کنید که به $v_i(\emptyset)$ ارزش اولیه کالا نزد فرد i گوییم. اگر برای هر $S \subseteq T \subseteq V$ و هر فرد i مقدار $v_i(T)$ بیشتر یا مساوی $v_i(S)$ باشد، می‌گوییم تأثیرات افراد بر روی یکدیگر مثبت است. مدل ارائه شده یک مدل کلی در بررسی تأثیرات است. در ادامه چندین مدل که کاربرد بیشتری دارند و در تحقیقات مختلف استفاده شده‌اند را معرفی می‌کنیم.

۱.۳.۲ مدل خطی

یک مدل معروف در مطالعه تأثیرات اجتماعی، *مدل خطی تأثیرات* است. این مدل در چندین تحقیق مورد استفاده قرار گرفته است و دلایل مختلف برای مناسب بودن این مدل در تأثیرات اجتماعی ارائه شده است [۷، ۱۱، ۱۳]. تعریف این مدل در ادامه آمده است:

تعریف ۱.۳.۲. مدل خطی: در این مدل تأثیر افراد با یک گراف وزن‌دار مدل شده است. در حقیقت تأثیر فرد i بر روی فرد j با وزن یال $e(i,j)$ نشان داده می‌شود. وزن یال $e=(i,j)$ را با $w_{i,j}$ نشان می‌دهیم. در این‌صورت برای هر فرد i و زیرمجموعه S از رئوس مقدار تابع ارزش $v_i(S)$ برابر $v_i(S) = v_i(\emptyset) + \sum_{j \in S} w_{j,i}$. مقدار $v_i(\emptyset)$ ارزش اولیه کالا برای فرد i را و $w_{j,i}$ میزان تأثیر فرد j بر روی فرد i را نشان می‌دهند. دقت کنید که اگر یالی از رأس j به i وجود نداشته باشد، مقدار $w_{j,i}$ را برابر ۰ در نظر می‌گیریم. مدل خطی متقارن شبیه مدل خطی تعریف می‌شود به علاوه اینکه برای هر دو رأس i و j خواهیم داشت $w_{j,i} = w_{i,j}$.

۲.۳.۲ مدل زیرپیمانه

تابع زیرپیمانه [۳] : تابع $f : 2^V \rightarrow R$ را زیرپیمانه گویند اگر و فقط اگر به ازای هر $A \subseteq B$ و هر $v \in V$ که $v \notin B$ داشته باشیم:

$$f(A \cup \{v\}) - f(A) \geq f(B \cup \{v\}) - f(B)$$

یک تعریف معادل برای تابع زیرپیمانه این است که به ازای هر A و B داشته باشیم:

$$f(A \cup B) + f(A \cap B) \leq f(A) + f(B)$$

به طور شهودی در توابع زیرپیمانه اضافه کردن یک عضو به مجموعه وقتی تعداد اعضای مجموعه کم هستند تأثیر بیشتری دارد تا زمانی که تعدادشان زیاد است. به عبارت دیگر زیرپیمانه بودن همان نقشی بر روی فضاهای مجموعه‌ای ایفا می‌کند که محدب بودن در فضاهای خطی آن نقش را بر عهده دارد.

[۳] Submodular Function

در مدل تأثیر زیرپیمانه که مورد استفاده در بسیاری از تحقیقات در مورد چگونگی انتشار تأثیرات است، فرض می‌شود که بابع تأثیر یک تابع زیرپیمانه [۴] است [۳۲، ۱۸، ۳۷، ۲۶]. به عبارتی دیگر برای هر فرد i تابع ارزش $v_i(.)$ را زیرپیمانه در نظر می‌گیریم.

۳.۳.۲ مدل احتمالی

در بسیاری از تحقیقات مقدار دقیق $v_i(S)$ را نمی‌دانیم و تنها تخمینی از آن در اختیار داریم. به بیانی دقیق‌تر در بسیار موارد $v_i(S)$ یک متغیر تصادفی با تابع توزیع تجمعی $F_{i,S}$ است که $1 - F_{i,S}(p)$ احتمال این است که فرد i با قیمت p کالا را زمانی که مجموعه افراد S از کالا استفاده می‌کنند، بخرد. در این صورت قیمت نزدیک‌بینانه [۵] که فقط به دنبال بیشینه کردن سود همان لحظه است، قیمتی است که مقدار $p(1 - F_{i,S}(p))$ را بیشینه کند. به همین صورت سود نزدیک‌بینانه [۶] برابر است با $R_i(S) = max_p p(1 - F_{i,S}(p))$.

توابع زیرپیمانه

در مدل احتمالی فرض این‌که تابع ارزش کالا زیرپیمانه است، به این معنی است که تابع سود $R_i(S)$ برای هر فرد i یک تابع زیرپیمانه باشد. این مدل در [۲۶] مورد استفاده قرار گرفته است و در زمانی که مدل احتمالی را بررسی می‌کنیم، فرض معقولی به نظر می‌رسد.

تابع توزیع ارزش اولیه یکسان

می‌گوییم تابع توزیع ارزش اولیه کالا در جامعه یکسان است، اگر بتوان ارزش کالا را به صورت جمع دو متغیر تصادفی $v_.$ و $v_i^*(S)$ نوشت: $v_i(S) = v_. + v_i^*(S)$، که تابع توزیع تجمعی $v_.$ برای تمام افراد برابر $F_.$ و تابع توزیع تجمعی $v_i^*(S)$ برابر $F_{i,S}$ است. دقت کنید که $F_{i,\emptyset}$ یک تابع توزیع است که فقط در نقطه ۰ مقدار دارد و در نتیجه مقدار $v_i^*(\emptyset)$ همیشه برابر ۰ است. در حقیقت در این حالت مدلی را در نظر گرفته‌ایم که ارزش اولیه کالا توسط تمام افراد با یک تابع توزیع یکسان بدست آید.

---

[۴] Submodular

[۵] myopic price

[۶] myopic revenue

شرط یکنوا بودن میزان مخاطره

در ادامه توابع توزیعی که دارای شرط یکنوا بودن میزان مخاطره [۷] هستند را معرفی می‌کنیم. بسیاری از توابع توزیع مانند تابع یکنواخت و نمایی دارای این خاصیت هستند. این خاصیت برای مدل احتمالی از بازار کاربرد دارد و در تحقیقات مشابه مورد استفاده قرار گرفته است [۲۶]. یک تابع توزیع احتمال f با تابع تجمعی F دارای شرط یکنوا بودن میزان مخاطره است اگر تابع $h(p) = f(p)/(1 - F(p))$ یک تابع غیر نزولی باشد.

[۷] Monotone Hazard Rate Condition

فصل ۳

قیمت‌گذاری با قیمت عمومی

۱.۳ مقدمه

در این فصل مسئله قیمت‌گذاری در بازارهای اجتماعی را در حالتی بررسی می‌کنیم که قیمت کالا به صورت عمومی اعلام می‌شود و افراد جامعه آینده نگر نیستند. در این مسئله یک فروشنده می‌خواهد کالای خود را در بازاری با مجموعه افراد V با n فرد به فروش برساند. تولید نسخه‌های متعدد کالا برای فروشنده هزینه‌ای ندارد. محصولات نرم‌افزاری نمونه خوبی از کالاهایی هستند که تولید اولیه آن‌ها هزینه دارد ولی تولید نسخه‌های متعدد هزینه‌ی چندانی ندارد. هر نفر در بازار نیز کالا را بیش از یک بار خریداری نمی‌کند و هیچ علاقه‌ای به خرید چند نسخه از کالا ندارد. هدف فروشنده این است که طوری قیمت‌گذاری کند که بیش‌ترین پول را به دست آورد. در این راستا فروشنده می‌تواند از تأثیری که افراد در شبکه اجتماعی بر روی هم می‌گذارند استفاده کند. زمانی که تأثیر افراد بر روی یکدیگر را در نظر می‌گیریم، ارزش کالا نزد هر نفر در هر زمان تابعی از افرادی است که تا به آن زمان کالا را خریداری کرده‌اند و می‌توان ارزش کالا را نزد فرد i را با تابع $v_i : ۲^V \rightarrow R$ نشان داد که $v_i(S)$ ارزش کالا نزد فرد i است اگر افراد مجموعه S کالا را داشته باشند. در این فصل بازار با تأثیرات مثبت را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. فروشنده در استراتژی قیمت‌گذاری خود می‌تواند قیمت‌های متفاوت را در مقاطع زمانی مختلف پیشنهاد دهد. قیمت به صورت عمومی بیان می‌شود و تمام افراد بلافاصله هنگام تغییر قیمت از قیمت جدید مطلع می‌شوند. فرد i کالا را در زمان t در صورتی خریداری می‌کند که $v_i(S_t) \geq p_t$، که S_t مجموعه افرادی هستند که در زمان t از کالا استفاده می‌کنند و p_t قیمت کالا در زمان t است. دقت کنید که $v_i(\emptyset)$ ارزش کالا برای فرد i بدون تأثیرات اجتماعی را نشان می‌دهد. به این مقدار که یک عدد نامنفی است در ادامه *ارزش اولیه کالا* برای فرد i گوییم.

یک موضوع که در مدل‌سازی مسئله بسیار مهم است، نحوه‌ی دسترسی فروشنده به اطلاعات مربوط به توابع

$v_i(S)$ است. در حقیقت این موضوع که فروشنده به چه روش‌هایی می‌تواند، مقدار ارزش کالا نزد هر فرد را تخمین بزند، موضوع بسیار مهمی است که تمرکز ما در این رساله بر روی این موضوع نیست. در این فصل دو مدل را برای نحوه دسترسی فروشنده به اطلاعات مربوط به ارزش کالا بررسی می‌کنیم.

- مدل قطعی: در این مدل فروشنده برای هر S و هر i مقدار $v_i(S)$ را می‌داند. دقت کنید نگه‌داری تمام $v_i(S)$ ها به حافظه نمایی نیاز دارد. به همین دلیل فرض میکنیم یک جعبه الهام[۱] در اختیار داریم که می‌توان مقدار $v_i(S)$ را برای هر S و i از آن به دست آورد.

- مدل احتمالی: در این مدل فروشنده برای هر S و هر i مقدار دقیق $v_i(S)$ را نمی‌داند و تخمینی از آن دارد. به بیانی دیگر $v_i(S)$ یک متغیر تصادفی با تابع توزیع $f_{i,S}$ و تابع تجمعی $F_{i,S}$ است. در این مدل مقدار دقیق $v_i(S)$ را نمی‌دانیم ولی اطلاعات دقیقی از تابع توزیع آن در اختیار داریم. دقت کنید مانند حالت قبل نگه‌داری تمام $f_{i,S}$ ها به حافظه نمایی نیاز دارد. به همین دلیل فرض می‌کنیم یک جعبه الهام در اختیار داریم که برای هر i و S و به ازای هر قیمت p، می‌توان مقدار $f_{i,S}(p)$ را از آن گرفت.

در مدل مورد مطالعه در این فصل، استراتژی قیمت‌گذاری برای فروشنده تعیین قیمت کالا در k مقطع زمانی است. در حقیقت فروشنده برای هر مقطع زمانی $1 \leq t \leq k$ قیمت p_t را برای کالا ارائه می‌دهد. قیمت p_t توسط تمام افراد جامعه قابل رویت است و تمام افراد از آن آگاه می‌شوند. موضوع مهم دیگر در بررسی بازارهای اجتماعی، مدل رفتار افراد در بازار است. در این فصل افراد جامعه را آینده نگر فرض نمی‌کنیم به این معنی که اولین زمانی که بتوانند کالا را خریداری کنند، آن را می‌خرند و به آینده نگاه نمی‌کنند. دقت کنید که در بعضی موارد ممکن است، یک فرد قدرت خرید کالا را داشته باشد ولی در صورتی که صبر کند قیمت کالا به میزان قابل توجهی کاهش پیدا می‌کند. در این شرایط ممکن است برای خریدار منطقی‌تر باشد که صبر کند و کالا را با قیمت مناسب در آینده خریداری کند. در این فصل فرض می‌کنیم افراد این‌گونه رفتاری از خود بروز نمی‌دهند و به بیانی دیگر نزدیک‌بین[۲] و عجول[۳] هستند و کالا را در اولین زمان t که $v_i(S_t) \geq p_t$ می‌خرند.

برای تعریف دقیق‌تر مسئله باید یک مقطع زمانی را تعریف کنیم. یک مقطع زمانی می‌تواند به اندازه کافی طولانی باشد که تمام تأثیرات افراد بین یکدیگر در جامعه بخش شود. در این حالت زمانی می‌توانیم قیمت کالا را تغییر دهیم که تمام تأثیرات در جامعه منتشر شده و هیچ فردی علاقه‌مند به خرید کالا با قیمت کنونی نباشد. از طرف دیگر یک مقطع زمانی می‌تواند به اندازه کافی کوچک باشد به این معنی که فروشنده می‌تواند قیمت کالا را هر زمانی که خواست تغییر دهد و منتظر انتشار کامل تأثیرات افراد بر روی یکدیگر نباشد. این دو مدل

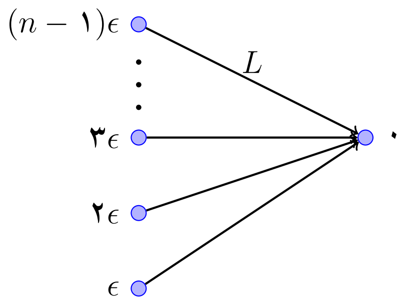
[۱] oracle
[۲] myopic
[۳] impatient

که دو انتهای دو طیف برای تعریف یک مقطع زمانی است را در ادامه به طور دقیق تعریف می‌کنیم. در ادامه ممکن است به یک مقطع زمانی، یک روز گوییم.

- **قیمت‌گذاری پایه (Basic(k)):** در این مسئله فروشنده قیمت کالا را در k مقطع زمانی یا روز تعیین می‌کند. یک فرد نیز کالا را در اولین زمانی خریداری می‌کند که قیمت کالا از ارزش کالا نزد آن فرد بیشتر نباشد. یک مقطع زمانی هنگامی پایان می‌شود که تمام تأثیرات در جامعه پخش شود و بازار به حالت پایدار برسد. به بیانی دقیق‌تر یک مقطع زمانی هنگامی پایان می‌شود که هیچ فردی تمایل به خرید کالا با قیمت کنونی نداشته باشد. هدف فروشنده پیدا کردن دنباله‌ای از قیمت‌ها به طول k مثل $\mathbf{p} = (p_۱, p_۲, ..., p_k)$ است که مقدار $\sum_{t=۱}^{k} p_t|s_t|$ بیشینه شود، که s_t مجموعه افرادی است که در روز t-ام کالا را خریده‌اند. نکته قابل توجه در این مسئله این است که قیمت کالا در طول زمان غیرصعودی خواهد بود. دقت کنید که در پایان روز t-ام افرادی که کالا را نخریده‌اند در حقیقت حاضر نیستند که برای این کالا در وضعیت فعلی بازار p_t تومان پرداخت کنند. بدیهی است که این افراد در صورت افزایش قیمت کالا در روز $t + ۱$-ام کالا را خریداری نمی‌کنند و وضعیت بازار تغییری نمی‌کند. پس برای تغییر وضعیت بازار باید قیمت کالا را در طول زمان کاهش دهیم.

- **قیمت‌گذاری سریع (Rapid(k)):** در این مسئله فروشنده قیمت کالا را در k مقطعی زمانی یا روز تعیین می‌کند. قیمت کالا در ابتدای هر مقطع زمانی تعیین می‌شود و تنها تأثیرات یک مقطع زمانی را اعمال می‌کنیم. در حقیقت در ابتدای مقطع زمانی t قیمت p_t برای کالا به صورت عمومی اعلام می‌شود. سپس هر فردی که علاقه‌مند به خرید کالا با توجه به تأثیرات قبل از مقطع زمانی t و با قیمت p_t است آن را خریداری می‌کند. در این مسئله چگونگی تصمیم افراد برای خرید کالا در مقطع زمانی t بر روی افرادی دیگر در همان مقطع زمانی تأثیر نمی‌گذارد و تأثیرات در مقطع زمانی بعدی دیده می‌شود. به بیانی دیگر تغییر قیمت سریع‌تر از پخش تأثیرات در جامعه است. هدف فروشنده در این مسئله نیز پیدا کردن دنباله‌ای از قیمت‌ها به طول k مثل $\mathbf{p} = (p_۱, p_۲, ..., p_k)$ است که مقدار $\sum_{t=۱}^{k} p_t|s_t|$ بیشینه شود، که s_t مجموعه افرادی است که در روز t-ام کالا را خریده‌اند.

برای درک بهتر از مدلهای Basic(k) و Rapid(k) به سرعت پخش تأثیرات افراد در جامعه در این دو مدل توجه کنید. در مدل Rapid(k) قیمت‌ها می‌توانند به سرعت تغییر کنند و تأثیرات می‌توانند تنها در یک مرحله پخش شوند. از نگاهی دیگر می‌توان گفت که افراد به کندی نسبت به قیمت جدید واکنش نشان می‌دهند و فروشنده می‌تواند قبل از پخش اخبار و تأثیرات در جامعه قیمت را تغییر دهد. ولی در مدل Basic(k) داستان کاملاً متفاوت است. در این مدل افراد به محض مطلع شدن از قیمت جدید نسبت به آن واکنش نشان می‌دهند.



شکل ۱.۳: هر رأس نشان‌دهنده‌ی یک فرد در جامعه است. اعدادی که نزدیک هر رأس نوشته شده است، نشان‌دهنده‌ی ارزش اولیه کالا برای آن فرد است. هر یال یک تأثیر به اندازه L را نشان میدهد.

در این حالت تأثیرات به سرعت و قبل از اینکه فروشنده بتواند قیمت را تغییر دهد در جامعه پخش می‌شوند. برای مشاهده بهتر دو مدل و تفاوت آنها به مثالی که در ادامه آمده است توجه کنید.

مثال ۱.۱.۳. بازار با n فرد با شماره‌های ۱ تا n را در نظر بگیرید. برای هر فرد i ارزش اولیه کالا $v_i(\emptyset) = \epsilon(i-۱)$ است. تمام افراد جامعه بر روی فرد ۱ مقدار L تأثیر می‌گذارند، که $L >> n\epsilon$. به این معنی که با خرید هر یک از آن‌ها ارزش کالا نزد فرد ۱ مقدار L واحد زیاد می‌شود. ارزش کالا نزد بقیه افراد جامعه به غیر از فرد ۱ بدون تغییر و برابر $v_i(\emptyset)$ است. این بازار در شکل ۱.۳ نشان داده شده است.

مسئله Rapid(n) را بر روی این مثال در نظر بگیرید. شاید در نگاه اول این الگوریتم مناسب به نظر می‌رسد: در هر زمان قیمت کالا را برابر بیشترین مقداری قرار بده که حداقل یک نفر کالا را بخرد. با این الگوریتم در روز اول قیمت کالا برابر $\epsilon(n-۱)$ و در روز دوم برابر L خواهد بود. به این ترتیب کالا را با قیمت L به نفر ۱ می‌فروشد. در صورتی که اگر در روز اول قیمت کالا را برابر ϵ قرار دهیم، تمام افراد به غیر از شخص ۱ کالا را در روز اول می‌خرند. در این صورت میتوان کالا را در روز دوم با قیمت $L(n-۱)$ به فرد ۱ فروخت. پس سود بیشینه برابر $(n-۱)(L+\epsilon)$ است. در ادامه مسئله Basic(n) را بر در نظر بگیرید. بدیهی است که در این مسئله فروشنده نمی‌تواند کالا را با قیمت بیشتر از $\epsilon(n-۱)$ به فرد ۱ بفروشد. پس با فرض $L >> n\epsilon$، سود فروشنده در مسئله Rapid(n) بسیار بیشتر از سود فروشنده در مسئله Basic(n) است.

۱.۱.۳ نتایج بدست آمده

در این فصل به بررسی بازارهایی با قیمت‌گذاری عمومی با سرعت‌های مختلف انتشار پرداخته‌ایم. همچنین این بازارها را با توجه به میزان اطلاعات فروشنده از میزان ارزش کالای نزد افراد مورد بررسی قرار می‌دهیم. دقت کنید که در عمل فروشنده اطلاعات کامل و دقیق از ارزش کالا نزد افراد ندارد و و باید ارزش کالا نزد افراد مختلف را تخمین بزند. به همین دلیل به نظر می‌رسد ارائه الگوریتم در مدل احتمالی به کاربردهای واقعی

نزدیک‌تر خواهد بود. از طرفی بدیهی است که ارائه الگوریتم در این زمینه پیچیده‌تر خواهد بود.

ابتدا در بخش ۱.۲.۳ یک الگوریتم چندجمله‌ای برای مسئله Basic(k) در مدل قطعی ارائه می‌دهیم. ایده اصلی الگوریتم استفاده از یک روش حریصانه برای محدود کردن فضای جستجو، و یک روش برنامه‌ریزی پویا برای انتخاب بین قیمت‌های باقیمانده است. سپس مسئله Basic(k) را در مدل احتمالی مورد بررسی قرار داده‌ایم. برای ارائه الگوریتم ابتدا فضای جستجو را محدود می‌کنیم و نشان می‌دهیم می‌توان متوسط سود را به ازای یک قیمت خاص با ایده نمونه‌برداری محاسبه نمود. سپس با یک روش برنامه‌ریزی پویا قیمت‌های مناسب را از میان قیمت‌های فضای جستجو انتخاب می‌کنیم. این مسئله را در بخش ۲.۲.۳ مطالعه می‌کنیم. در بخش ۳.۲.۳ به صورت تجربی چگونگی تغییر قیمت‌های بهینه در شبکه‌های اجتماعی که توسط مدل اتصال ترجیحی تولید شده‌اند، مشاهده می‌کنیم. در این بخش مشاهده می‌شود که با تغییرات کم قیمت‌ها در روزهای اولیه فروشنده میزان زیادی از سود را برداشت خواهد کرد. در حقیقت تغییرات قیمت در روزهای پایانی سود چندانی برای فروشنده نخواهد داشت. البته این تعداد روز به میزان تأثیرات افراد بر روی یکدیگر نیز وابسته است و هر چه میزان تأثیرات بیشتر باشد، تعداد روز کمتری برای کسب بیشینه سود لازم است. همچنین تأثیر تعداد روابط موجود در بازار بر سود فروشنده مورد مطالعه قرار گرفته است. به بیانی دقیق‌تر مشاهده می‌شود هر چه کالا دارای تأثیرات اجتماعی بیشتری باشد، تعداد روابط موجود میان افراد جامعه تأثیر بیشتری بر روی سود فروشنده خواهد داشت.

در مرحله بعدی مسئله Rapid(k) را مطالعه می‌کنیم. ابتدا در بخش ۱.۳.۳ ثابت می‌کنیم مسئله Rapid(k) بر خلاف مسئله Basic(k) بسیار سخت است. به بیانی دقیق‌تر ثابت می‌کنیم این مسئله در مدل قطعی با هیچ ضریب تقریب خوبی در زمان چند جمله‌ای قابل حل نیست، مگر $P = NP$. دقت کنید که سختی مسئله حتی برای حالتی که مدل احتمالی باشد و تابع ارزش زیرپیمانه و دارای شرط یکنوا بودن میزان مخاطره باشد، نیز برقرار است. بنابراین برای ارائه الگوریتم برای مسئله Rapid(k) باید فرض دیگری به مسئله اضافه کنیم. در این راستا یک فرض طبیعی و کوچک به مسئله اضافه می‌کنیم. در حقیقت فرض می‌کنیم تابع ارزش علاوه بر زیرپیمانه بودن و داشتن شرط یکنوا بودن میزان مخاطره دارای خاصیت یکسان بودن تابع توزیع اولیه کالا نیز باشد. در بخش ۲.۳.۳ یک الگوریتم تقریبی برای مسئله ارائه می‌کنیم. ایده اصلی مسئله این است که کالا را ابتدا با قیمت پایین به عده‌ای از افراد بفروشیم و سپس با استفاده از تأثیر این افراد بر دیگر افراد، سود مناسبی از فروش کالا در آینده کسب کنیم. اگر تعداد روزهایی که می‌توان قیمت کالا را تغییر داد به اندازه کافی زیاد باشد و داشته باشیم $k \geq n^{\frac{1}{c}}$، یک الگوریتم تقریبی با ضریب c برای مسئله ارائه می‌دهیم. ولی اگر تعداد روزها کم باشد، ضریب تقریب الگوریتم لگاریتمی است. خلاصه‌ای از نتایج این فصل در جدول ۱.۳ آمده است.

	مدل قطعی	مدل احتمالی
Basic(k)	چند جمله‌ای (بخش ۱.۲.۳)	FPTAS (بخش ۲.۲.۳)
Rapid(k)	بدون الگوریتم تقریبی (بخش ۱.۳.۳)	بدون الگوریتم تقریبی برای حالت I (بخش ۱.۳.۳) الگوریتم با ضریب تقریب $\log_k n$ برای حالت II (بخش ۲.۳.۳)

جدول ۱.۳: خلاصه‌ای از نتایج بدست آمده. حالت I زمانی است که توابع ارزش زیرپیمانه هستند و شرط یکنوا بودن میزان مخاطره را دارند. حالت II زمانی است که توابع ارزش علاوه بر زیرپیمانه بودن و داشتن شرط یکنوا بودن میزان مخاطره دارای توزیع اولیه یکسان نیز هستند.

۲.۱.۳ کارهای انجام شده توسط دیگران

موضوع انتشار[۴] در شبکه‌های اجتماعی در محافل علمی علوم کامپیوتر مورد بررسی قرار گرفته است. این تحقیقات معمولاً مسئله انتشار و فراگیر شدن یک ایده یا تکنولوژی را مورد بررسی قرار داده‌اند (فصل ۲۴ از [۳۳]). در تحقیقات انجام شده این موضوع مورد بررسی قرار می‌گیرد که مردم چگونه در یک شبکه اجتماعی رفتار می‌کنند و به سمت یک ایده یا تکنولوژی جدید سوق داده می‌شوند. برای مثال در [۳۳، ۱۸، ۳۲، ۳۷] این موضوع بررسی شده است که چگونه زیر مجموعه‌ای k رأسی از یک گراف داده شده را تعیین و آن‌ها را آلوده کنیم به این هدف که تعداد رأس‌های آلوده بعد از تأثیرگذاری‌ها بیشینه شود. این مسئله ابتدا در [۱۸] مطرح گردید و سپس در [۳۲] دو مدل حد آستانه‌ی خطی [۵] و انتشار مستقل [۶] برای چگونگی انتشار یک ایده مطرح گردید. در مدل حد آستانه‌ی خطی هر رأس دارای یک حد آستانه است و اگر میزان تأثیرات روی فرد از حد آستانه گذشت، فرد از ایده یا تکنولوژی جدید استفاده می‌کند. در مدل حد آستانه‌ی خطی میزان تأثیرات مجموعه S بر روی فرد i به صورت خطی و برابر $\sum_{j\in S} w_{j,i}$ است، که $w_{j,i}$ میزان تأثیر فرد j بر روی فرد i است. در مدل انتشار مستقل زمانی که یک فرد شروع به استفاده از ایده جدید می‌کند، به احتمالی دوستان خود را نیز مجاب می‌کند که از ایده جدید استفاده کنند. احتمال تأثیر i بر روی j توسط مقدار یال $۰ \le p_{i,j} \le ۱$ نشان داده میشود. در [۳۲] ثابت میشود این دو مدل به یکدیگر قابل تبدیل هستند. همچنین الگوریتمی تقریبی برای پیدا کردن یک مجموعه اولیه با اندازه k به هدف بیشینه کردن تأثیرگذاری‌ها ارائه شده است. در [۳۷] همین مسئله در حالت کلی‌تر مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله تأثیرات به صورت خطی نیست. بلکه برای هر فرد i فرض شده که تابع $v_i(S)$ یک تابع زیرپیمانه است. در این صورت برای هر مجموعه اولیه S یک مجموعه نهایی $\sigma(S)$ تعریف شده که نشان‌دهنده‌ی مجموعه نهایی افرادی است که از ایده جدید استفاده

[۴] Propagation

[۵] Linear Threshold

[۶] Independent Cascade

می‌کنند، در صورتی که مجموعه اولیه S باشد. در حقیقت در [۳۷] ثابت شده که $\sigma(S)$ نیز زیرپیمانه است و در نتیجه الگوریتم تقریبی برای بیشینه کردن آن وجود دارد.

همچنین در [۲۹] این موضوع بررسی شده است که چگونه یک شرکت می‌تواند کالای خود را در رقابت با شرکت دیگر در بازار فراگیر کند. در حقیقت روش‌هایی مانند افزایش تطبیق‌پذیری محصولات و افزایش کیفیت محصولات با یک هزینه اولیه و ... برای دست‌یابی به این هدف مورد بررسی قرار گرفته است. در اغلب این مقاله‌ها موضوع پول در میان نیست و فقط چگونگی رفتار انسان‌ها در یک شبکه اجتماعی مطالعه شده است. در این رساله این موضوع بررسی می‌شود که چگونه از این تأثیرات اجتماعی در راستای بیشینه کردن سود استفاده کنیم.

اقتصاددان‌ها نیز تحقیقاتی در این زمینه‌ها انجام داده‌اند. البته نگاه آن‌ها کمتر الگوریتمی است. برای مثال در [۴۶] این موضوع که ساختار شبکه چه تأثیری در فروش یک کالا دارد مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین در [۱۰] یک قیمت‌گذاری چند مرحله‌ای تعریف شده است که در هر مرحله فروشنده قیمت خود را به امید فروش به افراد بیشتری پایین می‌آورد. قابل توجه است که این مدل شبیه به یکی از مدل‌هایی است که در این رساله مورد بررسی قرار می‌گیرد.

یکی از کارهای اخیر انجام شده که شباهت زیادی به مسئله‌های فصل‌های ۳ و ۴ دارد مقاله [۲۶] است. در این مقاله مسئله قیمت‌گذاری در بازارهای احتمالی مطالعه شده است. نویسندگان این مقاله فرض کرده‌اند که افراد به یک ترتیبی، که توسط فروشنده مشخص می‌شود، وارد بازار می‌شوند. هنگام ورود هر فرد، فروشنده قیمتی را به عنوان قیمت کالا به او پیشنهاد می‌دهد. فرد با توجه به قیمت پیشنهاد داده شده تصمیم به خرید کالا می‌گیرد و یا از خرید آن منصرف می‌شود. در حقیقت این مسئله در این مقاله بررسی شده است : چه ترتیبی برای ورود افراد و چه قیمتی برای هر فرد پیشنهاد دهیم که امید ریاضی سود بیشینه شود. برای این مسئله در [۲۶] برای حالتی که رفتار افراد متقارن و شبیه یکدیگر باشد یک الگوریتم چندجمله‌ای ارائه شده است. در حالت کلی نیز الگوریتمی تقریبی برای مسئله ارائه شده است. همچنین ثابت شده است مسئله الگوریتم تقریبی با ضریب بهتر از $\frac{1}{2}$ ندارد مگر این‌که $P = NP$. در نهایت الگوریتمی قطعی پیشنهاد شده است که مسئله را با تقریب $\frac{1}{3}$ حل کند. همچنین یک الگوریتم تصادفی با ضریب تقریب ۰/۴ برای مسئله طراحی شده است. در تمامی این الگوریتم‌ها ایده اصلی این است که ابتدا کالا را به صورت مجانی به تعدادی از افراد که به صورت تصادفی انتخاب می‌شوند هدیه کنیم. سپس تنها با استفاده از تأثیر این افراد بر روی دیگر افراد جامعه، کالا را به فروش برسانیم. کلیت ایده تا حدودی شبیه به ایده است که در بخش ۲.۳.۳ برای طراحی الگوریتم تقریبی مورد استفاده می‌گیرد.

۲.۳ قیمت‌گذاری پایه

در این بخش مسئله قیمت‌گذاری پایه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا مسئله را در حالتی بررسی می‌کنیم که فروشنده اطلاع دقیق از تابع ارزش افراد داشته باشد. نشان می‌دهیم در مدل قطعی بر خلاف مسئله Rapid(k) که حتی در مدل قطعی بسیار سخت است، می‌توان یک الگوریتم چندجمله‌ای برای حل مسئله ارائه کرد. ایده اصلی مسئله استفاده از یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا است. سپس با گسترش این ایده و استفاده از روش نمونه‌برداری [۷] یک الگوریتم FPTAS برای مسئله در مدل احتمالی ارائه می‌دهیم.

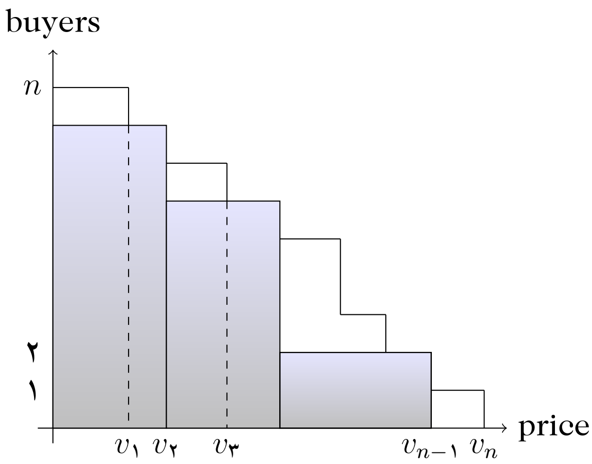
قبل از ارائه الگوریتم برای مسئله، بهتر است یک مثال ساده را که تأثیرات بین افراد در جامعه وجود ندارد، مورد بررسی قرار دهیم. اگر تأثیرات را در نظر نگیریم، هر دو مسئله Basic(k) و Rapid(k) به یک مسئله بهینه‌سازی تبدیل می‌شوند. در این صورت ارزش کالا برای فرد i از افرادی که از کالا استفاده می‌کنند مستقل است. فرض کنید این مقدار برای فرد i برابر v_i است و فروشنده مقدار v_i را می‌داند. در حقیقت اگر قیمت کالا بیش‌تر از v_i نباشد، نفر i کالا را خریداری خواهد کرد. دقت کنید که ارزش کالا نزد افراد در طول زمان تغییر نمی‌کند و در نتیجه قیمت‌ها باید در طول زمان کاهش پیدا کند. هدف پیدا کردن استراتژی قیمت‌گذاری $\mathbf{p} = (p_۱, p_۲, \cdots, p_k)$ به گونه‌ای است که سود فروشنده بیشینه شود. می‌توان نشان داد که در قیمت‌گذاری بهینه تمام قیمت‌ها برابر یکی از v_i ها هستند. به تابع تعداد افرادی که کالا را می‌خرند بر حسب قیمت کالا در شکل ۲.۳ توجه کنید. مسئله پیدا کردن استراتژی قیمت‌گذاری بهینه که سود فروشنده را بیشینه کند، تبدیل به مسئله قرار دادن k مستطیل با مساحت بیشینه زیر منحنی نشان داده در شکل ۲.۳ می‌شود. این مسئله را می‌توان با یک الگوریتم پویا حل نمود. در ادامه رابطه نزدیک این مسئله با مسئله Basic(k) را مشاهده می‌کنیم و به طور دقیق یک الگوریتم برای حل آن ارائه می‌دهیم.

۱.۲.۳ مدل قطعی

همانطور که در تعریف مسئله Basic(k) آمده است، تصمیم افراد برای خرید کالا در یک روز تأثیر خود را در همان روز نشان می‌دهد. یک روز زمانی پایان می‌پذیرد که دیگر هیچ فردی علاقه‌مند به خرید کالا با قیمت ارائه شده در آن روز نباشد. ابتدا نشان خواهیم داد که ترتیبی که افراد در یک روز کالا را می‌خرند در مسئله پیدا کردن استراتژی قیمت بهینه تأثیری ندارد. به بیانی دیگر این مسئله مهم است که چه افرادی در یک روز کالا را می‌خرند و اینکه به چه ترتیبی می‌خرند اهمیتی ندارد. سپس مسئله تعیین قیمت واحد که همان Basic(۱) است را مورد بررسی قرار می‌دهیم و الگوریتم چندجمله‌ای برای حل آن ارائه خواهیم کرد. سپس ایده ارائه شده را با یک برنامه‌ریزی پویا ترکیب کرده و الگوریتمی چندجمله‌ای برای Basic(k) ارائه می‌کنیم.

---

[۷] sampling



شکل ۲.۳: ارزش کالا در این مثال برای هر فرد ثابت است و در طول زمان تغییر نمی‌کند. ارزش کالا را مرتب شده در نظر می‌گیریم به طوری‌که $v_۱$ بیشترین مقدار را داشته باشد. منحنی نمایش داده شده تعداد افرادی که کالا را با قیمت خاصی می‌خرند نشان می‌دهد. مسئله قیمت‌گذاری به مسئله قرار دادن k مستطیل زیر منحنی با مساحت بیشینه تبدیل می‌شود.

فرض کنید در یک زمان مجموعه افراد S کالا را خریده‌اند و قیمت کالا در آن زمان برابر p باشد. در این صورت $B^۱(S,p) = \{i | v_i(S) \geq p\} \cup S$ را برابر مجموعه‌ای از افراد در نظر بگیرید که کالا را بعد از یک مرحله خریداری می‌کنند. به این دلیل که برای تمام این افراد $v_i(S) \geq p$، آن‌ها کالا را در همین لحظه خریداری می‌کنند. به صورت بازگشتی تعریف می‌کنیم: $B^k(S,p) = B^۱(B^{k-۱}(S,p),p)$. به بیانی دیگر $B^k(S,p)$ برابر مجموعه‌ای از افراد است که جنس را بعد از k مرحله خریده‌اند. در حقیقت اتفاقی که می‌افتد به این گونه است که هنگامی که قیمت را برابر p قرار می‌دهیم عده‌ای در همان ابتدا آن را می‌خرند. سپس خرید این عده روی دیگر افراد تأثیر می‌گذارد و آن‌ها نیز کالا را با قیمت p می‌خرند. این روند تا وقتی ادامه پیدا می‌کند که دیگر کسی حاضر به خرید کالا به قیمت p نباشد. در این وضعیت می‌گوییم بازار به حالت پایدار[۸] رسیده است. فرض کنید این اتفاق در مرحله $\hat{k}$ افتاده است و $B^{\hat{k}}(S,p) = B^{\hat{k}-۱}(S,p)$. در این صورت $B(S,p)$ را برابر $B^{\hat{k}}(S,p)$ قرار می‌دهیم. در حقیقت $B(S,p)$ مجموعه‌ای از افراد است که کالا را با قیمت p در حالت پایدار بازار و بعد از گذشت یک مقطع زمانی خریده‌اند. دقت کنید که $B(S,p)$ به ترتیبی که افراد کالا را خریده‌اند بستگی ندارد.

تعیین قیمت واحد- مسئله (۱)Basic

در این مسئله مقدار دقیق $v_i(S)$ را برای هر فرد $i \in V$ و هر زیرمجموعه‌ی S داریم. هدف تعیین قیمت بهینه p_{OPT} برای کالا به گونه‌ای است که $p_{OPT} \times |B(\emptyset, p_{OPT})|$ بیشینه شود. در ابتدا یک دنباله به طول $m \leq n$

---
[۸] Stable

از قیمت‌ها مثل $\beta = (\beta_۱ > \beta_۲ > ... > \beta_m)$ را تعیین می‌کنیم که p_{OPT} برابر با یکی از β_i ها باشد. قبل از تعیین دنباله β لم زیر را ثابت می‌کنیم که در بیان الگوریتم و اثبات درستی آن مؤثر خواهد بود.

لم ۳.۲.۱. *برای هر $a < b$ خواهیم داشت :* $B(\emptyset, b) \subseteq B(\emptyset, a)$.

برهان. با توجه به اینکه تابع ارزش کالا برای هر فرد غیرنزولی است، به راحتی با استقرا روی i می‌توان ثابت کرد $B^i(\emptyset, b) \subseteq B^i(\emptyset, a)$. در نتیجه خواهیم داشت $B(\emptyset, b) \subseteq B(\emptyset, a)$. □

نحوه‌ی تعیین دنباله β به این صورت خواهد بود که قیمت کالا را در ابتدا $p = \infty$ قرار می‌دهیم. در این صورت مجموعه افرادی که کالا را خریداری می‌کنند $S = \emptyset$ خواهد بود. در ادامه p را به روشی خاص کاهش می‌دهیم و مجموعه S را به گونه‌ای نگهداری می‌کنیم که در هر لحظه داشته باشیم $S = B(\emptyset, p)$. نحوه‌ی کاهش p و بدست آوردن β_i ها در الگوریتم ۱ آمده است. در ادامه ثابت می‌کنیم که p_{OPT} عضو دنباله β است.

الگوریتم ۱ الگوریتم برای بدست آورد دنباله β.

```
S ← ∅
i ← 1
while S ≠ V do
    Set β_i equal to the maximum valuation of remaining players, considering the influence
    set to be S. In fact β_i = max_{j∈V−S} v_j(S).
    Update the state of the network until it stabilizes. In fact S ← B(S, β_i)
    S_i = S
    i ← i + 1
end while
```

لم ۳.۲.۲. *p_{OPT} عضو دنباله β است.*

برهان. فرض کنید $p_{OPT} \notin \beta$. اگر $p_{OPT} > \beta_۱$ ، در این صورت هیچ فردی کالا را با قیمت p_{OPT} نمی‌خرد و سود فروشنده در این حالت برابر ۰ است. پس با کاهش قیمت به $\beta_۱$ سود بیشتری خواهد کرد. پس حالتی را بررسی می‌کنیم که $p_{OPT} \leq \beta_۱$. فرض کنید β_i کوچکترین عضو دنباله β است که از p_{OPT} بزرگتر است. با توجه به این‌که $p_{OPT} \notin \beta$ و $p_{OPT} < \beta_i$ اگر زمانی که مجموعه‌ی S_i صاحب کالا هستند قیمت کالا را برابر p_{OPT} قرار دهیم هیچ‌کس کالا را خریداری نمی‌کند. دقت کنید که در خط ۴ از الگویتم مقدار $\beta_{i+۱}$ برابر $v_j(S_i)$ با بیش‌ترین مقدار ممکن شده است. در نتیجه هیچ کس کالا را به قیمت $p_{OPT} > \beta_{i+۱}$ خریداری نمی‌کند. به بیانی دیگر $B(S_i, p_{OPT}) = S_i$.

از طرفی دیگر با استفاده از لم ۳.۲.۱ و با توجه به این‌که $p_{OPT} < \beta_i$ خواهیم داشت $S_i = B(\emptyset, \beta_i) \subseteq B(\emptyset, p_{OPT})$. تصور کنید که قیمت کالا در بازار برابر p_{OPT} قرار داده شده است. در این صورت مجموعه‌ی

S_i حتماً کالا را می‌خرند. از طرفی دیگر در بالا ثابت کردیم که $B(S_i, p_{OPT}) = S_i$ که به این معنی است که اگر قیمت کالا را p_{OPT} قرار دهیم تنها مجموعه‌ی S_i کالا را می‌خرند و $B(\emptyset, p_{OPT})$ برابر S_i خواهد بود.

با اثبات این مطلب که $B(\emptyset, p_{OPT}) = B(\emptyset, \beta_i) = S_i$ این موضوع ثابت می‌شود که اگر قیمت کالا را برابر β_i قرار دهیم سود بیش‌تری از زمانی که قیمت کالا p_{OPT} باشد خواهیم کرد که با تعریف p_{OPT} تناقض دارد. در نتیجه p_{OPT} عضو دنباله β خواهد بود. □

با تعیین دنباله‌ی β و دنباله مجموعه‌های $S_1, S_2, ..., S_m$ در طول الگوریتم قیمت بهینه برابر قیمت β_i خواهد بود که مقدار $\beta_i \times |S_i|$ را بیشینه کند. زمان اجرای الگوریتم برابر $O(n^2 \log n)$ خواهد بود. البته اگر وابستگی افراد به یکدیگر کم باشد و در کل e جفت از افراد بتوان پیدا کرد که بر روی هم تأثیر می‌گذارند می‌تواند الگوریتم بالا را با استفاده از heap در زمان $O((n+e)\log n)$ پیاده‌سازی کرد.

تعیین چند قیمت - مسئله Basic(k)

در این بخش مسئله Basic(k) را در بازارهای قطعی بررسی می‌کنیم و از الگوریتمی که در بخش قبل برای مسئله Basic(۱) ارائه کردیم استفاده خواهیم کرد. در این مسئله هدف پیدا کردن k قیمت بهینه $p_1, p_2, ..., p_k$ به گونه‌ای است که مقدار $\sum_{i=1}^{k} p_i \times |B(\emptyset, p_i) - B(\emptyset, p_{i-1})|$ بیشینه شود. در حقیقت p_i قیمت کالا در روز i در جواب بهینه خواهد بود و $B(\emptyset, p_i) - B(\emptyset, p_{i-1})$ مجموعه افرادی هستند که کالا را در روز i-ام با قیمت p_i می‌خرند.

فرض کنید الگوریتم ۱ را اجرا نموده‌ایم و دنباله‌ی β بدست آمده است. در لم ۲.۲.۳ نشان دادیم برای هر قیمت p خواهیم داشت $B(\emptyset, p) = B(\emptyset, \beta_i)$، که β_i کوچکترین عضو دنباله β است که بزرگتر یا مساوی p است. در نتیجه اگر در جواب مسئله‌ی Basic(k) یکی از قیمت‌ها مثل p_j در دنباله β نباشد و $\beta_{k+1} < p_j \leq \beta_k$ باشد با جایگزینی p_j با β_k مجموعه افرادی که کالا را خریداری کرده‌اند تغییری نمی‌کند و از طرفی قیمت کالا در روز j افزایش پیدا می‌کند و در نتیجه سود بیش‌تر خواهد شود. پس تمام قیمت‌ها در استراتژی قیمت‌گذاری بهینه عضو دنباله β هستند. از طرفی دیگر نشان دادیم که دنباله‌ی قیمت‌ها در مسئله Basic(k) غیر صعودی است. در این صورت مسئله با یک برنامه‌ریزی پویا قابل حل است. $A[t,h]$ را برابر مقدار بیشینه سود هنگامی که t روز داریم و قیمت‌ها باید از مجموعه‌ی $\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_h\}$ انتخاب شوند و قیمت در روز آخر حتماً برابر β_h باشد، تعریف می‌کنیم. در این صورت $A[t,h]$ به صورت زیر محاسبه خواهد شد :

$$A[t,h] = \max_{1 \leq h' < h} (A[t-1, h'] + \beta_h |B(\emptyset, \beta_h) - B(\emptyset, \beta_{h'})|)$$

در حقیت باید قیمت در روز $t-1$ را تعیین کنیم. این قیمت می‌تواند برابر $\beta_{h'}$، برای $1 \leq h' < h$ باشد. در این صورت میزان سود در روز t برابر $\beta_h |B(\emptyset, \beta_h) - B(\emptyset, \beta_{h'})|$ خواهد بود. در نهایت جواب مسئله بیشینه

مقدار ذخیره شده در $A[k,1]$، $A[k,2]$ و ... یا $A[k,m+1]$ خواهد بود. در طول اجرای الگوریتم فرض کنید $\beta_{m+1}=0$. زمان اجرای این الگوریتم برابر $O(n^2\log n+n^2k)$ است. مانند مسئله Basic(۱) اگر وابستگی افراد به یکدیگر کم باشد و در کل e جفت از افراد بتوان پیدا کرد که بر روی هم تأثیر می‌گذارند می‌تواند الگوریتم بالا را با استفاده از heap در زمان $O((n+e)\log n+n^2k)$ پیاده‌سازی کرد.

۲.۲.۳ مدل احتمالی

در این بخش مسئله قیمت‌گذاری پایه را در بازارهای احتمالی بررسی می‌کنیم. در این گونه بازارهای ارزش دقیق کالا نزد افراد را نمی‌دانیم، بلکه تخمینی از آن در اختیار داریم. در کاربردهای عملی نیز این فرض به واقعیت شباهت بیشتری دارد. در حقیقت در این مدل مقدار دقیق $v_i(S)$ را نمی‌دانیم، و یک متغیر تصادفی متناظر با آن در اختیار داریم که توزیع احتمالی آن را می‌دانیم. ابتدا یک الگوریتم FPTAS برای مسئله تعیین قیمت واحد در این مدل طراحی می‌کنیم. ایده اصلی الگوریتم بر پایه نمونه‌برداری است. سپس با کمک ایده‌ای نمونه‌برداری و استفاده از برنامه‌ریزی پویا، یک الگوریتم FPTAS برای تعیین چند قیمت ارائه می‌دهیم.

تعیین قیمت واحد- مسئله Basic(۱)

در این بخش الگوریتمی چند جمله‌ای ارائه می‌کنیم که مسئله‌ی Basic(۱) را در مدل احتمالی با تقریب خوبی حل می‌کند. در مسئله Basic(۱) می‌خواهیم قیمت یکتای p را طوری تعیین کنیم که امید ریاضی سود فروشنده بیشینه شود.

متغیرهای تصادفی C_p و X_p را به ترتیب برابر میزان سود و تعداد افرادی که کالا را خریده‌اند تعریف می‌کنیم، هنگامی که فروشنده قیمت کالا را برابر p قرار داده است. هدف پیدا کردن قیمت p به گونه‌ای است که $E[C_p]$ بیشینه شود. بدیهی است که $C_p=p\times X_p$. پس می‌توان گفت به دنبال بیشینه کردن $p\times E[X_p]$ هستیم. در الگوریتم ارائه شده سعی می‌کنیم $E[X_p]$ را با کمک ایده‌ی نمونه‌برداری تخمین بزنیم. در لم ۲.۳.۳ ثابت می‌کنیم می‌توان $E[X_p]$ را با احتمال بالا و خطای کم تخمین زد. سپس با استفاده از نتیجه لم ۳.۲.۳ مقدار $p\times E[X_p]$ را برای مقادیر خاصی از p حساب می‌کنیم و در قضیه ۴.۲.۳ ثابت می‌کنیم که $E[C_{p_{OPT}}]$ نزدیک یکی از مقادیر محاسبه شده است.

دقت کنید که اگر $v_i(S)$ ها را مانند بازار قطعی یک عدد فرض کنیم و قیمت p داده شده باشد، به راحتی می‌توان تعداد افرادی که جنس p را خریداری می‌کنند محاسبه کرد. به این صورت که ابتدا افرادی را حساب می‌کنیم که $v_i(\emptyset)\geq p$ و آن‌ها را S می‌نامیم. سپس به صورت متوالی افرادی را حساب می‌کنیم که $v_i(S)\geq p$ و S را برابر افرادی قرار می‌دهیم که تا به حال کالا را خریده‌اند. این کار را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا دیگر

S تغییری نکند. زمان اجرای این الگوریتم که چندجمله‌ای است را برابر $TIME$ در نظر می‌گیریم. یک پیاده‌سازی بدیهی برای مسئله نشان می‌دهد که $TIME = O(n+e)$، که e تعداد روابط بین افراد در جامعه است.

لم ۳.۲.۳. *برای هر قیمت داده شده‌ی p و مقدار $\epsilon > 0$ و مقدارهای صحیح $m \geq 3$ و $t \geq 1$، یک الگوریتم با زمان اجرای $O(nt^2/\epsilon^2 \times m \times TIME)$ وجود دارد که مقدار Z_p را به عنوان خروجی برمی‌گرداند به طوری‌که:*

$$Pr[|Z_p - E[X_p]| \geq \epsilon E[X_p]] \leq (\frac{2e}{t^2})^{m/2}$$

برهان. می‌دانیم که X_p یک متغیر تصادفی با متوسط $E[X_p] = \mu_p$ و واریانس σ_p^2 است. می‌دانیم X_p برابر تعداد افرادی است که کالا را خریداری کرده‌اند. پس X_p مقداری بین ۰ و n قبول می‌کند. در نتیجه واریانس آن حداکثر $n\mu_p$ است.

متغیر تصادفی X_p را $\frac{nt^2}{\epsilon^2}$ بار محاسبه می‌کنیم و Y_p را برابر میانگین این $\frac{nt^2}{\epsilon^2}$ مقدار قرار می‌دهیم. می‌توان واریانس Y_p با استفاده از واریانس X_p محدود کرد. در حقیقت واریانس Y_p برابر $\sigma_p^2 \times \frac{\epsilon^2}{nt^2}$ است. در نتیجه واریانس Y_p حداکثر $\frac{\epsilon^2\mu_p^2}{t^2} \leq \frac{\epsilon^2\mu_p}{t^2} = n\mu_p \times \frac{\epsilon^2}{nt^2}$ است. از طرفی می‌دانیم $E[Y_p] = \mu_p$. در نتیجه با استفاده از نامساوی چبیشف [9] داریم $Pr[|Y_p - \mu_p| \geq \epsilon\mu_p] \leq \frac{1}{t^2}$. [۴۲]

برای مقدار داده شده‌ی p متغیر تصادفی Y_p را m بار محاسبه کنید و میانه این m مقدار را برابر Z_p قرار دهید. در ادامه نشان می‌دهیم که X_p با احتمال بسیار بالایی اطراف μ_p خواهد بود. فرض کنید Z_p در بازه‌ی $[(1-\epsilon)\mu_p, (1+\epsilon)\mu_p]$ نباشد. در حقیقت باید حداقل $m/2$ تا از متغیرها تصادفی Y_p بیرون از بازه‌ی $[(1-\epsilon)\mu_p, (1+\epsilon)\mu_p]$ قرار گیرند. احتمال این اتفاق برابر pr میباشد که pr حداکثر است با:

$$\binom{m}{m/2}(\frac{1}{t^2})^{m/2} \leq (2e)^{m/2}(\frac{1}{t^2})^{m/2} \leq (\frac{2e}{t^2})^{m/2}$$

بنابراین خواهیم داشت: $Pr[|Z_p - E[X_p]| \geq \epsilon E[X_p]] \leq (\frac{2e}{t^2})^{m/2}$. □

با استفاده از لم ۳.۲.۳ می‌توانیم مقدار $E[C_p]$ را با احتمال خوبی تخمین بزنیم. فرض کنید فروشنده یک حداقلی برای کالا تعیین کرده است و آن را کمتر از آن نمی‌فروشد. بدون لطمه به کلیت مسئله فرض کنید که فروشنده کالا را به قیمت پایین‌تر از ۱ تومان نمی‌فروشند. هم‌چنین اگر توزیع‌های احتمال را داشته باشیم می‌توانیم قیمتی مانند p_{max} را بدست آوریم که مطمئن باشیم فروشنده قیمت کالا بیشتر از p_{max} هم قرار نمی‌دهد. برای مثال می‌توان p_{max} را برابر حد بالای تمام توزیع‌های احتمال $v_i(\emptyset)$ برای تمام i ها قرار داد. در این صورت مطمئن هستیم که $1 \leq p_{OPT} \leq p_{max}$. ایده الگوریتم این است که بعضی مقادیر بین ۱ و p_{max} را به عنوان

[9] chebyshev

قیمت کالا انتخاب کند و سود را محاسبه کند و سپس بین این مقادیر انتخاب شده تصمیم گیری کند. در قضیه ۴.۲.۳ الگوریتم پیشنهادی به طور دقیق آمده است.

قضیه ۴.۲.۳. *برای هر مقدار $\epsilon > ۰$ و مقدارهای صحیح $m \geq ۳$ و $t \geq ۱$، یک الگوریتم با زمان اجرای $O(nt^۲/\epsilon^۲ \times m \times \log_{۱+\epsilon}^{p_{max}} \times TIME)$ وجود دارد که قیمت p را به گونه‌ای پیدا می‌کند که با احتمال حداقل $۱ - \frac{e^m \log_{۱+\epsilon}^{p_{max}}}{t^m}$ خواهیم داشت: $E[C_p] \geq E[C_{OPT}]\frac{۱-\epsilon}{(۱+\epsilon)^۲}$.*

برهان. الگوریتم ۲.۲.۳ را برای حل این مسئله در نظر بگیرید.

الگوریتم ۲ الگوریتم FPTAS برای تعیین قیمت واحد در مسئله قیمت‌گذاری پایه و در مدل احتمالی.

for $i = 0$ to $\log_{1+\epsilon} p_{max}$ **do**
  $p_i \leftarrow (1+\epsilon)^i$
  Compute the estimated value of $E[C_{p_i}]$ using sampling technique. Name this value f_{p_i}.
end for
return $argmax_{p_i} f_{p_i}$

در ادامه ثابت می‌کنیم الگوریتم بالا خواص مورد نظر را دارد. با توجه به این‌که $۱ \leq p_{OPT} \leq p_{max}$، در نتیجه اندیسی مانند j وجود دارد که $p_j \leq p_{OPT} < p_{j+۱}$. هر شخصی که کالا را با قیمت p_{OPT} خریداری کرده است حتماً آن را با قیمت پایین‌تر از p_j نیز خریداری می‌کند. بنابراین برای هر نمونه‌برداری تصادفی خواهیم داشت $X_{p_j} \geq X_{p_{OPT}}$ که نتیجه می‌دهد $E[X_{p_j}] \geq E[X_{p_{OPT}}]$. پس خواهیم داشت :

$$(۱+\epsilon)E[C_{p_j}] = (۱+\epsilon)p_j E[X_{p_j}] \geq p_{OPT} E[X_{p_j}] \geq p_{OPT} E[X_{p_{OPT}}] = E[C_{p_{OPT}}]$$

فرض کنید مقدار تخمین زده شده توسط لم ۳.۲.۳ برای مقدار $E[C_{p_i}] = p_i E[X_{p_i}]$ برابر f_i باشد. با استفاده از لم ۳.۲.۳ می‌توان نتیجه گرفت که برای هر i مقدار f_i با احتمال حداکثر $(\frac{۲e}{t^۲})^{m/۲}$ بیرون بازه‌ی $[(۱-\epsilon)E[C_{p_i}], (۱+\epsilon)E[C_{p_i}]]$ قرار می‌گیرد. بنابراین با احتمال حداقل $P = (۱ - (\frac{۲e}{t^۲})^{m/۲})^{i_{max}}$ برای تمام i ها خواهیم داشت $(۱-\epsilon)E[C_{p_i}] \leq f_i \leq (۱+\epsilon)E[C_{p_i}]$، که $i_{max} = \log_{۱+\epsilon} p_{max}$.

برای بدست آوردن یک حد پایین مناسب برای P از نامساوی‌های زیر کمک می‌گیریم. دقت کنید که $e > ۲$ و $i_{max} \geq ۱$.

$$P \geq (۱ - (\frac{e^۲}{t^۲})^{m/۲})^{i_{max}} \geq (۱ - \frac{e^m}{t^m})^{i_{max}} \geq ۱ - \frac{e^m i_{max}}{t^m}$$

فرض کنید الگوریتم p_o را به عنوان خروجی برگردانده است. می‌دانیم با احتمال حداقل P تمام f_i ها به مقدار $E[C_{p_i}]$ بسیار نزدیک هستند. با توجه به این مطالب می‌توان با احتمال حداقل P مقدار $E[C_{p_o}]$ را با توجه به $E[C_{p_{OPT}}]$ محدود کرد :

$$E[C_{p_o}] \geq \frac{f_o}{۱+\epsilon} \geq \frac{f_j}{۱+\epsilon} \geq E[C_{p_j}]\frac{۱-\epsilon}{۱+\epsilon} \geq E[C_{p_{OPT}}]\frac{۱-\epsilon}{(۱+\epsilon)^۲}$$

در نهایت زمان اجرای الگوریتم را بررسی می‌کنیم. بدیهی است که الگوریتم در اجرای خود $\log_{1+\epsilon}^{p_{max}}$ بار از لم ۳.۲.۳ استفاده کرده است و در نتیجه زمان اجرای آن $O(nt^2/\epsilon^2 \times m \times \log_{1+\epsilon}^{p_{max}} \times TIME)$ خواهد بود. $\square$

دقت کنید که زمان اجرای الگوریتم ارائه شده با توجه به متغیر m چندجمله‌ای است ولی احتمال خطای آن با افزایش m به طور نمایی کاهش می‌یابد. این مسئله بسیار مهم است و در طراحی الگوریتم کارا بسیار سودمند خواهد بود. برای مثال در قضیه ۴.۲.۳ اگر t را برابر ne و m را برابر $n + \frac{\log i_{max}}{\log n}$ قرار دهیم، احتمال خطا حداکثر $\frac{1}{n^n}$ و زمان اجرا $O(n^3/\epsilon^2 \times (\frac{\log \log_{1+\epsilon}^{p_{max}}}{\log n} + n) \times \log_{1+\epsilon}^{p_{max}} \times TIME)$ خواهد شد.

تعیین چند قیمت - مسئله Basic(k)

در این بخش الگوریتمی برای حل مسئله Basic(k) در بازارهای احتمال طراحی می‌کنیم. در این مسئله می‌توانیم قیمت کالا را در k روز تعیین کنیم. هنگامی که قیمت کالا را در روز i برابر p_i قرار می‌دهیم، صبر می‌کنیم تا بازار به حالت پایدار برسد و سپس قیمت p_{i+1} را در روز بعدی پیشنهاد می‌دهیم. فرض کنید قیمت کالا در روز i برابر p_i است. در این صورت متغیر تصادفی $X_{p_1,p_2,\dots,p_t}$ را برابر تعداد افرادی تعریف می‌کنیم که کالا را در روز t و هنگامی که قیمت کالا p_t است خریداری کرده‌اند. دقت کنید که $X_{p_1,p_2,\dots,p_t}$ تنها افرادی را محاسبه می‌کند که کالا را دقیقاً در روز t-ام خریده‌اند و افرادی که کالا را قبل از روز t-ام خریده‌اند را به حساب نمی‌آورد. در این صورت سود فروشنده برابر است با :

$$revenue = p_1 X_{p_1} + p_2 X_{p_1,p_2} + \dots + p_k X_{p_1,p_2,\dots,p_k}$$

هدف در مسئله Basic(k) پیدا کردن قیمت‌های $p_1, p_2, \dots, p_k$ به گونه‌ایست که امید ریاضی سود بیشینه شود. با توجه به خطی بودن امید ریاضی خواهیم داشت :

$$E[revenue] = p_1 E[X_{p_1}] + p_2 E[X_{p_1,p_2}] + \dots + p_k E[X_{p_1,p_2,\dots,p_k}] \qquad (۱.۳)$$

با توجه به این مطالب لازم است $E[X_{p_1,p_2,\dots,p_t}]$ را به نحوی تخمین بزنیم. مجموعه افرادی را در نظر بگیرید که تا پایان روز t کالا را خریداری کرده‌اند. به راحتی دیده می‌شود که این مجموعه افراد برابر مجموعه افرادی هستند که کالا را هنگامی که فقط یک روز داریم و قیمت کالا در آن یک روز برابر p_t است خریداری کرده‌اند. به بیان دیگر $X_{p_1} + X_{p_1,p_2} + \dots + X_{p_1,p_2,\dots,p_t} = X_{p_t}$ و در نتیجه خواهیم داشت $X_{p_1,p_2,\dots,p_t} = X_{p_t} - X_{p_{t-1}}$. از طرفی در لم ۳.۲.۳ نشان دادیم که چگونه تخمین خوبی از $E[X_p]$ داشته باشیم. در نتیجه می‌توانیم $E[X_{p_1,p_2,\dots,p_t}] = E[X_{p_t}] - E[X_{p_{t-1}}]$ را نیز با استفاده از این روش تخمین بزنیم. مانند بخش قبل نیز فرض کنید که قیمت کالا حداقل ۱ و حداکثر p_{max} خواهد بود.

با توجه به این مطالب می‌توانیم الگوریتم مورد نظر را بیان کنیم. ابتدا یک الگوریتم ساده ارائه می‌دهیم که در زمان چند جمله برحسب p_{max} و چند فرض ساده کننده مسئله را حل می‌کند. سپس آن را تغییر داده و زمان اجرای آن را بهبود می‌بخشیم و فرض‌های ساده کننده را نیز کنار خواهیم گذاشت.

الگوریتم ساده : برای حل راحت‌تر مسئله چند فرض می‌کنیم که شرایط را آسان‌تر می‌کند. فرض کنید که می‌توانیم مقدار $E[X_p]$ را به طور دقیق حساب کنیم و در هر روز قیمت کالا را باید برابر یک عدد صحیح قرار دهیم. دقت کنید که این فرض‌ها واقعی نیستند و در عمل اتفاق نمی‌افتند. وضعیت بازار زمانی که قیمت کالا را برابر p قرار داده‌ایم و صبر کرده‌ایم تا بازار پایدار شود را در نظر بگیرید. این وضعیت بازار را $Market(p)$ می‌نامیم. در ادامه الگوریتمی پویا ارائه می‌دهیم که مسئله را حل کند. $A[t,p]$ را برابر بیش‌ترین مقدار امید ریاضی سود تعریف کنید هنگامی که t روز داریم و وضعیت بازار $Market(p)$ است. برای محاسبه $A[t,p]$ می‌توان روی قیمت روز اول کالا جستجو کرد. این قیمت می‌تواند هر عدد صحیح کمتر از p باشد:

$$A[t,p] = \max_{۱\leq p'<p} \{A[t-۱,p'] + p'(E[X_{p'}] - E[X_p])\} \tag{۲.۳}$$

فرض کنید قیمت کالا در روز اول را برابر p' قرار داده‌ایم و بازار به حالت پایدار $Market(p')$ رسیده است. در این صورت امید ریاضی سود در روز اول برابر $p'(E[X_{p'}] - E[X_p])$ خواهد بود و $t-۱$ روز دیگر در وضعیت $Market(p')$ داریم.

دقت کنید که در وضعیت $Market(p_{max}+۱)$ هیچ فردی کالا را خریداری نکرده است و بازار در وضعیت اولیه خود قرار دارد. بنابراین جواب مسئله ما در $A[k,p_{max}+۱]$ ذخیره شده است. الگوریتم بالا ضعف‌هایی دارد از جمله این‌که زمان اجرای آن بر حسب p_{max} چندجمله‌ای است که قابل قبول نیست و هم‌چنین بر پایه چند فرض غیر واقعی بنا شده است. در ادامه سعی در حل این مشکلات داریم.

الگوریتم با تقریب $\frac{۱}{۲}$: در ادامه قصد داریم الگوریتم با ضریب تقریب ثابت ارائه کنیم که زمان اجرای آن بر حسب $\log p_{max}$ چندجمله‌ای باشد. فرض کنید $i_{max} = \lceil \log(p_{max}) \rceil$. اگر $k \geq i_{max}+۱$ می‌توان یک الگوریتم $\frac{۱}{۲}$-تقریبی این صورت ارائه کرد که قیمت کالا در روز i را برابر $۲^{i_{max}-i+۱}$ قرار می دهیم. در ادامه ثابت می‌کنیم این الگوریتم جواب بهینه را با تقریب $\frac{۱}{۲}$ بدست می‌آورد. مجموعه افرادی که کالا را در وضعیت $Market(p)$ خریده‌اند را S_p بنامید. بدیهی است که برای هر $p' \leq p$ خواهیم داشت $S_p \subseteq S_{p'}$. جواب بهینه را در نظر بگیرید و فرض کنید شخصی مثل x کالا را در جواب بهینه با قیمت $۲^r \leq p_x < ۲^{r+۱}$ خریده است. بنابراین شخص x کالا را زمانی که قیمت کالا در الگوریتم ما برابر ۲^r است خریداری خواهد کرد. از آن‌جایی که $p_x/۲ < ۲^r$ در نتیجه یک الگوریتم با تقریب $\frac{۱}{۲}$ برای حالتی که $k \geq i_{max}+۱$ خواهیم داشت. اما برای حالتی که $k \leq i_{max}$ چه باید کرد؟

در صورتی که $k \leq i_{max}$ ایده بالا و روش الگوریتم پویا که در الگوریتم ساده پیشنهاد شد را با هم ترکیب می‌کنیم. فرض کنید که صورت مسئله طوری تغییر کرده است که فروشنده مجاز است قیمت کالا در هر روز را

برابر یکی از اعداد $۱, ۲, ..., ۲^{i_{max}}$ قرار دهد. همان‌طور که در بالا اشاره کردیم در این صورت سود بهینه در این حالت حداقل نصف سود بهینه در حالت کلی خواهد بود. در ادامه الگوریتمی ارائه می‌دهیم که مسئله را در حالتی که فروشنده مجاز است قیمت کالا را برابر یکی از اعداد $۱, ۲, ..., ۲^{i_{max}}$ قرار دهد حل کند. $B[t, q]$ را برابر بیش‌ترین امید ریاضی سود هنگامی که t روز داریم و بازار در وضعیت $Market(۲^q)$ در نظر بگیرید. در این صورت می‌توان در روز اول قیمت کالا را برابر $۲^{q'}$ برای $q' < q$ قرار دهیم :

$$B[t, q] = \max_{۰ \leq q' < q} \{B[t-۱, q'] + ۲^{q'}(E[X_{۲^{q'}}] - E[X_{۲^q}])\} \qquad (۳.۳)$$

اما یک مشکل دیگر نیز وجود دارد. در عمل نمی‌توانیم مقدار دقیق $E[X_{۲^q}]$ را حساب کنیم. ولی امید داریم که بتوان از لم ۳.۲.۳ استفاده کرد $E[X_{۲^q}]$ را با دقت بالایی تقریب زد. در ادامه ماتریس‌های B_s و B_r را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

- فرض کنید از لم ۳.۲.۳ برای محاسبه $E[X_p]$ استفاده کرده‌ایم و ماتریس B را با توجه به معادله ۳.۳ پر کرده‌ایم. در این حالت ماتریس B_s را برابر B قرار می‌دهیم.

- فرض کنید مقادیر واقعی $E[X_p]$ را داریم و ماتریس B را با توجه به معادله ۳.۳ پر کرده‌ایم. در این حالت ماتریس B_r را برابر B قرار می‌دهیم.

می‌خواهیم ثابت کنیم : $(۱-\epsilon)B_r[t, q] \leq B_s[t, q] \leq (۱+\epsilon)B_r[t, q]$. اما جمله‌ی $E[X_{۲^{q'}}] - E[X_{۲^q}]$ در معادله ۳.۳ مشکلاتی به وجود می‌آورد. در حقیقت اگر تخمین خوبی از $E[X_{۲^q}]$ و $E[X_{۲^{q'}}]$ داشته باشیم نمی‌توان نتیجه گرفت تخمین خوبی از $E[X_{۲^{q'}}] - E[X_{۲^q}]$ نسبت به مقدار واقعی $E[X_{۲^{q'}}] - E[X_{۲^q}]$ خواهیم داشت. برای غلبه بر این مشکل ماتریس جدید $D[t, q] = B[t, q] + ۲^q E[X_{۲^q}]$ را تعریف می‌کنیم. با توجه به تعریف ماتریس D خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} D[t, q] = B[t, q] + ۲^q E[X_{۲^q}] = \\ \max_{۰ \leq q' < q} \{B[t-۱, q'] + ۲^{q'}(E[X_{۲^{q'}}] - E[X_{۲^q}]) + ۲^q E[X_{۲^q}]\} = \\ \max_{۰ \leq q' < q} \{D[t-۱, q'] + (۲^q - ۲^{q'})E[X_{۲^q}]\} \end{aligned} \qquad (۴.۳)$$

ماتریس‌های D_s و D_r را مانند B_s و B_r از روی D تعریف کنید. در ادامه ثابت می‌کنیم : $(۱-\epsilon)D_r[t, q] \leq D_s[t, q] \leq (۱+\epsilon)D_r[t, q]$.

لم ۵.۲.۳. *برای مقدارهای صحیح $m \geq ۳$ و $T \geq ۱$ و $۰ \leq t \leq k$ و $۰ \leq q \leq i_{max}$ با احتمال حداقل $۱ - \frac{e^m i_{max}}{T^m}$ خواهیم داشت :* $(۱-\epsilon)D_r[t, q] \leq D_s[t, q] \leq (۱+\epsilon)D_r[t, q]$.

برهان. در ابتدا فرض کنید مقدار تخمین زده شده $E[X_p]$ با استفاده از لم ۳.۲.۳ برابر f_p باشد. دقت کنید که در تمام محاسبات خود فقط از تخمین مقدارهای $E[X_{۲^۰}], E[X_{۲^۱}], ..., E[X_{۲^{i_{max}}}]$ استفاده می‌کنیم. طبق لم ۳.۲.۳ برای هر i مقدار f_i با احتمال حداکثر $(\frac{۲e}{t^۲})^{m/۲}$ بیرون بازه‌ی $[(۱-\epsilon)E[C_{p_i}], (۱+\epsilon)E[C_{p_i}]]$ قرار می‌گیرد. بنابراین با احتمال حداقل $P = (۱-(\frac{۲e}{t^۲})^{m/۲})^{i_{max}}$ برای تمام i ها خواهیم داشت:

$$(۱-\epsilon)E[C_{p_i}] \leq f_i \leq (۱+\epsilon)E[C_{p_i}]$$

برای بدست آوردن یک حد پایین مناسب برای P از نامساوی‌های زیر کمک می‌گیریم. دقت کنید که $e > ۲$ و $i_{max} \geq ۱$.

$$P \geq (۱-(\frac{e^۲}{t^۲})^{m/۲})^{i_{max}} \geq (۱-\frac{e^m}{t^m})^{i_{max}} \geq ۱-\frac{e^m i_{max}}{t^m}$$

لم را با استقرا روی t اثبات می‌کنیم. برای $t = ۰$ داریم که $D_s[۰,q] = ۲^q f_{۲^q}$ و $D_r[۰,q] = ۲^q E[X_{۲^q}]$. با استفاده از لم ۳.۲.۳ می‌توان نتیجه گرفت:

$$(۱-\epsilon)D_r[۰,q] \leq D_s[۰,q] \leq (۱+\epsilon)D_r[۰,q]$$

در ادامه برقراری نامساوی برای $D_s[t,q]$ را ثابت می‌کنیم. ابتدا ثابت می‌کنیم $(۱-\epsilon)D_r[,q] \leq D_s[t,q]$ و سپس ثابت می‌کنیم $D_s[t,q] \leq (۱+\epsilon)D_r[t,q]$.

- می‌دانیم که مقدار $D_s[t,q]$ به ازای یک مقدار q_s برابر $D_s[t-۱,q_s] + (۲^q - ۲^{q_s})f_{۲^q}$ و $D_r[t,q]$ به ازای یک مقدار q_r برابر $D_r[t-۱,q_r] + (۲^q - ۲^{q_r})E[X_{۲^q}]$ است. هنگامی که مقدار $D_s[t,q]$ را محاسبه می‌کنیم به دنبال بهترین اندیس q_s می‌گردیم که مقدار $D_s[t,q]$ را بیشینه کند. با توجه به این موضوع خواهیم داشت:

$$D_s[t,q] = D_s[t-۱,q_s] + (۲^q - ۲^{q_s})f_{۲^q} \geq D_s[t-۱,q_r] + (۲^q - ۲^{q_r})f_{۲^q} \quad (۵.۳)$$

از طرفی دیگر با استفاده از استقرا داریم: $D_s[t-۱,q_r] \geq (۱-\epsilon)D_r[t-۱,q_r]$. همچنین با استفاده از لم ۳.۲.۳ می‌توان نتیجه گرفت : $f_{۲^q} \geq (۱-\epsilon)E[X_{۲^q}]$. با جایگزین کردن این دو نامساوی در نامساوی ۵.۳ به نتیجه مطلوب خواهیم رسید :

$$\begin{aligned} D_s[t,q] \geq\ & (۱-\epsilon)D_r[t-۱,q_r] + (۱-\epsilon)(۲^q - ۲^{q_r})E[X_{۲^q}] && \geq \\ & (۱-\epsilon)(D_r[t-۱,q_r] + (۲^q - ۲^{q_r})E[X_{۲^q}]) && = \\ & (۱-\epsilon)D_r[t,q] \end{aligned}$$

- اثبات بسیار مشابه به اثبات در حالت قبل می‌باشد. می‌دانیم که مقدار $D_s[t,q]$ به ازای یک مقدار q_s برابر $D_s[t-۱,q_s] + (۲^q - ۲^{q_s})f_{۲^q}$ است و از طرفی دیگر $D_r[t,q]$ به ازای یک مقدار q_r برابر

$D_r[t-۱, q_r] + (۲^q - ۲^{q_r})E[X_{۲^q}]$ است. هنگامی که مقدار $D_r[t,q]$ را محاسبه می‌کنیم به دنبال بهترین اندیس q_r می‌گردیم که مقدار $D_r[t,q]$ را بیشینه کند. با توجه به این موضوع خواهیم داشت:

$$D_r[t,q] = D_r[t-۱, q_r] + (۲^q - ۲^{q_r})E[X_{۲^q}] \geq D_r[t-۱, q_s] + (۲^q - ۲^{q_s})E[X_{۲^q}] \quad (۶.۳)$$

از طرفی دیگر با استفاده از استقرا داریم : $D_s[t-۱, q_s] \geq (۱+\epsilon)D_r[t-۱, q_s]$. همچنین با استفاده از لم ۳.۲.۳ می‌توان نتیجه گرفت $f_{۲^q} \geq (۱+\epsilon)E[X_{۲^q}]$. با جایگزین کردن این دو نامساوی در نامساوی ۶.۳ به نتیجه مطلوب خواهیم رسید:

$$\begin{aligned}(۱+\epsilon)D_r[t,q] \geq \quad & (۱+\epsilon)D_r[t-۱, q_s] + (۱-\epsilon)(۲^q - ۲^{q_s})E[X_{۲^q}] & \geq \\ & (D_s[t-۱, q_s] + (۲^q - ۲^{q_r})f_{۲^q}) & = \\ & D_s[t,q] &\end{aligned}$$

□

دقت کنید که در نهایت جواب مسئله در $D_s[k, i_{max}+۱]$ ذخیره شده است و همان‌طور که بیان شد این مقدار در بازه $[(۱-\epsilon)D_r[k, i_{max}+۱], [(۱+\epsilon)D_r[k, i_{max}+۱]]$ قرار دارد که $D_r[k, i_{max}+۱]$ جواب بهینه برای مسئله است. اما هدف اصلی در مسئله تعیین قیمت‌ها است. چگونه قیمت‌ها را از روی ماتریس D_s تعیین کنیم؟ چه تضمینی برای خوب بودن قیمت‌های پیشنهادی وجود دارد؟

هنگامی که $D_s[t,q]$ را محاسبه می‌کنیم می‌توانیم اندیس q' که $D[t-۱, q'] + (۲^q - ۲^{q'})E[X_{۲^q}]$ را بیشینه می‌کند را ذخیره کنیم. در این صورت می‌توان قیمت کالا را در روزهای ۱ تا t به صورت زیر بدست آورد:

۱. i را برابر ۱ قرار بده.

۲. فرض کنید q' مقدار $D[t-۱, q'] + (۲^q - ۲^{q'})E[X_{۲^q}]$ را بیشینه می‌کند.

۳. p_i را برابر q' قرار بده.

۴. مقدارهای $i = i+۱$، $q = q'$ و $t = t-۱$ را به روزرسانی کن و اگر $t > ۰$ به مرحله ۲ بازگرد.

ثابت می‌کنیم که اگر قیمت کالا را در روز i برابر ۲^{p_i} قرار دهیم، امید ریاضی میزان سودی که بدست می‌آوریم حداقل $\frac{۱-\epsilon}{۱+\epsilon}$ برابر امید ریاضی سود بیشنه در حالتی است که صاحب بازار می‌تواند قیمت کالا را یکی

از اعداد $۲^{i_{max}}, ..., ۲, ۱$ قرار دهد. در ادامه فرض کنید در جواب بهینه قیمت کالا در روز i برابر $۲^{p'_i}$ است. با توجه به برنامه‌ریزی پویای ۴.۳ خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} D_s[t,q] &= (۲^q - ۲^{p_۱})f_{۲^q} + (۲^{p_۱} - ۲^{p_۲})f_{۲^{p_۱}} + ... \\ &+(۲^{p_{t-۱}} - ۲^{p_t})f_{۲^{p_{t-۱}}} + ۲^{p_t}f_{۲^{p_t}} \qquad (۷.۳) \\ D_r[t,q] &= (۲^q - ۲^{p'_۱})E[X_{۲^q}] + (۲^{p'_۱} - ۲^{p'_۲})E[X_{۲^{p'_۱}}] + ... \\ &+(۲^{p'_{t-۱}} - ۲^{p'_t})E[X_{۲^{p'_{t-۱}}}] + ۲^{p'_t}E[X_{۲^{p'_t}}] \qquad (۸.۳) \end{aligned}$$

دقت کنید که در برنامه‌ریزی پویای ۴.۳ و هنگام محاسبه $D_s[t,q]$ هدف بیشینه کردن $D_s[t,q]$ است بنابراین خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} D_s[t,q] &= (۲^q - ۲^{p_۱})f_{۲^q} + (۲^{p_۱} - ۲^{p_۲})f_{۲^{p_۱}} + ... + (۲^{p_{t-۱}} - ۲^{p_t})f_{۲^{p_{t-۱}}} + ۲^{p_t}f_{۲^{p_t}} \geq \\ &(۲^q - ۲^{p'_۱})f_{۲^q} + (۲^{p'_۱} - ۲^{p'_۲})f_{۲^{p'_۱}} + ... + (۲^{p'_{t-۱}} - ۲^{p'_t})f_{۲^{p'_{t-۱}}} + ۲^{p'_t}f_{۲^{p'_t}} \qquad (۹.۳) \end{aligned}$$

زیرا در غیر این صورت می‌توانستیم مقدار $D_s[t,q]$ را افزایش دهیم. با توجه به این‌که می‌دانیم $(۱-\epsilon)E[X_p] \leq f_p \leq (۱+\epsilon)E[X_p]$ می‌توان نامساوی ۹.۳ را باز نویسی کرد و در طرف چپ به جای f_p مقدار $(۱+\epsilon)E[X_p]$ و در طرف راست به جای f_p مقدار $(۱-\epsilon)E[X_p]$ قرار داد در این صورت داریم :

$$\begin{aligned} &(۱+\epsilon)W = (۱+\epsilon)((۲^q - ۲^{p_۱})E[X_{۲^q}] + (۲^{p_۱} - ۲^{p_۲})E[X_{۲^{p_۱}}] + ... + ۲^{p_t}E[X_{۲^{p_t}}]) \geq \\ &(۱-\epsilon)((۲^q - ۲^{p'_۱})E[X_{۲^q}] + (۲^{p'_۱} - ۲^{p'_۲})E[X_{۲^{p'_۱}}] + ... + ۲^{p'_t}E[X_{۲^{p'_t}}]) = (۱-\epsilon)D_r[t,q] \end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت $W \geq \frac{۱-\epsilon}{۱+\epsilon}D_r[t,q]$. دقت کنید که W امید ریاضی سود است در حالتی که قیمت کالا در روز i برابر ۲^{p_i} باشد و $D_r[t,q]$ امید ریاضی سود در حالت بهینه است. در نهایت ضریب تقریب الگوریتم $\frac{۱-\epsilon}{۱+\epsilon} \times \frac{۱}{۲}$ خواهد بود. جمله‌ی $\frac{۱}{۲}$ به این دلیل است که خود را محدود کردیم به این‌که قیمت کالا یکی از اعداد $۲^{i_{max}}, ..., ۲, ۱$ باشد و جمله‌ی $\frac{۱-\epsilon}{۱+\epsilon}$ از تحلیل‌های بالا بدست آمد.

در لم ۳.۲.۳ اگر t را برابر ne و m را برابر $n + \frac{\log i_{max}}{\log n}$ قرار دهیم، احتمال خطا حداکثر $\frac{۱}{n^n}$ و زمان اجرا $O(n^۳/\epsilon^۲ \times (\frac{\log\log p_{max}}{\log n} + n) \times \log p_{max} \times TIME + k\log^۲ p_{max})$ خواهد شد. در این حالت ضریب تقریب الگوریتم $\frac{۱-\epsilon}{۲(۱+\epsilon)}$ است.

الگوریتم FPTA : با تغییرات کمی در الگوریتم بالا به طوری که قیمت کالا را به جای اعداد به صورت ۲^i از اعداد به صورت $(۱+\epsilon)^i$ انتخاب کنیم الگوریتم با تقریب $\frac{۱-\epsilon}{۲(۱+\epsilon)}$ بالا به یک الگوریتم با ضریب تقریب $\frac{۱-\epsilon}{(۱+\epsilon)^۲}$ تبدیل خواهد شد. در زمان اجرا نیز تمام جمله‌های $\log(p_{max})$ به $\log_{۱+\epsilon}^{p_{max}}$ تبدیل خواهند شد.

۳.۲.۳ نتایج تجربی بر روی شبکه‌های اجتماعی

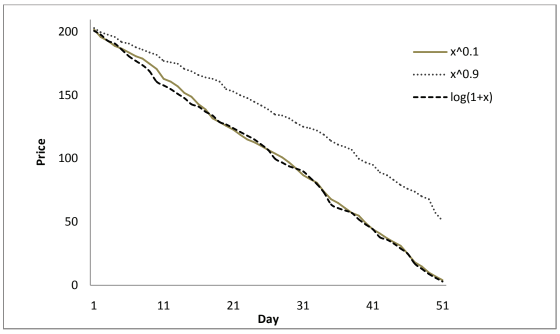
در بخشهای قبلی الگوریتم‌هایی برای پیدا کردن استراتژی قیمت‌گذاری بهینه برای مدل قیمت‌گذاری پایه ارائه کردیم. مسئله دیگری که می‌تواند در عمل مهم باشد، بررسی خواص قیمت‌گذاری بهینه در بازار است. در این بخش با استفاده از الگوریتم‌هایی که در بخش‌های قبلی ارائه شده است، به طور تجربی خواص قیمت‌گذاری بهینه، چگونگی تغییر قیمت‌ها و ارتباط این تغییرات با ساختار شبکه اجتماعی که بازار بر روی آن شکل گرفته است را بررسی می‌کنیم. به بیان دقیق‌تر با استفاده از روش اتصال ترجیحی یک شبکه اجتماعی تولید می‌کنیم و با توجه به توابع ارزشی که بر روی این شبکه اجتماعی تعریف می‌کنیم به بررسی خواص استراتژی قیمت‌گذاری بهینه می‌پردازیم. برای مثال مشاهده می‌کنیم که بیشترین مقدار سود در روزهای اولیه به‌دست خواهد آمد و تغییر قیمت بعد از گذشت چند روز تأثیر زیادی بر روی سود نخواهد داشت. هم‌چنین رابطه میزان سود با تعداد یالهای گراف را نیز بررسی می‌کنیم.

در ادامه چگونگی شبیه‌سازی را به طور دقیق‌تر بیان می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که چگونه یک گراف با روش اتصال ترجیحی می‌سازیم [۴]. در این روش رأسهای شبکه اجتماعی یکی یکی وارد می‌شوند. هر رأس هنگام ورود تصمیم به برقراری ارتباط با تعدادی از رأس‌های قبلی می‌گیرد که احتمال برقراری ارتباط با یک رأس رابطه مستقیم با درجه آن رأس دارد. در این روش متغیر l بیان‌گر تعداد یال‌هایی است که هر رأس جدید به شبکه اضافه می‌کند. به بیانی دقیق‌تر برای ساخت یک شبکه اجتماعی با n رأس ابتدا با یک گراف کامل از اندازه l شروع می‌کنیم. سپس این گراف را در $n-l$ مرحله به یک گراف n رأسی تبدیل می‌کنیم. در هر مرحله یک رأس به گراف اضافه می‌شود و این رأس دقیقاً l یال به رأس‌های قبلی اضافه می‌کند. احتمال برقراری ارتباط با هر رأسی متناسب با درجه آن رأس است.

در این قسمت توابع ارزش را در این شبیه‌سازی به طور دقیق مشخص می‌کنیم. فرض کنید N_i مجموعه دوستان فرد i در گراف باشد. در مدل بررسی شده در این بخش، تابع ارزش هر فرد به تعدادی از دوستانش که کالا را استفاده می‌کنند، بستگی دارد. به بیانی دیگر اگر مجموعه S از کالا استفاده می‌کنند، تابع ارزش فرد i به $|N_i \cap S|$ وابسته است. به طور دقیق ارزش کالا برای فرد i به صورت زیر تعریف میشود:

$$v_i(S) = v_i^1 + v_{i,d}^2$$

که $d = |N_i \cap S|$ و v_i^1 و $v_{i,d}^2$ دو متغیر تصادفی با توابع توزیع F^1 و F_d^2 هستند. در حقیقت v_i^1 نشان‌دهنده‌ی میزان ارزش اولیه کالا برای فرد i و $v_{i,d}^2$ نشان‌دهنده میزان تأثیری است که مجموعه دوستان به اندازه d بر روی فرد i گذاشته‌اند. برای شبیه‌سازی F^1 از یک توابع یکنواخت و نرمال استفاده می‌کنیم. در حالتی که F^1 را با تابع یکنواخت شبیه‌سازی می‌کنیم، از یک تابع یکنواخت روی بازه‌ی $[0, 2m]$، برای یک m دلخواه، استفاده می‌کنیم. در حالتی که F^1 را با تابع نرمال شبیه‌سازی می‌کنیم، از یک تابع نرمال با متوسط m و واریانس $m/2$،



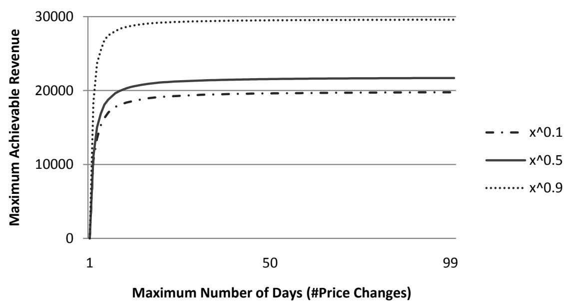
شکل ۳.۳: استراتژی قیمت‌گذاری بهینه برای توابع توزیع یکنواخت.

برای یک m دلخواه، استفاده می‌کنیم. برای شبیه‌سازی $F_d^۲$ نیز از توابع یکنواخت و نرمال استفاده می‌کنیم. فرض کنید fتابعی از d و α یک ضریب باشد. در حالتی که $F_d^۲$ را با تابع یکنواخت شبیه‌سازی می‌کنیم، از یک تابع یکنواخت روی بازه‌ی $[۰, ۲f(\alpha d)]$ استفاده می‌کنیم. در حالتی که $F_d^۲$ را با تابع نرمال شبیه‌سازی می‌کنیم، از یک تابع نرمال با متوسط $f(\alpha d)$ و واریانس $f(\alpha d)/۲$ استفاده می‌کنیم. در شبیه‌سازی‌ها از توابع به صورت $f(x) = x^c$ و $f(x) = log(x + ۱)$ استفاده می‌کنیم. هم‌چنین در تمام شبیه‌سازی‌ها $\alpha = ۲۰$، متوسط تابع توزیع $F^۱$ برابر ۱۰۰ و تعداد رأس‌های گراف ۲۰۰ می‌باشند.

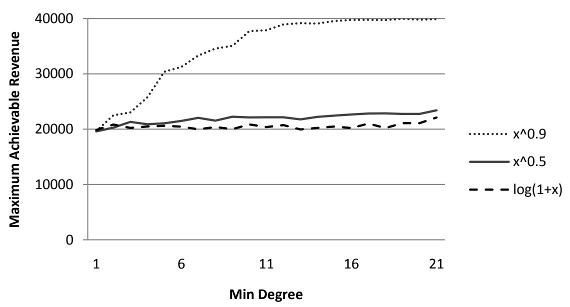
ابتدا تغییر قیمت‌ها را در حالتی بررسی می‌کنیم که تمام توابع توزیع، توابع یکنواخت هستند. در این مثال تعداد روزها برابر ۵۰ در نظر گرفته شده و تغییرات قیمت را در طول این ۵۰ روز مشاهده می‌کنیم. همان‌طور که در شکل ۳.۳ مشاهده می‌کنید، قیمت‌ها به طور خطی کاهش پیدا می‌کنند. این تغییر خطی قیمت‌ها مستقل از تابع f است. در حقیقت تابع f تنها بر روی شیب کاهش قیمت‌ها تأثیر می‌گذارد و بر روی خطی بودن این کاهش تأثیری ندارد.

موضوع بعدی که از طریق شبیه‌سازی مورد بررسی قرار گرفته است، تأثیر تغییر قیمت‌ها بر روی سود نهایی فروشنده است. به بیانی دقیق‌تر، می‌خواهیم میزان بیشینه سود فروشنده را بر حسب تعداد روزهایی که می‌توان قیمت کالا را تغییر داد بررسی کنیم. همان‌طور که در شکل ۴.۳ نشان داده شده است، بیشتر سود با تغییرات کم قیمت بدست می‌آید. در حقیقت می‌توان مطمئن بود که با تغییر قیمت در ۱۰ تا ۱۵ مقطع زمانی، اکثر سود را بدست آورده‌ایم و نیاز به تغییرات زیاد قیمت نمی‌باشد. به بیانی دقیق‌تر مشاهده می‌شود مستقل از اینکه توابع توزیع چگونه باشند، میزان بیشنه سود در ابتدا به سرعت با زیاد کردن تعداد روزها زیاد می‌شود و سپس شیب زیاد شدنش به شدت کاهش پیدا می‌کند. هم‌چنین می‌توان مشاهده نمود که هرچه میزان تأثیرات بیشتر باشد، تغییرات قیمت کمتری برای بدست آوردن سود بهینه لازم است. برای مثال هنگامی که $f(x) = x^{۰/۹}$، میزان سود بعد از ۸ روز تغییر زیادی نمی‌کند. در حالی‌که برای $f(x) = x^{۰/۱}$، این تعداد روز برابر ۱۶ است.

در نهایت به بررسی تعداد یال‌های گراف و میزان تأثیرگذاری بین افراد بر روی سود بهینه فروشنده می‌پردازیم.



شکل ۴.۳: رابطه میان سود بهینه و تعداد روزها. بیشتر سود با تغییرات کم در قیمت بدست می‌آید.



شکل ۵.۳: رابطه سود بهینه و تعداد یال‌های گراف. هر چه تأثیرات در جامعه قوی‌تر باشد، سود بهینه به تعداد یال‌های وابستگی بیشتری دارد.

همان‌طور که در شکل ۵.۳ مشاهده می‌کنید، هر چه میزان تأثیر افراد بر روی یکدیگر بیشتر می‌شود، سود بهینه به تعداد یال‌های گراف حساس‌تر می‌شود. برای مثال برای $f(x) = x^{۰/۹}$ تغییرات سود بر حسب تعداد یال‌های گراف بسیار بیشتر از زمانی است که $f(x) = x^{۰/۵}$ و یا $f(x) = x^{۰/۱}$. در حقیقت اگر کالایی که فروشنده به دنبال فروش آن است، کالایی با تأثیرات اجتماعی زیاد باشد میزان دوستی‌های جامعه در فروش آن تأثیرگذار است. در غیر اینصورت فروش کالا تقریباً مستقل از دوستی‌ها در جامعه است.

۳.۳ قیمت‌گذاری سریع

در این بخش مسئله قیمت‌گذاری سریع را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا در بخش ۱.۳.۳ نشان می‌دهیم بر خلاف قیمت‌گذاری پایه این مسئله حتی در حالت‌های بسیار خاص سخت می‌باشد. به بیان دقیق‌تر ثابت می‌کنیم الگوریتم تقریبی برای حل مسئله در حالت قطعی و با توابع ارزش خطی وجود ندارد. دقت کنید که توابع خطی حالت خاصی از توابع زیرپیمانه هستند. دقت کنید که مسئله در حالت احتمالی سخت‌تر از حالت قطعی است و در نتیجه سختی مسئله در حالت احتمالی نیز نتیجه می‌شود. در راستای طراحی الگوریتم چندجمله‌ای تقریبی، شرطی دیگر به توابع ارزش اضافه می‌کنیم و فرض می‌کنیم توزیع اولیه یکسانی دارند. تعریف دقیق این مدل در

فصل ۲ آمده است. در بخش ۲.۳.۳ الگوریتمی تقریبی برای حل مسئله طراحی می‌کنیم. ایده الگوریتم فروختن کالا با قیمت پایین به مجموعه اولیه از افراد و استفاده از تأثیر این افراد بر روی جامعه برای بالا بردن قیمت در آینده است.

۱.۳.۳ پیچیدگی مسئله

در این بخش مسئله Rapid(k) را در یک بازار قطعی مورد بررسی قرار می‌دهیم. ثابت خواهیم کرد که این مسئله دارای پیچیدگی بالایی است و هیچ الگوریتم تقریبی برای آن یافت نمی‌شود مگر آن‌که $P = NP$. در حقیقت ثابت می‌کنیم در صورتی که الگوریتم تقریبی برای این مسئله پیدا شود می‌توانیم مسئله زیر را حل کنیم :

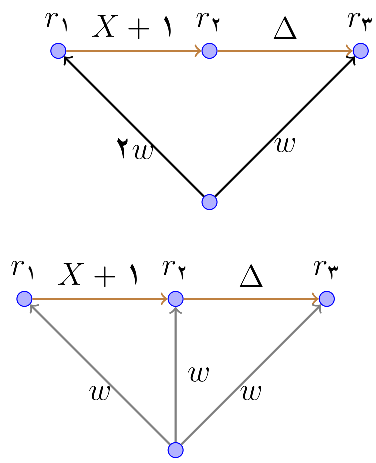
- **مسئله جمع زیرمجموعه[۱۰] :** مجموعه‌ی $S = \{x_۱, x_۲, ..., x_n\}$ از n عدد صحیح و عدد X داده شده‌اند. در این مسئله می‌خواهیم به سؤال «بله - خیر» مقابل جواب دهیم : آیا زیر مجموعه‌ای از S وجود دارد که جمع اعضای آن برابر X شود؟ دقت کنید که می‌دانیم این مسئله *NP*-Complete است [۲۸].

فرض کنید که یک نمونه از مسئله‌ی جمع زیرمجموعه داده شده است و یک الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب α برای مسئله Rapid(k) وجود دارد. ثابت می‌کنیم در صورت وجود چنین الگوریتم تقریبی مسئله جمع زیرمجموعه را می‌توان در زمان چندجمله‌ای حل کرد و در نتیجه $P = NP$ خواهد شد. در واقع از روی نمونه‌ی مسئله‌ی جمع زیرمجموعه یک نمونه از مسئله Rapid(k) در بازار خطی می‌سازیم به طوری که می‌توان سود را در آن از حدی بیش‌تر کرد اگر و تنها اگر جواب مسئله جمع زیرمجموعه «بله» باشد. در ادامه توضیح خواهیم داد که چگونه یک نمونه از مسئله جمع زیرمجموعه را به یک نمونه از مسئله Rapid(k) تبدیل کنیم.

فرض کنید مجموعه‌ی S داده شده است و بدون لطمه به کلیت فرض کنید $x_۱ < x_۲ < ... < x_n$. نمونه مسئله Rapid(k) در بازار خطی را به این صورت می‌سازیم که در گراف بازار $۲n + ۳$ رأس قرار می‌دهیم. ۳ رأس از این $۲n + ۳$ رأس را $R = \{r_۱, r_۲, r_۳\}$ و بقیه را P می‌نامیم. $۲n$ رأس متعلق به P را به n زوج تقسیم می‌کنیم و زوج i-ام که آن را p_i می‌نامیم را متناظر با عضو $x_i \in S$ در نظر می‌گیریم. در حقیقت همان‌طور که در ادامه خواهیم دید زوج p_i به گونه‌ای تعیین می‌کند که آیا x_i در جواب نهایی مسئله جمع زیرمجموعه انتخاب شده است یا خیر.

افراد متناظر با رأس‌های $r_۱$، $r_۲$ و $r_۳$ به ترتیب حاضر به پرداخت ۱، X و X تومان برای خرید کالا هستند. یک یال با وزن $X + ۱$ از $r_۱$ به $r_۲$ و یک یال با وزن Δ از $r_۲$ به $r_۳$ قرار می‌دهیم. Δ یک عدد بسیار بزرگ است و از جمع تمام یال‌های گراف به علاوه‌ی جمع تمام پولی که افراد حاضر هستند در ابتدا پرداخت کنند

[۱۰] Subset Sum



شکل ۶.۳: ساختار یال‌های سیاه و سفید

بیش‌تر است. مقدار دقیق Δ را در ادامه تعیین می‌کنیم. هدف ما این است که طوری قیمت‌گذاری کنیم که ابتدا رأس r_2 کالا را بخرد و سپس در روزهای بعدی به r_3 کالا را بفروشیم. در این صورت می‌توان کالا را با قیمت حداقل Δ که عدد بسیار بزرگی است به r_3 بفروشیم. در ادامه ساختار کلی یال‌های گراف که بین یک رأس از R و یک رأس از P وجود دارند را توضیح می‌دهیم. به طور کلی می‌توان این یال‌ها را به دو دسته تقسیم کرد :

- **یال‌های سیاه :** یال‌های سیاه به صورت جفتی ظاهر می‌شوند. در حقیقت یک یال سیاه با وزن w از رأس $v \in P$ به r_3 وجود دارد اگر و تنها اگر یک یال سیاه متناظر با وزن $2w$ از همان رأس v به r_1 وجود داشته باشد. دقت کنید که مبدا تمام یال‌های سیاه رأس‌های مجموعه P هستند و مقصد آن‌ها یکی از دو رأس r_1 یا r_3.

- **یال‌های سفید :** در کل گراف ۳ یال سفید وجود دارد که وزن تمام آن‌ها یکسان است. مبدا تمام این یال‌ها یکی است و از یک رأس $v \in P$ شروع می‌شوند و مقصد آن رأس‌های r_1، r_2 و r_3 هستند.

نمای کلی یال‌های سیاه و سفید در شکل ۶.۳ دیده می‌شود. هدف این است که کالا را به r_3 با قیمت حداقل Δ بفروشیم. دقت کنید که Δ آن قدر بزرگ است که سود در این حالت از فروش به بقیه افراد تا حد دلخواه بیشتر خواهد شد. برای این‌که کالا را به r_3 با قیمت حداقل Δ بفروشیم باید در زمانی ارزش کالا نزد r_2 بیش از r_3 شود که بتوان کالا را به r_2 فروخت و در همان لحظه r_3 کالا را خریداری نکند. به همین دلیل باید ارزش کالا نزد r_2 را افزایش دهیم و تنها راه فروش به r_1 است. دلیل این مطلب این است که r_2 یال ورودی دیگری غیر r_1 و یک یال سفید ندارد و نکته این‌جاست متناظر با یال سفید ورودی به r_2 یک یال سفید با همان وزن و همان مبدا به r_3 هم وجود دارد. همچنین ارزش اولیه کالا برای r_2 و r_3 یکسان و برابر X است. بنابراین تنها

راه برای این‌که در بازه‌ای از زمان ارزش کالا نزد $r_۲$ بیش‌تر از $r_۳$ شود این است که قبل از این دو کالا به $r_۱$ فروخته شود. از طرفی برای این‌که $r_۱$ کالا را قبل از $r_۲$ و $r_۳$ بخرد باید زمانی ارزش کالا نزد او بیش از دو فرد دیگر باشد. فرض کنید زمان مناسبی که کالا را به $r_۱$ می‌فروشیم جمع وزن یال‌های سیاه ورودی به $r_۱$ برابر $۲A$ باشد. در این صورت با توجه به ساختار یال‌های سیاه در همین زمان جمع یال‌های ورودی به $r_۳$ برابر A است. برای این‌که وقایع بالا رخ دهد و بتوانیم به $r_۳$ با قیمت حداقل Δ بفروشیم باید داشته باشیم (در تحلیل‌های پایین از یال‌های سفید صرف‌نظر می‌کنیم چون تأثیر یکسانی روی رأس‌های مجموعه‌ی R دارند):

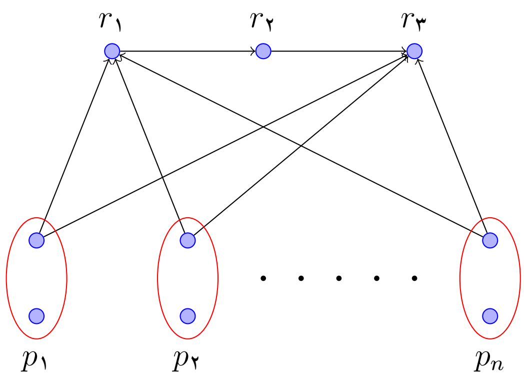
- می‌خواهیم کالا را به $r_۱$ بفروشیم ولی $r_۲$ و $r_۳$ آن را نخرند. صرف‌نظر از یال‌های سفید ارزش کالا نزد $r_۱$ و $r_۳$ به ترتیب $۲A + ۱$ و $A + X$ است. پس برای این‌که ارزش کالا نزد $r_۱$ بیش از $r_۳$ باشد باید داشته باشیم : $A + X < ۲A + ۱$.

- زمانی را در نظر بگیرید که کالا را به $r_۱$ فروخته‌ایم. در این لحظه هدف این است که آن را به $r_۲$ و سپس به $r_۳$ بفروشیم. صرف‌نظر از یال‌های سفید ارزش کالا در این لحظه نزد $r_۲$ و $r_۳$ به ترتیب $۲X + ۱$ و $A + X$ است. پس داریم $A + X < ۲X + ۱$.

از دو نامساوی که در بالا بدست آمده خواهیم داشت $X - ۱ < A < X + ۱$. با فرض صحیح بودن A تنها جواب ممکن $A = X$ است. با معلوم شدن وزن دقیق یال‌های سیاه خواهیم دید که فرض صحیح بودن A درست است.

بنابراین ثابت کردیم برای این‌که کالا را به قیمت حداقل Δ به $r_۳$ بفروشیم باید جمع یال‌های سیاه وارد شده به $r_۱$ دقیقاً $۲X$ واحد افزایش یابد. در ادامه ساختار گراف را دقیق‌تر توضیح می‌دهیم. هر جفت $p_i \in P$ شامل دو رأس به نام‌های a_i و b_i است. ارزش اولیه کالا نزد a_i را برابر $۲X + ۲i$ و نزد b_i برابر $۲X + ۲i + ۱$ قرار دهید. برای هر $۱ \leq i \leq n$ یک یال با اندازه $۲x_i$ از a_i به $r_۱$ و یک یال با اندازه x_i از a_i به $r_۳$ در گراف قرار دهید. دقت کنید که این یال‌ها همان یال‌های سیاه هستند و x_i عدد i-ام در مسئله جمع زیرمجموعه است. ساختار کلی گراف در شکل ۷.۳ نشان داده شده است.

در ادامه ارزش کالا نزد فرد i را در هر لحظه با B_i نشان می‌دهیم. دقت کنید که B_i ها در حال تغییر هستند چون نشان دهنده ارزش فعلی کالا نزد فرد هستند. پیشنهاد قیمت B_{a_n} در روز اول برای کالا متناظر با برداشتن x_n در جواب نهایی مسئله جمع زیرمجموعه است. دقت کنید که در این صورت ارزش کالا نزد $r_۱$ و $r_۳$ به میزان $۲x_i$ و x_i افزایش می‌یابد. همچنین یال‌هایی بین رأس‌های مجموعه‌ی P قرار می‌دهیم که پیشنهاد قیمت B_{b_n} برای کالا در روز اول معادل برنداشتن x_n در جواب نهایی مسئله جمع زیرمجموعه باشد. برای هر $i < n$ دو یال با وزن B_{b_n} از b_n به a_i و b_i به گراف اضافه می‌کنیم. بنابراین اگر در روز اول قیمت کالا را B_{a_n} یا B_{b_n} قرار دهیم در این صورت ارزش کالا برای تمامی رأس‌های دیگر P به اندازه‌ی حداقل B_{b_n} افزایش



شکل ۷.۳: ساختار کلی بازار گراف متناظر با مسئله جمع زیرمجموعه

می‌یابد. در این صوت اگر در روزهای بعدی قیمت کالا به اندازه کافی زیاد قرار دهیم دیگر رأس‌های a_n و b_n کالا را نمی‌خرند. بنابراین پیشنهاد قیمت B_{a_n} در روز اول متناظر با انتخاب x_i و پیشنهاد قیمت B_{b_n} متناظر با عدم انتخاب x_i در مسئله جمع زیرمجموعه خواهد بود.

برای این‌که بتوان این ایده را برای روزهای دیگر مثل روز i تعمیم داد از هر b_i دو یال با وزن $W_i = \sum_{k=i}^{n} B_{b_k}$ به تمام a_j ها و b_j هایی که $i < j$ قرار می‌دهیم. دقت کنید که B_{b_k} در $\sum_{k=i}^{n} B_{b_k}$ نشان‌دهنده ارزش کالا نزد فرد b_k در روز i-ام است. با توجه به مطالب گفته شده در لم بعدی نشان می‌دهیم که در صورت وجود زیرمجموعه‌ای از S با مجموع X می‌توان جمع یال‌های سیاه ورودی به $r_۱$ را برابر $۲X$ کرد.

لم ۱.۳.۳. *اگر زیرمجموعه‌ای از S با مجموع X وجود داشته باشد، می‌توانیم قیمت کالا را طوری تعیین کنیم که بعد از گذشت n روز و صرف‌نظر از یال‌های سفید ارزش کالا نزد $r_۱$ برابر $۲X + ۱$ و نزد $r_۳$ برابر $۲X$ شود.*

برهان. با توجه به مطالب گفته شده اثبات بدیهی است. فرض کنید زیرمجموعه مورد نظر با مجموع X زیرمجموعه‌ی S' باشد. در این صورت در روز $n + ۱ - i$ قیمت کالا را برابر B_{a_i} قرار می‌دهیم اگر $x_i \in S'$ و برابر B_{b_i} قرار می‌دهیم اگر $x_i \notin S'$. $\square$

فرض کنید n روز گذشته است و ارزش کالا نزد $r_۱$ برابر $۲X + ۱$ شده است. هدف این است که در سه روز به $r_۱$ سپس $r_۲$ و در نهایت به $r_۳$ بفروشیم. اما مشکل این‌جاست که اگر قصد فروش کالا به $r_۱$ با قیمت $۲X + ۱$ را داشته باشیم بعضی از رأس‌های مجموعه‌ی P نیز کالا را خواهند خرید و بر روی $r_۳$ تأثیر خواهند گذاشت. در این صورت برنامه مورد نظر ما دچار مشکل خواهد شد. برای حل این مشکل از یال‌های سفید کمک می‌گیریم. سه یال سفید با وزن $W = \sum_{i=۱}^{n} W_i$ از $b_۱$ به $r_۱$، $r_۲$ و $r_۳$ به گراف اضافه می‌کنیم. دقت کنید که W به مقدار کافی بزرگ است که ارزش کالا را نزد $r_۱$، $r_۲$ و $r_۳$ بعد از روز n از ارزش کالا نزد

تمام افراد P بیش‌تر باشد. به این ترتیب در روزهای $n+1$، $n+2$ و $n+3$ قیمت کالا را به ترتیب برابر $W+2X+1$، $W+2X+1$ و Δ قرار می‌دهیم.

در ادامه در لم بعدی ثابت می‌کنیم اگر جوابی برای مسئله وجود داشته باشد که حداقل به میزان Δ سود کند در این صورت زیرمجموعه‌ای از S با مجموع X وجود دارد. دقت کنید که Δ از جمع تمام یال‌ها و ارزش‌های اولیه کالا بیش‌تر است.

لم ۲.۳.۳. *اگر قیمت‌گذاری برای کالا وجود داشته باشد که فروشنده حداقل Δ سود کند آن‌گاه زیرمجموعه‌ای از S با مجموع X وجود دارد.*

برهان. فرض کنید قیمت‌گذاری با سود حداقل Δ وجود دارد. در این صورت حتماً کالا را به r_3 با قیمت حداقل Δ فروخته‌ایم. همان‌طور که بیان کردیم برای فروش با قیمت حداقل Δ به r_3 باید ابتدا به r_2 و قبل از آن به r_1 بفروشیم و در این صورت هم نشان دادیم که باید ارزش کالا نزد r_1 و r_3 دقیقاً $2X$ و X واحد افزایش یابد. در این صورت زیرمجموعه‌ای از S با مجموع X یافت شده است. □

در قضیه نتیجه اصلی این بخش را بیان می‌کنیم.

قضیه ۳.۳.۳. *الگوریتم تقریبی با ضریب α برای مسئله* Rapid(k) *وجود ندارد مگر آن‌که $P = NP$*

برهان. فرض کنید یک الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب α برای مسئله وجود دارد. گراف بازار را همان‌طور که گفته شده از روی مسئله جمع زیرمجموعه می‌سازیم. فرض کنید جمع تمام یال‌های گراف و ارزش اولیه رأس‌های در ابتدا برابر E باشد. در این صورت اگر کالا را با قیمت حداقل Δ به r_3 نفروشیم حداکثر به مقدار E سود خواهیم کرد. Δ را برابر $E(1+2\alpha)$ قرار می‌دهیم. در این صورت اگر الگوریتم تقریبی خروجی با سود کمتر مساوی E بدهد به این معنی است که جواب بهینه سودی کمتر مساوی αE داشته است و در نتیجه کالا را به قیمت کمتر از Δ به r_3 فروخته است. در این صورت می‌توان گفت که S زیرمجموعه‌ای با مجموع اعضای X ندارد. از طرفی اگر خروجی الگوریتم بیش از E باشد به این معنی است که حتماً کالا را با قیمت حداقل Δ به r_3 فروخته‌ایم. در این وضعیت با استفاده از لم ۲.۳.۳ می‌توان نتیجه گرفت زیرمجموعه‌ای از S با مجموع اعضای X وجود دارد. پس خروجی الگوریتم تقریبی بیش از E است اگر و تنها اگر جواب مسئله‌ی جمع زیرمجموعه «بله» باشد. □

۲.۳.۳ الگوریتم برای توزیع اولیه یکسان

همان‌طور که در بخش ۱.۳.۳ مشاهده کردیم، مسئله Rapid(k) حتی در حالتی که توابع ارزش خطی باشند بسیار سخت است و الگوریتم تقریبی برای حل آن وجود ندارد مگر $P \neq NP$. دقت کنید که توابع خطی هم

زیرپیمانه هستند و هم شرط یکنوا بودن میزان مخاطره را دارند. در ادامه یک محدودیت دیگر به مسئله اضافه می‌کنیم. در حقیقت فرض میکنیم توابع ارزش هم زیرپیمانه هستند، هم شرط یکنوا بودن میزان مخاطره را دارند و هم توزیع ارزش اولیه کالا برای تمام افراد جامعه یکسان و برابر است. برای این حالت از مسئله الگوریتمی ارائه می‌دهیم که ضریب تقریب آن برای k های ثابت لگاریتمی است. همچنین اگر برای عدد ثابت $c > ۰$ تعداد روزها از $n^{\frac{1}{c}}$ بیشتر باشد، ضریب تقریب الگوریتم عدد ثابت خواهد بود.

تابع توزیع ارزش اولیه کالا را $f_.$ و تابع تجمعی آن را $F_.$ در نظر بگیرید. قیمت $p_.$ قیمتی است که مقدار $p(۱ - F_.(p))$ را بیشینه می‌کند. در حقیقت $p_.$ قیمت بهینه برای فردی است که ارزش کالا برای آن فرد یک متغیر تصادفی است که تابع تجمعی آن $F_.$ می‌باشد. همچنین فرض کنید $p_{۱/۲}$ قیمتی است که $F_.(p_{۱/۲}) = ۰/۵$. به عبارت دیگر $p_{۱/۲}$ قیمتی است که اگر فروشنده آن را در روز اول پیشنهاد دهد، با توجه به یکسان بودن تابع توزیع ارزش اولیه کالا تقریباً نصف افراد جامعه کالا را می‌خرند. ایده اصلی الگوریتم به این صورت است که فروشنده به احتمال $\frac{۱}{۲}$ در روز اولی قیمت $p_.$ را پیشنهاد می‌دهد و دیگر قیمت را تغییر نمی‌دهد. همچنین به احتمال $\frac{۱}{۲}$ قیمت کالا را در روز اول برابر $p_{۱/۲}$ قرار می‌دهد. فرض کنید در این حالت مجموعه S در روز اول کالا را خریده‌اند و مجموعه $\bar{S}$ کالا را نخریده‌اند. می‌دانیم اندازه S به طور متوسط برابر نصف افراد جامعه است. ایده الگوریتم این است که برای فروش به مجموعه افراد $\bar{S}$ از تأثیر افراد S بر روی آن‌ها استفاده کنیم. در حقیقت اگر تنها تأثیرات نفرات مجموعه S بر روی فرد i را در نظر بگیریم، ارزش کالا از تابع تجمعی $F_i(S)$ می‌آید و فروشنده می‌تواند با تعیین قیمت مناسب به مقدار $R_i(S) = max_p p(۱ - F_i(p))$ سود کند. ایده اصلی الگوریتم این است که طوری قیمت‌ها را تعیین کند که فروشنده بتواند درصد خوبی از $\sum_{i \in \bar{S}} R_i(S)$ را بدست آورد. با اثبات این‌که $\sum_{i \in \bar{S}} R_i(S)$ تقریب خوبی از سود بهینه فروشنده است، می‌توان کارآیی الگوریتم را تضمین کرد. الگوریتم ۳ به طور دقیق چگونگی قیمت‌گذاری را نشان می‌دهد.

برای تحلیل دقیق الگوریتم ۳ باید ابتدا چند لم را ثابت کنیم.

لم ۴.۳.۳. *فرض کنید هر عضو مجموعه V را با احتمال حداقل p انتخاب کرده‌ایم و مجموعه S حاصل شده است. همچنین فرض کنید f یک تابع زیرپیمانه است که بر روی V تعریف شده است و داریم $f : ۲^V \to R$. در این صورت خواهیم داشت $E[f(S)] \geq pf(V)$* [۲۶].

لم ۵.۳.۳. *اگر ارزش کالا برای یک فرد توسط تابع توزیعی تعیین شود که دارای شرط یکنوا بودن میزان مخاطره است و کالا را با قیمت نزدیک‌بینانه به این فرد پیشنهاد دهیم، کالا را به احتمال حداقل $۱/e$ خواهد خرید* [۲۶].

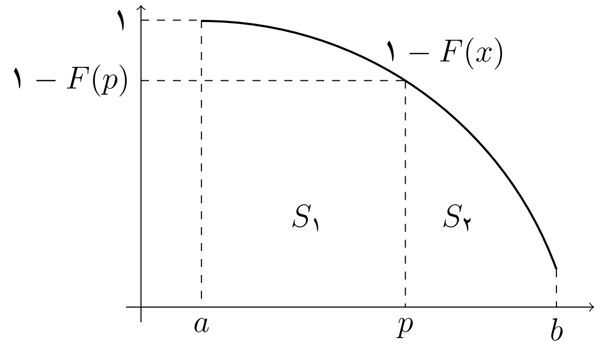
لم ۶.۳.۳. *فرض کنید تابع توزیع f با تابع چگالی F بر روی بازه‌ی $[a, b]$ تعریف شده است و دارای شرط یکنوا بودن میزان مخاطره است. فرض کنید متوسط مقدار f برابر μ و سود نزدیک‌بینانه آن $R = max_p p(۱ - F(p))$*

الگوریتم ۳ الگوریتم تقریبی برای مسئله قیمت‌گذاری سریع.

Compute a price p_0 which maximizes $p(1-F_0(p))$.
Compute a price $p_{1/2}$ such that $F_0(p_{1/2}) = 0.5$.
With probability $\frac{1}{2}$, let $c = 1$, otherwise $c = 2$.
if $c = 1$ **then**
    Set the price to p_0 on the first time step and terminate the algorithm.
else $\{c = 2\}$
    Post the price $p_{1/2}$ on the first time step.
    Let $\overline{S}$ be the set of buyers that do not buy in the first day, and let their optimal revenues be $R_1(V-\overline{S}) \geq R_2(V-\overline{S}) \geq \ldots \geq R_{|\overline{S}|}(V-\overline{S})$.
    Let p_j be the price which achieves $R_j(V-\overline{S})$, and Pr_j be the probability with which j accepts p_j for any $1 \leq j \leq |\overline{S}|$. Thus we have $R_j(V-\overline{S}) = p_j Pr_j$.
    Let $d_1 < d_2 < \ldots < d_{k-1}$ be the indices returned by Lemma 3.3.8 as an approximation of the area under the curve $R(V-\overline{S})$ maximizing $\sum_{j=1}^{k-1}(d_j - d_{j-1}) \cdot R_{d_j}(V-S)$ (assuming that $d_0 = 0$).
    Sort the prices $\frac{p_{d_j}}{e}$ for $1 \leq j \leq k-1$, and offer them in non-increasing order in days 2 to k.
end if

است. در این صورت خواهیم داشت $R(۱+e) \geq \mu$.

برهان. می‌دانیم $\mu = \int_a^b tf(t)dt = \int_a^b ۱ - F(t)dt$. این مقدار برابر سطح زیر منحنی $۱ - F(x)$ است. همچنین R مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی است که می‌توان زیر منحنی $۱ - F(x)$ قرار داد. فرض کنید p قیمتی باشد که مقدار $p(۱ - F(p))$ را بیشینه می‌کند و به عبارتی دیگر $R = p(۱ - F(p))$. مساحت زیر منحنی $۱ - F(x)$ را می‌توان به دو قسمت تقسیم کرد. قسمت اول مساحت زیر نمودار از a تا p است که آن را $S_۱$ و قسمت دوم مساحت زیر نمودار از p تا b است که آن را $S_۲$ می‌نامیم. این نواحی در شکل ۳.۸ نشان داده شده‌اند. با توجه به لم ۵.۳.۳ می‌توان نتیجه گرفت $۱ - F(p) \geq ۱/e$. پس می‌توان گفت $S_۱ \leq ۱ \times p \leq e(۱ - F(p))p = eR$.
تعریف می‌کنیم $h(q) = f(q)/(۱ - F(q))$. دقت کنید که p مقدار $q(۱ - F(q))$ را بیشینه می‌کند، پس مشتق $q(۱ - F(q))$ در نقطه p صفر است و می‌توان نوشت $(p(۱ - F(p)))' = ۱ - F(p) - pf(p) = ۰$ و در نتیجه $h(p) = ۱/p$. چون تابع f دارای شرط یکنوا بودن میزان مخاطره است، پس برای هر $p' \geq p$ داریم $h(p') \geq h(p) = ۱/p$، که نتیجه می‌دهد $f(p') \geq (۱ - F(p'))p$. با انتگرال گرفتن از p تا b خواهیم داشت $\int_p^b f(t)dt \geq \frac{۱}{p}\int_p^b ۱ - F(t)dt$. دقت کنید که $\int_p^b ۱ - F(t)dt$ برابر $S_۲$ و $\int_p^b f(t)dt$ برابر $۱ - F(p)$ است. بنابراین خواهیم داشت $S_۲ \leq p(۱ - F(p)) = R$. با تحلیل‌های گفته شده می‌توان نتیجه گرفت که مساحت زیر منحنی $۱ - F(x)$ که برابر $S_۱ + S_۲$ است، حداکثر برابر $eR + R = (۱ + e)R$ خواهد بود. دقت کنید که در ابتدا نشان دادیم که مساحت زیر منحنی $۱ - F(x)$ برابر μ است. □



شکل ۸.۳: منحنی تابع $1 - F(x)$. متوسط تابع f برابر مساحت زیر منحنی $1 - F(x)$ است که می‌توان آن را به دو قسمت S_1 و S_2 تقسیم کرد. p قیمتی است که مقدار $q(1 - F(q))$ را بیشینه می‌کند.

لم ۷.۳.۳ *مجموعه $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ را در نظر بگیرید. اگر $r = max_j j a_j$، آنگاه خواهیم داشت* $r \geq \sum_{j=1}^{m} a_j / \lceil \log(m+1) \rceil$.

برهان. اگر $r < \sum_{j=1}^{m} a_j / \lceil \log(m+1) \rceil$، به این معنی است که برای هر $1 \leq j \leq m$ مقدار a_j از $\sum_{j=1}^{m} a_j / (j \lceil \log(m+1) \rceil)$ کمتر است. در این صورت با جمع بر روی تمام j ها می‌توان نتیجه گرفت:

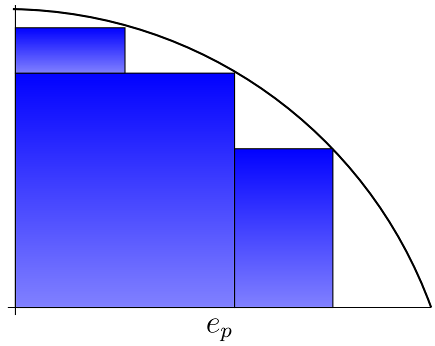
$$\sum_{j=1}^{m} a_j < (\sum_{j=1}^{m} a_j)(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j\ \lceil \log(m+1) \rceil})$$

که به معنی کمتر بودن $\lceil \log(m+1) \rceil$ از $\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}$ است که تناقض است. $\square$

لم ۸.۳.۳ *برای مجموعه $\{a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n\}$ فرض کنید $D = \{d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_k\}$ اندیس‌هایی باشند که مقدار $S(D) = \sum_{j=1}^{k} (d_j - d_{j-1}) a_{d_j}$ را بیشینه می‌کنند. در این صورت* $S(D) \in \Theta(\frac{\sum_i a_i}{\log_k n})$.

برهان. الگوریتمی ارائه می‌دهیم که به صورت مرحله‌ای مستطیل‌ها را انتخاب کند. انتخاب مستطیل‌ها به روشی است که بعد از m-امین مرحله توسط $4^m - 1$ مستطیل مجموع مساحتی $m/\log n$ پوشیده شده است. در ابتدای مرحله m-ام قسمت‌های پوشیده نشده به 4^{m-1} ناحیه مستقل قابل دسته‌بندی هستند. همچنین اندازه ضلع پایینی هر ناحیه حداکثر $n/(2^{m-1})$ است. الگورتیم هر کدام از این ناحیه‌ها را به صورت مستقل حل می‌کند. برای هر $1 \leq p \leq 4^{m-1}$ مقدار s_p نشان دهنده‌ی مساحت ناحیه p-ام و e_p نشان دهنده‌ی اندازه ضلع پایینی ناحیه p-ام هستند.

برای پوشانده هر ناحیه در مرحله m-ام از ۳ مستطیل کمک می‌گیریم. با استفاده از لم ۷.۳.۳ می‌توان نتیجه گرفت که می‌توان با یک مستطیل حداقل $1/\log e_p$ کل مساحت یک ناحیه را پوشاند. به این ترتیب با قرار دادن یک مستطیل یک ناحیه به دو ناحیه تقسیم می‌شود. در هر یک از این دو ناحیه یک مستطیل به گونه‌ای قرار می‌دهیم که ضلع پایین هر ناحیه دقیقاً نصف شود. به این ترتیب هر ناحیه به چهار ناحیه کوچکتر



شکل ۹.۳: نحوه پوشاندن یک ناحیه با سه مستطیل با توجه به روش لم ۸.۳.۳. مساحت زیر نمودار برابر s_p و اندازه ضلع پایینی برابر e_p است

تقسیم می‌شود که اندازه ضلع پایینی هر یک حداقل نصف ضلع ناحیه اولیه است. برای مشاهده نحوه قرار دادن ۳ مستطیل در یک ناحیه در شکل ۹.۳ نشان داده شده‌است. دقت کنید با توجه به روش قرار دادن مستطیل‌ها، شروط برای اجرای مرحله بعد مهیا است.

در ادامه مساحتی که در هر مرحله پوشانده می‌شود را محاسبه می‌کنیم. با استفاده از لم ۷.۳.۳ می‌توان نتیجه گرفت که مساحتی که در هر مرحله پوشانده می‌شود حداقل $\sum_p \frac{s_p}{\log e_p}$ است. با توجه به این‌که $e_p \leq \frac{n}{۲^{m-۱}}$، می‌توان نتیجه گرفت $\sum_p \frac{s_p}{\log e_p} \geq \frac{\sum_p s_p}{\log n-(m-۱)}$. بنابراین کل مساحت پوشانده شده بعد از m مرحله با این فرض که در مرحله i حداقل $\frac{۱}{\log n-(i-۱)}$ مساحت باقیمانده پوشانده می‌شود حداقل برابر است با:

$$\sum_{i=۱}^{m} \frac{۱}{\log n-(i-۱)} \cdot \frac{\log n-(i-۱)}{\log n} = \frac{m-۱}{\log n}$$

دقت کنید که اگر در مرحله i بیش از $\frac{۱}{\log n-(i-۱)}$ پوشانده شود، الگوریتم در نهایت بعد از مرحله m باز هم حداقل $\frac{m-۱}{\log n}$ از مساحت کل را می‌پوشاند. بنابراین بعد از m مرحله $k = ۴^m - ۱$ مستطیل داریم و حداقل $\Theta(\frac{\log k}{\log n}) = \frac{m-۱}{\log n}$ از مساحت کل را پوشانده‌ایم. □

قضیه ۹.۳.۳. *ضریب تقریب الگوریتم ۳ برابر $O(\log_k n)$ است.*

برهان. برای ساده سازی فرض کنید می‌توانیم $k+۱$ قیمت تعیین کنیم. در حالتی که در الگوریتم $c = ۱$ باشد، قیمت نزدیک‌بینانه را پیشنهاد می‌دهیم. در این حالت متوسط سود هر فرد R. و در نتیجه متوسط سود کل nR. است. در ادامه حالت $c = ۲$ را بررسی می‌کنیم. روز دوم قیمت‌گذاری را در نظر بگیرید. با توجه به لم ۵.۳.۳ می‌دانیم هر فرد باقیمانده در بازار، قیمت نزدیک‌بینانه را با احتمال حداقل $۱/e$ قبول می‌کند. بنابراین برای هر $j \in \bar{S}$ داریم $Pr_j \geq ۱/e \geq Pr_i/e$. همچنین با توجه به اینکه $R_j(V-\bar{S})$ را به ترتیب نزولی مرتب کردیم، برای $j \leq i$ خواهیم داشت: $R_j(V-\bar{S}) \geq R_i(V-\bar{S}) = p_i Pr_i \geq p_i/e$. از طرفی دیگر بدیهی است که $R_j(V-\bar{S}) = p_j Pr_j \leq p_j$. بنابراین می‌توان برای $j \leq i$ نتیجه گرفت $p_j \geq p_i/e$. دقت

کنید که اگر به فرد j کالا را با قیمت p_j ارائه دهیم، آن را به احتمال $Pr_j \geq Pr_i/e$ خواهد خرید. پس اگر کالا را با قیمت p_i/e که کمتر یا مساوی p_j است ارائه دهیم، آن را به احتمال حداقل Pr_i/e می‌خرد.

در ادامه فرض کنید می‌خواهیم افراد را به k گروه تقسیم کنیم و به افراد هر گروه یک قیمت پیشنهاد دهیم. همچنین از تأثیراتی که افراد این گروه‌ها بر روی یکدیگر دارند صرف‌نظر می‌کنیم. در حقیقت k اندیس $d_۱ < d_۲ < \cdots < d_k$ را طوری بدست می‌آوریم که مقدار زیر بیشینه شود.

$$\sum_{j=۱}^{k}(d_j - d_{j-۱}) \cdot R_{d_j}(V - \overline{S})$$

فرض کنید D_i مجموعه افرادی مانند y باشند که $d_{i-۱} < y \leq d_i$. همان‌طور که در بالا نشان دادیم اگر به هریک از این افراد کالا را با قیمت p_{d_i}/e ارائه دهیم، به احتمال حداقل Pr_{d_i}/e آن را می‌خرد. بنابراین متوسط سود برای هر فرد در مجموعه D_i برابر $Pr_{d_i}/e \times p_{d_i}/e = R_{d_i}(V - \bar{S})/e^۲$ است که با استفاده از لم ۳.۳.۸ می‌توان نتیجه گرفت این مقدار $\sum_i R_i(V - \bar{S})/e^۲ \cdot \Theta(\frac{\log k}{\log n})$ است. نکته قابل توجه اینجاست که اگر با پیشنهاد قیمت p متوسط سودی که از فرد y به دست می‌آید برابر R باشد، این سود هنگامی که یک دنباله غیر صعودی P از قیمت‌ها که شامل p است را به فرد y پیشنهاد دهیم کاهش نمی‌یابد. بنابراین می‌توانیم قیمت‌هایی که به گروه‌های مختلف پیشنهاد می‌دهیم را به ترتیب نزولی مرتب کنیم و قیمت‌ها را به تمام گروه‌ها پیشنهاد دهیم.

دقت کنید که زمانی که $c = ۲$ است، هر فرد در روز اول با احتمال ۱/۲ کالا را می‌خرد. پس با استفاده از لم ۴.۳.۳ می‌توان نتیجه گرفت که هر فردی که کالا را در روز اول نمی‌خرد یک تأثیر با متوسط حداقل $R_i(V)/۲$ از افرادی که کالا را از روز اولی خریده‌اند دریافت می‌کند.

در نهایت متوسط سود الگوریتم ارائه شده را محاسبه می‌کنیم. سود الگوریتم به احتمال ۱/۲ که مقدار $c = ۱$ می‌شود برابر $\sum_i R_. = nR.$ است. در حالتی که $c = ۲$ میشود، سود الگوریتم حداقل $\sum_i R_i(V) \cdot (۱/۸) \cdot \Theta(\frac{\log k}{\log n})$ است. دقت کنید که به احتمال ۱/۲ مقدار c برابر ۲ می‌شود. همچنین یک فرد به احتمال ۱/۲ در روز اول نمی‌خرد و در مجموعه $\bar{S}$ قرار می‌گیرد و در نهایت برای هر فرد $i \in \bar{S}$ متوسط مقدار $R_i(V - \bar{S})$ حداقل $R_i(V)/۲$ خواهد بود. همچنین با روشی که ارائه دادیم مقدار $\Theta(\frac{\log k}{\log n})$ از سود بهینه که می‌توان بعد از روز اول بدست آورد را کسب کرده‌ایم. دقت کنید که متوسط سودی که می‌توان از فرد i به دست آورد حداکثر برابر $F(F.) + E(F_{i,V})$ است. بنابراین با استفاده از لم ۶.۳.۳ می‌توان گفت این مقدار حداکثر $(۱ + e)R. + (۱ + e)R_i(V)$ است و در نتیجه ضریب تقریب الگوریتم $\Theta(\log_k n)$ است. □

دقت کنید که اگر k یک عدد ثابت باشد، یک الگوریتمی با ضریب تقریب لگاریتمی طراحی کرده‌ایم. همچنین اگر برای مقدار ثابت c تعداد روزها از $n^{\frac{۱}{c}}$ بیشتر باشد، الگوریتم با ضریب تقریب $\Theta(c)$ ارائه داده‌ایم.

کو

۴.۳ نتیجه‌گیری و کارهای آتی

در این فصل به بررسی بازارهای با قیمت عمومی و در حالتی پرداختیم که افراد جامعه آینده‌نگر نیستند. مشاهده کردیم که چگونگی قیمت‌گذاری به سرعت انتشار اخبار بسیار وابسته است. در حقیقت نشان دادیم در صورتی که تأثیرات افراد در جامعه به سرعت پخش شود، طراحی الگوریتم بهینه قیمت‌گذاری در زمان چندجمله‌ای قابل انجام است. ولی در حالتی که تأثیرات به کندی در جامعه انتشار پیدا کند، طراحی الگوریتم بهینه بسیار سخت خواهد شد.

همان‌طور که دیدیم در مسئله Basic(k) قیمت کالا در طول زمان غیرصعودی بود. این مسئله باعث می‌شود افرادی که خواهان خرید کالا هستند هوشمندانه رفتار کنند و در بسیاری از موارد منتظر بمانند تا قیمت کالا کاهش پیدا کند. در حقیقت اگر خریدارها از نحوه رفتار فروشنده در مسئله Basic(k) با خبر باشند در بسیاری از موارد حتی در صورتی که ارزش کالا نزد آن‌ها از قیمت کالا بیشتر باشد صبر می‌کنند. در این صورت این امکان وجود دارد که قیمت کالا در آینده کاهش پیدا کند و کالا را با قیمت پایین‌تری خریداری کنند. در این موارد نوعی بی‌اعتمادی نسبت به فروشنده در بازار به وجود می‌آید که برای اعتبار فروشنده بسیار مضر است. به همین دلیل فروشنده‌ها در بسیاری از موارد سعی دارند که قیمت کالایشان را در طول زمان کاهش ندهند. می‌توان برای این موارد مسئله جدیدی مطرح نمود که بسیار جالب است:

- **Increase(k):** در این مسئله فروشنده می‌تواند قیمت کالا را در k روز تعیین کند ولی هنگامی که قیمت در یک روز تعیین شد به بازار اجازه نمی‌دهیم به حالت پایدار برسد و تنها تغییرات یک مرحله را اعمال می‌کنیم. هم‌چنین قیمت کالا باید در طول زمان غیر نزولی باشد و هیچ گاه کاهشی در قیمت کالا مشاهده نکنیم. این مسئله همان مسئله Rapid(k) است به اضافه این محدودیت که قیمت کالا باید در طول زمان کاهش پیدا نکند.

مسئله‌هایی که تا به این‌جا در این رساله مورد بررسی قرار داده‌ایم مربوط به قیمت‌گذاری عمومی بوده است. ولی در بسیاری کاربردها قیمت‌گذاری خصوصی در عمل دیده می‌شود. برای مثال بازاری را در نظر بگیرید که خریدار در یک لحظه برای خرید کالا مراجعه می‌کند. در این لحظه اگر با قیمت پیشنهاد شده برای خرید کالا موافق بود، آن را خریداری می‌کند. در غیر این صورت آن را خریداری نمی‌کند و دیگر امکان خریداری آن را ندارد. در این مثال این امکان وجود دارد که قیمت‌گذاری به صورت خصوصی انجام شود. در مقاله‌های قبلی [۲۶] نیز مسئله‌ای با قیمت‌گذاری خصوصی بررسی شده است. در قیمت‌گذاری خصوصی یک جایگشت از افراد وجود دارند که به ترتیب وارد بازار می‌شوند و فروشنده به هر یک قیمتی را پیشنهاد می‌دهد. دقت کنید که قیمت‌ها می‌توانند متفاوت باشند. می‌توان مسئله‌های مختلفی با توجه به سؤال‌های مقابل مطرح کرد: *آیا ترتیب ورود افراد می‌تواند توسط فروشنده تعیین شود؟ آیا قیمت کالا برای همه یکسان است؟* مسئله‌های زیر با

قیمت‌گذاری خصوصی برای ادامه کار پیشنهاد می‌شود:

- این مسئله که فروشنده می‌تواند ترتیبی برای ورود افراد تعیین کند و به هر یک قیمتی را پیشنهاد دهد در [۲۶] بررسی شده است. در این مقاله فرض شده است که افراد روی یکدیگر تأثیر منفی در خرید کالا نمی‌گذارند. بررسی سختی مسئله در حالت کلی که افراد روی یکدیگر تأثیر منفی داشته باشند جالب به نظر می‌رسد.

- فرض کنید ترتیب ورودی افراد به دست فروشنده نیست. فروشنده تنها می‌تواند قیمت کالا را برای هر فرد تعیین کند. در این صورت قیمت کالا را چگونه تعیین کند؟ این مسئله را در این رساله در فصل ۴ به طور کامل مطالعه می‌کنیم.

در این فصل بازارهایی را مطالعه کردیم که افراد جامعه آینده‌نگر نیستند. به نظر می‌رسد مطالعه بازارهایی که افراد در آن هوشمندانه‌تر عمل می‌کنند به واقعیت نزدیک‌تر باشد. در این بازارها افراد با توجه به سابقه هر شرکت، تخمینی از رفتار فروشنده در آینده دارد و در نتیجه در خرید کالای خود هوشمندانه‌تر عمل می‌کنند. بررسی این بازارها بسیار مفید به نظر می‌رسد. در این رساله و در فصل‌های ۵ و ۶ مدل‌هایی برای افراد آینده‌نگر ارائه شده است. هم‌چنین در [۱۱] مدل دیگری ارائه شده است که افراد هوشمندانه عمل می‌کنند.
در این فصل الگوریتم قیمت‌گذاری و نحوه تغییر قیمت‌ها در بازاری مورد بررسی قرار گرفت که تنها یک فروشنده در بازار وجود دارد. وجود چندین فروشنده که با یکدیگر رقابت میکنند و هر یک به دنبال جذب مشتری است، باعث تغییر در چگونگی قیمت‌گذاری کالا خواهد شد. این موضوع که قیمت یک کالا در بازار و بدون تأثیرات اجتماعی با وجود رقابت بین شرکت‌های مختلف چگونه تغییر پیدا می‌کند در اقتصاد به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفت است. بررسی مسئله مطرح شده در این فصل با توجه به رقابت بین فروشنده‌ها مفید به نظر می‌رسد.

فصل ۴

بازارهای برخط

۱.۴ مقدمه

در این فصل بازارهایی با یک فروشنده را بررسی می‌کنیم که خریداران به صورت برخط وارد بازار می‌شوند و هنگامی که یک خریدار وارد بازار می‌شود، فروشنده قیمتی را برای محصول خود ارائه می‌دهند. بازاری را در نظر بگیرید که یک فروشنده می‌خواهد کالای تولیدی خود را به مجموعه V با n نفر فروش برساند. هزینه تولید کالا c است و فروشنده می‌تواند هر تعدادی از کالا را تولید کند. هر خریدار نیز حداکثر یک واحد از کالا را می‌خواهد و علاقه‌مند به خرید بیش از یک واحد از کالا نیست. هدف فروشنده تعیین قیمت برای کالا به گونه است که سود خود را بیشینه کند. همانند فصل قبل و در حضور تأثیرات اجتماعی، ارزش کالا برای فرد i تابعی از افرادی است که قبل از فرد i کالا را خریده‌اند. به عبارتی دقیق‌تر ارزش کالا برای فرد i با تابع $v_i : ۲^V \to \mathbb{R}^+$ نشان داده می‌شود که $v_i(S)$ ارزش کالا برای فرد i است در صورتی که مجموعه افراد S قبل از او کالا را داشته باشند. این تابع به نوعی تأثیر افراد بر روی یکدیگر در اجتماع را مدل می‌کند. در این فصل نیز بازار با تأثیرات مثبت را بررسی می‌کنیم.

یک مدل معروف در مطالعه تأثیرات اجتماعی، *مدل خطی تأثیرات* است. این مدل در چندین تحقیق مورد استفاده قرار گرفته است و دلایل مختلف برای مناسب بودن این مدل در تأثیرات اجتماعی ارائه شده است [۷، ۱۱، ۱۳]. تعریف این مدل در ادامه آمده است:

تعریف ۱.۱.۴. مدل خطی: در این مدل تأثیر افراد با یک گراف وزن‌دار مدل شده است. در حقیقت تأثیر فرد i بر روی فرد j با وزن یال $e(i,j)$ نشان داده می‌شود. وزن یال $e = (i,j)$ را با $w_{i,j}$ نشان می‌دهیم. در این‌صورت برای هر فرد i و زیرمجموعه S از رئوس مقدار تابع ارزش $v_i(S)$ برابر $v_i(S) = v_i(\emptyset) + \sum_{j\in S} w_{j,i}$. مقدار $v_i(\emptyset)$ ارزش اولیه کالا برای فرد i را و $w_{j,i}$ میزان تأثیر فرد j بر روی فرد i را نشان می‌دهند. دقت کنید

که اگر یالی از رأس j به i وجود نداشته باشد، مقدار $w_{j,i}$ را برابر صفر در نظر می‌گیریم. مدل خطی متقارن شبیه مدل خطی تعریف می‌شود به علاوه اینکه برای هر دو رأس i و j خواهیم داشت $w_{j,i} = w_{i,j}$.

بازارهای برخط: بازاری را در نظر بگیرید که افراد به صورت برخط وارد بازار می‌شوند. به طور مشخص، در زمان t فرد i وارد بازار می‌شود و هنگام ورودش فروشنده کالا را با قیمت p_i به این فرد پیشنهاد می‌دهد. فرد i کالا را می‌خرد اگر و تنها اگر $p_i \leq v_i(S_t)$، که S_t مجموعه افرادی را نشان می‌دهد که در زمان t کالا را دارند. فرض کنید $\pi = (\pi_۱, \pi_۲, \cdots, \pi_n)$ یک جایگشت بر روی افراد بازار باشد و در حقیقت ترتیب ورود افراد به بازار را تعیین می‌کند. به بیانی دیگر فرد π_t در زمان t وارد بازار می‌شود. هنگام ورود یک فرد، فروشنده اطلاعی از ترتیب افرادی که در آینده وارد بازار می‌شوند ندارد. در حقیقت تمام جایگشت‌های ممکن از افرادی که در آینده وارد بازار می‌شوند به احتمال یکسان اتفاق می‌افتند. هدف فروشنده تعیین قیمت کالا به گونه ای است که متوسط سودش بیشینه شود.

یک مسئله مهمی که در مدل سازی بازاهای برخط در نظر می‌گیریم، نحوه تعیین قیمت توسط فروشنده است. در بسیاری از بازارها فروشنده می‌تواند قیمت‌های متفاوتی به افراد مختلف پیشنهاد دهد. همان‌طور که قبلاً هم اشاره شد، پیشنهاد قیمت متفاوت برای افراد مختلف می‌تواند سود فروشنده را زیاد کند. از طرفی پیشنهاد قیمت‌های متفاوت ممکن است باعث به وجود آمدن عدم اعتماد نسبت به فروشنده شود و نتایج بدی در بلند مدت برایش داشته باشد [۳۸]. در چنین شرایطی فروشنده ترجیح می‌دهد یک قیمت واحد برای کالا تعیین کند. در این مسئله هدف فروشنده پیدا کردن یک قیمت p برای کالا است و برای هر $i \neq i'$ خواهیم داشت $p_i = p'_i$. از طرفی دیگر در مسئله تعیین قیمت‌های متفاوت فروشنده می‌تواند قیمت‌های متفاوت به افراد مختلف پیشنهاد دهد. در این مسئله زمانی که فرد i وارد بازار می‌شود، فروشنده به این فرد قیمت اختصاصی p_i را برای خرید کالا پیشنهاد می‌دهد. دقت کنید که پیشنهاد قیمت توسط فروشنده وابسته به گذشته است به این معنی که به چگونگی خرید یا عدم خرید کالا توسط افراد قبل از فرد i مرتبط است.

یک استراتژی قیمت‌گذاری یک بردار $\mathbf{p} = (p_۱, p_۲, \cdots, p_n)$ است و نتیجه استراتژِی چگونگی خرید کالا توسط افراد جامعه است. به بیانی دیگر نتیجه استراتژی $\mathbf{p}$ توسط مجموعه $U(\mathbf{p})$ که نشان دهنده‌ی افرادی است که کالا را خریده اند معلوم می‌شود. در شرایطی که فروشنده فقط یک قیمت به تمام افراد پیشنهاد دهد، از عدد p به جای بردار $\mathbf{p}$ استفاده می‌کنیم. سود فروشنده از انتخاب استراتژی قیمت‌گذاری $\mathbf{p}$ برابر $R(\mathbf{p}) = \sum_{i \in U(\mathbf{p})} p_i - c|U(\mathbf{p})|$ است، که $\sum_{i \in U(\mathbf{p})} p_i$ برابر پولی است که از فروش کالا بدست می‌آورد و $c|U(\mathbf{p})|$ برابر هزینه تولید کالا است. هدف در این فصل به دست آوردن یک استراتژی قیمت‌گذاری برای بیشینه کردن سود فروشنده در بازارهای برخط است.

ابتدا نشان می‌دهیم بدون لطمه به کلیت مسئله می‌توان مسئله را برای حالتی که هزینه تولید صفر است حل نمود. اگر ارزش کالا برای فرد i را برابر $v'_i(S) = v_i(S) - c$ در نظر بگیریم و فرض کنید فروشنده قیمت

$p'_i = p_i - c$ را به جای p_i به شخص i پیشنهاد داده است، واکنش فرد i به قیمت بدون تغییر باقی می‌ماند. در حقیقت $p_i \leq v_i(S)$ اگر و تنها اگر $p'_i \leq v'_i(S)$. بنابراین مجموعه افرادی که کالا را می‌خرند ثابت می‌ماند و خواهیم داشت $U(\mathbf{p}) = U(\mathbf{p}')$. اگر هزینه تولید کالا را برای استراتژی قیمت‌گذاری $\mathbf{p}'$ در نظر نگیریم، سود فروشنده برابر $\sum_{i \in U(\mathbf{p}')} p'_i$ است که این مقدار با $\sum_{i \in U(\mathbf{p})} p_i - c|U(\mathbf{p})|$ برابر است. به بیانی دیگر یک تناظر یک به یک بین این دو بازار وجود دارد. بنابراین در ادامه این فصل هزینه تولید کالا را برابر صفر در نظر می‌گیریم و از طرفی فرض می‌کنیم مقدار $v_i(S)$ بتواند منفی باشد.

در ادامه نتایج بدست آمده در این تحقیق را بیان می‌کنیم. همچنین به دلیل این‌که مدل ارائه شده در این فصل در ادامه مدل ارائه شده در فصل ۳ است برای مشاهده کارهای مشابه انجام شده در این زمینه به بخش ۳.۲.۱ مراجعه کنید.

۴.۱.۱ نتایج بدست آمده

در این فصل بازارهای برخط را در دو حالت مورد مطالعه قرار می‌دهیم. حالت اول این‌که قیمت کالا ثابت باشد و حالت دوم این‌که فروشنده بتواند قیمت‌های متفاوت به افراد مختلف پیشنهاد دهد. ابتدا در بخش ۴.۲ بازاری را در نظر می‌گیریم که فروشنده یک قیمت برای کالا تعیین می‌کند و آن را در طول زمان تغییر نمی‌دهد. در این بخش یک الگوریتم FPTAS برای بدست آوردن قیمت بهینه کالا ارائه می‌کنیم. ایده الگوریتم محدود کردن گزینه‌های قیمت بهینه و استفاده از روش نمونه‌برداری است. همچنین ثابت می‌کنیم پیدا کردن قیمت بهینه در زمان چند جمله‌ای $NP - Hard$ است.

سپس در بخش ۴.۳ بازاری را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که فروشنده می‌تواند به افراد مختلف قیمت‌های متفاوت ارائه دهد. ابتدا ثابت می‌کنیم پیدا کردن الگوریتم تقریبی برای این مسئله غیر ممکن است. در حقیقت نشان می‌دهیم نمی‌توان الگوریتمی ارائه کرد که سود بهینه را که با فرض دانستن ترتیب ورود افراد به دست می‌آید، تقریب بزند. در ادامه بخش بازارهایی را مطالعه می‌کنیم که تأثیرات در آن‌ها متقارن است. در این بازارها تأثیر افراد بر روی یکدیگر دوطرفه است. با استفاده از الگوریتم پیدا کردن شار بیشینه در یک شبکه شار الگوریتمی طراحی می‌کنیم که قیمت‌های بهینه را در این حالت به دست آورد. در حقیقت با استفاده از این الگوریتم می‌توان هنگام ورود هر فرد بهترین قیمت ممکن را به آن فرد پیشنهاد داد. در نهایت در بخش ۴.۳.۳ الگوریتم مکاشفه‌ای مناسب برای حالتی که تأثیرات غیرمتقارن است، ارائه می‌دهیم. ایده اصلی این الگوریتم مکاشفه‌ای استفاده همزمان از الگوریتم پیدا کردن بیشینه شار و روش نمونه‌برداری است. در نتایج تجربی مشاهده می‌شود که عملکرد این الگوریتم بسیار مناسب است.

شایان ذکر است که قسمتی از نتایج تحقیق آورده شده در رساله کارشناسی آقای خواجه‌نژاد دیده می‌شود

.[۱]

۲.۴ قیمت یکتا

در این بخش مسئله پیدا کردن بهترین استراتژی قیمت‌گذاری برای بازارهای برخط و در شرایطی که فروشنده یک قیمت واحد برای کالا تعیین می‌کند را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا یک الگوریتم FPTAS برای پیدا کردن قیمت بهینه ارائه می‌دهیم. ایده اصلی این الگوریتم محدود کردن گزینه‌های قیمت بهینه و استفاده از روش نمونه‌برداری است. سپس ثابت می‌کنیم بدست آوردن قیمت بهینه به صورت دقیق یک مسئله NP-Hard است.

مشکل اصلی در مسئله بهترین قیمت کالا این است که گزینه‌های مناسبی برای قیمت بهینه در اختیار نداریم. به این منظور فضای جستجوی خود را گسسته می‌کنیم به این معنی که تنها قیمت‌های به صورت $(1+\epsilon)^i$ را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که اگر تنها قیمت‌های به صورت $(1+\epsilon)^i$ را بررسی کنیم، از مقدار بهینه زیاد دور نخواهیم شد. فرض کنید R_p و U_p دو متغیر تصادفی و به ترتیب نشان‌دهنده‌ی سود و تعداد افرادی از جامعه هستند که کالا را با قیمت p خریداری می‌کنند. دقت کنید که چون ترتیب ورود افراد به بازار مشخص نیست و تصادفی است، مقدار R_p و U_p نیز مقدار مشخصی ندارند و دو متغیر تصادفی هستند. مشکل دیگر در راه طراحی الگوریتم برای این مسئله این است که نمی‌توان به راحتی مقدار متوسط R_p را بدست آورد. برای حل این مشکل از ایده نمونه برداری استفاده می‌کنیم. دقت کنید که برای متغیرهای تصادفی R_p و U_p داریم $R_p = p \times U_p$. بنابراین می‌توان متوسط R_p را با محاسبه متوسط U_p به دست آورد. متوسط مقدار U_p را نیز با استفاده از نمونه برداری محاسبه می‌کنیم. در حقیقت به تعداد مناسب بازار را شبیه‌سازی می‌کنیم و در هر شبیه‌سازی ترتیب ورود افراد به بازار را به دست می‌آوریم. به مشخص شدن ترتیب ورود افراد به بازار می‌تواند U_p را به راحتی محاسبه نمود. با تکرار این کار و شبیه‌سازی بازار به تعداد مناسب و متوسط‌گیری از مقدارهای بدست آمده برای U_p، می‌توان تخمین خوبی از متوسط U_p بدست آورد. در ادامه در لم ۱.۲.۴ نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان $E[U_p]$ را با احتمال زیاد و در زمان چند جمله‌ای تخمین زد.

فرض کنید $L_i = min_S\{v_i(S)|v_i(S) > 0\}$، کم‌ترین قیمت مثبتی باشد که ممکن است فرد i کالا را با آن قیمت خریداری کند. دقت کنید که اگر قیمت کالا برابر $0 < p < p_{min} = min_i L_i$ باشد، می‌توان آن را به p_{min} افزایش داد بدون اینکه تغییری در مجموعه‌ی خریداران ایجاد شود. از طرفی دیگر فرض کنید j اولین فردی است که کالا را خریداری کرده است. بنابراین قیمت کالا از $p_j(\emptyset)$ بیش‌تر نبوده است. پس می‌توان نتیجه گرفت که اگر قیمت کالا از $p_{max} = max_i\{v_i(\emptyset)\}$ بیش‌تر باشد، هیچ فردی کالا را نمی‌خرد. بنابراین قیمت بهینه در بازه‌ی $[p_{min}, p_{max}]$ قرار دارد. الگوریتم ۴ برای مسئله تعیین قیمت یکتا را در نظر بگیرید.

الگوریتم ۴ الگوریتم FPTAS برای مسئله تعیین قیمت یکتا

```
p_min ← min_i{Lower_i}
p_max ← max_i{v_i(∅)}
for i = 0 to log_{1+ε} p_max/p_min do
    q ← p_min(1 + ε)^i
    Compute the estimated value of U(q) using sampling technique. Name this value U_e(q).
end for
return argmax_q q U_q^e
```

نامساوی چرنف-هافدینگ: [1] فرض کنید $X_۱, X_۲, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و با توزیع یکسان باشند که بر روی $[۰, ۱]$ تعریف شده‌اند و متوسط X_i برابر $\mu = E[X_i]$ باشد. متغیر تصادفی $\bar{X}$ را برابر متوسط مقدار X_i ها تعریف می‌کنیم. برای هر مقدار $۰ < \epsilon < ۱$ خواهیم داشت: $Pr[|\overline{X} - \mu| > \epsilon\mu] \leq ۲e^{-\frac{\epsilon^۲ n\mu}{۳}}$.

لم ۴.۲.۱. *برای هر $۰ < \epsilon$ و $\delta' < ۱$ یک الگوریتم نمونه‌برداری با اجرای $O(\frac{n}{\epsilon^۲}\log\frac{۱}{\delta'})$ وجود دارد که به ازای هر $p_{min} \leq p \leq p_{max}$ مقدار $\bar{U}_p$ را طوری حساب می‌کند که $Pr(|\overline{U}_p - E[U_p]| > \epsilon E[U_p]) \leq \delta'$.*

برهان. فرض کنید $k = argmax_i\{v_i(\emptyset)\}$. بنابراین اگر قیمت کالا $p \leq p_{max} = v_k(\emptyset)$ باشد، فرد k حتماً کالا را خریداری می‌کند. بنابراین متغیر تصادفی $U(p)$ در تمام نمونه‌ها بزرگ‌تر مساوی ۱ است. مقدارهای $\mu_p = E[U_p]$ و $Y_p = \frac{U_p}{n}$ را در نظر بگیرید. مقدار Y_p را با اجرای m نمونه بدست می‌آوریم و $\bar{Y}_p$ را برابر متوسط این m مقدار قرار می‌دهیم. با توجه به تعریف Y_p می‌توان نتیجه گرفت $\bar{U}_p = n\bar{Y}_p$. با استفاده از نامساوی چرنف-هافدنیگ می‌توان نتیجه گرفت:

$$Pr(|\overline{U}_p - \mu_p| > \epsilon\mu_p) = Pr(|\overline{Y}_p - \frac{\mu_p}{n} > \epsilon\frac{\mu_p}{n}) \leq ۲e^{-\frac{\epsilon^۲ m\mu_p}{۳n}}$$

بنابراین با قرار دادن $m = \frac{۳n}{\epsilon^۲\mu_p}\log(\frac{۲}{\delta'})$ می‌توان مقدار $E[U_p]$ را با خطای ϵ و با احتمال حداقل $۱ - \delta'$ تخمین زد. دقت کنید که $\mu_p \geq ۱$. پس $m \in O(\frac{n}{\epsilon^۲}\log\frac{۱}{\delta'})$. □

قضیه ۴.۲.۲. *برای هر $۰ < \epsilon$ و $\delta < ۱$، الگوریتم ۴ با اجرای $O(\frac{n}{\epsilon^۲}\log\frac{۱}{\delta}\log_{۱+\epsilon}^{p_{max}/p_{min}})$ نمونه قیمت p_{ALG} را با احتمال $۱ - \delta$ طوری محاسبه می‌کند که $E[R_{p_{ALG}}] \leq E[R_{p_{OPT}}]\frac{۱-\epsilon}{(۱+\epsilon)^۲}$.*

برهان. فرض کنید p_{OPT} جواب بهینه و برای هر $۰ \leq i \leq k = \log_{۱+\epsilon} p_{max}/p_{min}$ داریم $p_i = p_{min}(۱+\epsilon)^i$. در این صورت یک عدد j وجود دارد که $p_j \leq p_{OPT} < p_{j+۱}$. فردی که کالا را با قیمت p_{OPT} خریده است حتماً آن را با قیمت p_j هم می‌خرد. بنابراین برای هر اجرای نمونه تصادفی خواهیم داشت

[1] Chernoff-Hoeffding Bound

$U_{p_j} \geq U_{p_{OPT}}$ و در نتیجه $E[U_{p_j}] \geq E[U_{p_{OPT}}]$. دقت کنید که $p_{OPT} < p_{j+1} = p_j(1+\epsilon)$ و برای هر قیمت دلخواه $E[R_p] = pE[U_p]$. بنابراین میتوان نتیجه گرفت $E[R_{p_j}] \geq \frac{1}{1+\epsilon}E[R_{p_{OPT}}]$. لم ۱.۲.۴ را با مقدار $\delta' = \frac{\delta}{k+1}$ در نظر بگیرید. فرض کنید f_i مقدار تقریبی حساب شده برای $E[R_{p_i}] = p_iE[U_{p_i}]$ با استفاده از لم ۱.۲.۴ با مقدار $\delta' = \frac{\delta}{k+1}$ باشد. بنابراین برای هر i مقدار f_i به احتمال حداکثر δ' بیرون بازهی $[(1-\epsilon)E[R_{p_i}], (1+\epsilon)E[R_{p_i}]]$ است. بنابراین با احتمال حداکثر $(1-\delta')^{k+1} \leq 1-(k+1)\delta' = 1-\delta$ برای تمام مقادیر i خواهیم داشت $(1-\epsilon)E[R_{p_i}] \leq f_i \leq (1+\epsilon)E[R_{p_i}]$. بنابراین می‌توان مقدار $E[R_{p_{ALG}}]$ را به صورت زیر تخمین زد:

$$E[R_{p_{ALG}}] \geq \frac{f_{ALG}}{1+\epsilon} \geq \frac{f_j}{1+\epsilon} \geq E[R_{p_j}]\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \geq E[R_{p_{OPT}}]\frac{1-\epsilon}{(1+\epsilon)^2}$$

□

در ادامه ثابت می‌کنیم بدست آوردن قیمت بهینه حتی برای بازاری با مدل خطی NP-Hard است.

قضیه ۳.۲.۴. *بدست آوردن قیمت بهینه برای بازاری با مدل خطی که فروشنده می‌خواهد قیمت یکتا برای کالا تعیین کند NP-Hard است.*

برهان. فرض کنید مجموعه $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ داده شده است و مسئله این است که آیا می‌توان A را به مجموعه مجزای A_1 و A_2 طوری افراز کرد که $\sum_{a_i \in A_1} a_i = \sum_{a_i \in A_2} a_i$. به این مسئله در ادامه *افراز کامل* می‌گوییم. می‌دانیم این مسئله یک مسئله NP-Complete است [۲۸]. در ادامه مسئله افراز کامل را با استفاده از مسئله قیمت‌گذاری حل خواهیم کرد. مجموع اعداد مجموعه A را برابر sum در نظر می‌گیریم و بدون لطمه به کلیت مسئله فرض می‌کنیم sum یک عدد زوج است. فرض کنید $2n+1$ فرد در بازار وجود دارند. برای $1 \leq i \leq n$، به فرد i برچسب a_i می‌زنیم. عدد m یک عدد حقیقی است و در ادامه آن را طوری مقداردهی می‌کنیم که جواب مسئله افراز کامل بله باشد اگر و تنها اگر قیمت بهینه برای مسئله قیمت‌گذاری برابر m باشد. تابع ارزش اولیه کالا را برای نفرات $1 \leq i \leq n$ برابر $v_i(\emptyset) = m$ و برای نفرات $n+1 \leq i \leq 2n$ برابر $v_i(\emptyset) = 2m+1$ و برای نفر $2n+1$ برابر $v_{2n+1}(\emptyset) = m - \frac{sum}{2}$ قرار می‌دهیم. در نهایت برای هر $1 \leq i \leq n$ مقدار $w_{i,2n+1}$ را برابر $w_{i,2n+1} = a_i$ تعریف کرده و وزن بقیه یال‌های گراف را برابر صفر در نظر می‌گیریم.

ابتدا نشان می‌دهیم اگر مقدار m را کمتر از $3n$ قرار دهیم، قیمت بهینه بازار یکی از دو قیمت m یا $2m+1$ خواهد بود. سپس نشان می‌دهیم اگر برای مقدار حقیقی q که بزرگتر از $\frac{1}{2}$ است داشته باشیم $\frac{n}{q} < m < 2n$، آنگاه جواب مسئله افراز کامل بله است اگر و تنها اگر جواب بهینه در مسئله قیمت‌گذاری m باشد.

ابتدا بدیهی است که فروشنده قیمت کالا را بیشتر از $2m+1$ قرار نمی‌دهد. چون در این صورت هیچ فردی کالا را نمی‌خرد. همچنین فروشنده قیمت کالا را برابر $m < p < 2m+1$ قرار نمی‌دهد. چون در این

صورت فقط افراد $n+1$ تا $2n$ کالا را خریداری می‌کنند و در صورتی که قیمت کالا را به $2m+1$ افزایش دهیم باز هم همین افراد کالا را می‌خرند و سود بیشتری می‌کنیم. در نهایت قیمت بهینه نمی‌تواند کمتر از m باشد. فرض کنید قیمت بهینه $p = m - \epsilon$ باشد. واکنش تمام افراد جامعه به جز فرد $2n+1$ به قیمت‌های $m - \epsilon$ و m یکسان است. تصور کنید فرد $2n+1$ است کالا را با قیمت $m-\epsilon$ خریداری کند ولی آن را با قیمت m نخرد. می‌دانیم ارزش کالا نزد فرد $2n+1$ به صورت $v2n+1(S) = m - \frac{sum}{2} + \sum_{i\in S} a_i$ است و $\frac{sum}{2} + \sum_{i\in S} a_i$ یک عدد صحیح است. بنابراین ϵ باید مقداری مثبت و صحیح باشد و یا به عبارتی $\epsilon \geq 1$. در ادامه سود فروشنده را هنگامی که قیمت کالا $m-\epsilon$ و $2m+1$ است، با هم مقایسه می‌کنیم. سود فروشنده هنگامی که قیمت کالا برابر $m-\epsilon$ است، را برابر $R(m-\epsilon)$ در نظر بگیرید. به راحتی دیده می‌شود که $R(m-\epsilon) \leq (m-\epsilon)(2n+1)$. از طرفی دیگر هنگامی که قیمت کالا برابر $2m+1$ است، دقیقاً n نفر کالا را می‌خرند و خواهیم داشت $R(2m+1) = n(2m+1)$. در نتیجه با توجه به $\epsilon \geq 1$ و فرض $m < 3n$ خواهیم داشت:

$$R(2m+1) = n(2m+1) \geq 2nm + 3n - 2\epsilon n > 2nm + m - 2\epsilon n - \epsilon \geq R(m-\epsilon)$$

بنابراین اگر مقدار $m < 3n$، سود فروشنده با قیمت $2m+1$ بیشتر از سودش با قیمت $m-\epsilon$ است. بنابراین با قرار دادن $m < 2n$ تنها گزینه‌های قیمت بهینه m و $2m+1$ خواهند بود.

ابتدا فرض کنید جواب مسئله افراز کامل، نه است. در این صورت مقدار m را طوری تعیین می‌کنیم که سود فروشنده با قیمت $2m+1$ بیشتر از سودش با قیمت m باشد. هنگامی که قیمت کالا m است، تمام افراد به جز فرد $2n+1$ کالا را می‌خرند. فرض کنید که فرد $2n+1$ بعد از مجموعه افراد S وارد بازار شده است. این فرد کالا را در صورتی با قیمت m میخرد که $\sum_{i\in S, i\leq n} a_i \geq \frac{sum}{2}$. دقت کنید که جواب مسئله افراز کامل نه است. پس برای هر مجموعه S و متمم آن $\bar{S}$ یکی از دو مقدار $\sum_{i\in S, i\leq n} a_i$ و $\sum_{i\in \bar{S}, i\leq n} a_i$ بیشتر از $\frac{sum}{2}$است.

بنابراین مقدار $\sum_{i\in S, i\leq n} a_i$ به احتمال $\frac{1}{2}$ بیشتر از $\frac{sum}{2}$ می‌شود و فرد $2n+1$ به احتمال $\frac{1}{2}$ کالا را می‌خرد. بنابراین سود فروشنده با قیمت m برابر $R(m) = 2nm + \frac{m}{2}$ است. از طرفی دیگر با توجه به این‌که دقیقاً n نفر کالا را با قیمت $2m+1$ می‌خرند، پس سود فروشنده با قیمت $2m+1$ برابر $R(2m+1) = n(2m+1)$ است. در این صورت اگر مقدار m کمتر از $2n$ باشد، خواهیم داشت $R(2m+1) > R(m)$.

فرض کنید جواب مسئله افراز کامل، بله است. در این صورت می‌توان مجموعه A را به دو زیرمجموعه A_1 و A_2 طوری افراز کرد که مجموع اعداد هر دو زیرمجموعه برابر $\frac{sum}{2}$ شود. در ادامه مقدار m را طوری تعیین می‌کنیم که سود فروشنده با قیمت m بیشتر از سودش با قیمت $2m+1$ باشد. هنگامی که قیمت کالا m است، تمام افراد به جز فرد $2n+1$ کالا را می‌خرند. فرض کنید که فرد $2n+1$ بعد از مجموعه افراد S وارد بازار شده است. این فرد کالا را در صورتی با قیمت m میخرد که $\sum_{i\in S, i\leq n} a_i \geq \frac{sum}{2}$. دقت کنید که

جواب مسئله افراز کامل بله است. بنابراین مقدار $\sum_{i\in S, i\leq n} a_i$ با احتمال حداقل $q = \frac{1}{2} + \frac{|A_1|!\times|A_2|!}{(n+1)!}$ بیشتر یا مساوی $\frac{sum}{2}$ خواهد شد. بنابراین فرد $2n+1$ با احتمال حداقل q کالا را می‌خرد. اگر $m > \frac{n}{q}$ قرار دهیم، خواهیم داشت $R(m) \geq 2nm + mq > n(2m+1) = R(2m+1)$. در نتیجه کافی است مقدار m را طوری تعیین کنیم که $\frac{n}{q} < m < 2n$. دقت کنید که $q > \frac{1}{2}$ و در نتیجه $\frac{n}{q}$ از $2n$ کوچک‌تر است. پس می‌توان مقدار m را طوری تعیین کرد که خواص مورد نظر را داشته باشد. □

۳.۴ قیمت‌های متفاوت

در این بخش بازارهای برخط را هنگامی که فروشنده می‌تواند قیمت‌های متفاوتی برای کالا تعیین کند بررسی می‌کنیم. ابتدا در بخش ۱.۳.۴ نشان می‌دهیم که این مسئله حتی در مدل خطی غیرمتقارن بسیار سخت است و حتی نمی‌توان الگوریتم تقریبی برای آن طراحی کرد، مگر آنکه $P = NP$. از طرفی در بخش ۲.۳.۴ یک الگوریتم با زمان اجرای چندجمله‌ای ارائه می‌دهیم که قیمت‌های بهینه را برای مدل خطی متقارن بدست آورد. این الگوریتم برای مدل غیرمتقارن طراحی نشده است. در بخش ۳.۳.۴ مدل خطی غیرمتقارن را بررسی می‌کنیم. با الهام از ایده الگوریتم برای مدل خطی متقارن و نمونه‌برداری یک الگوریتم مکاشفه‌ای برای مدل خطی غیرمتقارن ارائه می‌کنیم و نشان می‌دهیم این الگوریتم عملکرد بسیار خوبی دارد.

۱.۳.۴ سختی مسئله برای مدل خطی غیرمتقارن

در این بخش یک مسئله قیمت‌گذاری با قیمت‌های متفاوت برای مدل خطی غیرمتقارن مطرح می‌کنیم و نشان می‌دهیم نمی‌توان هیچ الگوریتم تقریبی ارائه کرد که بهترین جواب ممکن را با ضریب $\alpha > 0$ تقریب بزند. بهترین جواب ممکن که در ادامه‌ی این بخش به آن جواب بهینه کامل می‌گوییم، بهترین جوابی است که با فرض دانستن ترتیب ورود افراد بدست می‌آید. این گونه تحلیل و مقایسه جواب الگوریتم برخط با جواب بهینه کامل که اطلاعات کامل از چگونگی رخداد وقایع در آینده دارد، در زمینه تحلیل الگوریتم‌های برخط رایج است [۹].

فرض کنید مجموعه خریدارها $V = \{v_0, v_1, v_2\}$ و برای هر $0 \leq i \leq 2$ یک یال جهت‌دار با وزن ۵ از رأس v_i به $v_{(i+1) mod 3}$ وجود داشته باشد. همچنین ارزش اولیه کالا برای هریک از افرای -3 است. تصور کنید اولین فرد وارد بازار می‌شود و بدون لطمه به کلیت مسئله فرض کنید آن فرد v_0 است. فروشنده باید تصمیم بگیرد که کالا را به چه قیمتی به v_0 ارائه کند. دو حالت را در نظر بگیرید. اگر فرد بعدی که وارد بازار می‌شود v_1 باشد، بیش‌ترین سود ممکن ۱ خواهد بود که با پیشنهاد قیمت‌های -3 به v_0، ۲ به v_1 و ۲ به v_2 به دست می‌آید. اگر فرد بعدی که وارد بازار می‌شود v_2 باشد، بیش‌ترین سود ممکن ۰ خواهد بود که با پیشنهاد قیمت ۰ به تمام افراد به دست می‌آید.

ولی مسئله این‌جاست که هنگامی که $v_\cdot$ وارد بازار می‌شود، فروشنده نمی‌داند که نفر بعدی چه کسی خواهد بود. در این‌صورت اگر قیمتی بالاتر از ۳− به $v_\cdot$ پیشنهاد دهد، $v_\cdot$ کالا را نمی‌خرد و در نتیجه بیش‌ترین سود ممکن ۰ است. ولی اگر کالا را با قیمت ۳− به $v_\cdot$ پیشنهاد دهیم، کالا را می‌خرد. در این وضعیت دو حالت با احتمال مساوی $\frac{1}{2}$ ممکن است پیش آید. اگر فرد بعدی که وارد بازار می‌شود v_1 باشد، سود بیشینه برابر ۱ است. این سود با پیشنهاد قیمت ۲ به v_1 و v_2 به دست می‌آید. اگر فرد بعدی که وارد بازار می‌شود v_2 باشد، سود بیشینه برابر ۱ − است. که با پیشنهاد قیمت‌های ۰ و ۲ به v_2 و v_1 بدست می‌آید. بنابراین اگر فروشنده کالا را با قیمت ۳− به $v_\cdot$ پیشنهاد دهد، در ادامه به احتمال $\frac{1}{2}$ به میزان ۱ سود و به احتمال $\frac{1}{2}$ به میزان ۱ ضرر می‌کند و متوسط سود برابر ۰ خواهد بود. هم‌چنین اگر قیمتی بالاتر از ۳− به $v_\cdot$ پیشنهاد دهد، $v_\cdot$ کالا را نمی‌خرد و در نتیجه در ادامه هم کالا را نخواهد فروخت. در این حالت نیز متوسط سود برابر ۰ است. برای شهود بهتر، می‌توان مسئله را مانند یک بازی شرط‌بندی تصور کرد. اگر در بازی شرط‌بندی شرکت نکنید، سود و ضرری نمی‌کنید. ولی اگر در بازی شرکت کنید با پرتاب یک سکه یکنواخت ۱ واحد سود یا ۱ واحد ضرر می‌کنید.

در دست داشتن این اطلاعات که افراد به چه ترتیبی وارد بازار می‌شوند مانند این است که نتیجه پرتاب سکه در بازی شرط‌بندی را قبل از پرتاب آن بدانیم. در ادامه نشان می‌دهیم، هیچ الگوریتم برخطی نیست که بتواند سود بهینه کامل را در بازی شرط‌بندی تخمین بزند. بعد از پرتاب k بار سکه، متوسط سود هر الگوریتم برخطی برابر ۰ است. ولی در حالتی که نتیجه پرتاب سکه را قبل از پرتاب آن می‌دانیم، به طور متوسط در $\frac{k}{2}$ پرتاب‌ها سکه به سمتی می‌آید که ۱ واحد سود می‌کنیم. پس در آن پرتاب‌ها در بازی شرط‌بندی شرکت می‌کنیم. پس متوسط سود بهینه کامل $\frac{k}{2}$ است. بنابراین هیچ الگوریتم تقریبی با ضریب ضربی برای این مسئله وجود ندارد.

۴.۳.۲ الگوریتم چندجمله‌ای برای مدل خطی متقارن

در این بخش مسئله قیمت‌گذاری با قیمت‌های متفاوت برای مدل خطی متقارن را مورد بررسی قرار می‌دهیم و یک الگوریتم چندجمله‌ای برای حل مسئله ارائه می‌دهیم. استراتژی قیمت‌گذاری بهینه $\mathbf{p}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید S_i مجموعه افرادی باشند که کالا را هنگام ورود فرد i به بازار خریده‌اند. اگر فروشنده قصد فروش کالا به فرد i را داشته باشد، باید قیمتی کمتر یا مساوی $v_i(S_i)$ به او پیشنهاد دهد. از آنجایی که فروشنده به دنبال بیشینه کردن سود خود است، در این حالت کالا را قیمت دقیقاً $v_i(S_i)$، که می‌تواند منفی باشد، به فرد i پیشنهاد می‌دهد. اگر فروشند قصد فروش کالا به فرد i را نداشته باشد، آن را با قیمت بیشتر از $v_i(S_i)$ به فرد i پیشنهاد می‌دهد. بنابراین اگر ما مجموعه افرادی که کالا را در انتها خریده‌اند بدانیم، می‌توانیم استراتژی قیمت‌گذاری بهینه را به صورت یکتا تعیین کنیم. فرض کنید $U(\mathbf{p})$ برابر مجموعه افرادی باشد که کالا را با توجه به استراتژی قیمت‌گذاری $\mathbf{p}$ خریده‌اند. در این صورت سود قیمت‌گذاری $\mathbf{p}$ برابر

$R(\mathbf{p}) = \sum_{i\in U(\mathbf{p})} p_i = \sum_{i\in U(\mathbf{p})} v_i(S_i)$ است. دقت کنید که اگر هزینه تولید را در مسئله در نظر نگیریم، تمام $v_i(S_i)$ ها نامنفی خواهند بود و در نتیجه سود فروشنده زمانی بیشینه می‌شود که کالا را به تمام افراد بفروشد و $U(\mathbf{p}) = V$. ولی سختی مسئله هنگامی است که هزینه تولید کالا را در نظر بگیریم و مسئله را در حالتی که $v_i(S_i)$ ها می‌توانند منفی باشند مورد بررسی قرار دهیم. در ادامه الگوریتم چندجمله‌ای برای زمانی که $v_i(S_i)$ ها می‌توانند منفی باشند ارائه می‌کنیم.

دقت کنید که در مدل خطی $v_i(S_i) = v_i(\emptyset) + \sum_{j\in S_i} w_{j,i}$ و سود فروشنده را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$R(\mathbf{p}) = \sum_{i\in U(\mathbf{p})} v_i(\emptyset) + \sum_{j,i\in U(\mathbf{p}),\pi^{-1}(j)<\pi^{-1}(i)} w_{j,i}$$

دقت کنید که در مدل متقارن $w_{i,j} = w_{j,i}$ و در نتیجه میتوان سود فروشنده را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$R(\mathbf{p}) = \sum_{i\in U(\mathbf{p})} v_i(\emptyset) + \frac{1}{2}\sum_{j,i\in U(\mathbf{p})} w_{j,i}$$

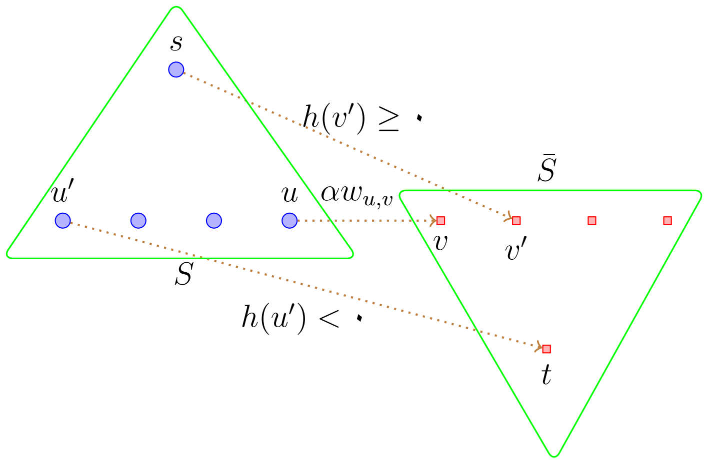
همان‌طور که مشاهده می‌شود تابع سود تنها به مجموعه $U(\mathbf{p})$ وابسته است و همان‌طور که اشاره شد با بدست آوردن مجموعه $U(\mathbf{p})$ که سود را بیشینه می‌کند، می‌توان قیمت‌گذاری بهینه را نیز از روی $U(\mathbf{p})$ طراحی کرد. در ادامه الگوریتمی چندجمله‌ای ارائه می‌دهیم که مجموعه‌ی $U(\mathbf{p})$ را طوری پیدا کند که سود $R(\mathbf{p})$ بیشینه شود. دقت کنید که با تعریف $I_i = v_i(\emptyset)$ و $\alpha = \frac{1}{2}$ مسئله به مسئله زیرمجموعه وزن‌دار بیشینه تبدیل می‌شود که تعریف آن در تعریف ۱.۳.۴ آمده است. همچنین در لم ۲.۳.۴ الگوریتمی چند جمله‌ای برای حل مسئله زیرمجموعه وزن‌دار بیشینه ارائه کرده‌ایم.

تعریف ۱.۳.۴. مسئله زیرمجموعه وزن‌دار بیشینه: گراف جهت‌دار و وزن‌دار $G = (V, E)$ داده شده است. وزن رأس i برابر I_i و وزن یال (i, j) برابر مقدار نامنفی w_{ij} است. برای هر مقدار $\alpha \geq 0$، هدف پیدا کردن زیرمجموعه‌ای از رأس‌ها مانند S اس که مقدار زیر بیشینه شود:

$$W_S = \sum_{i\in S} I_i + \alpha \sum_{\substack{(i,j)\in E\\ i,j\in S}} w_{ij} \qquad (۱.۴)$$

لم ۲.۳.۴. *مسئله زیرمجموعه وزن‌دار بیشینه در زمان چند جمله‌ای قابل حل است.*

برهان. ایده اصلی برای حل این مسئله استفاده از الگوریتم پیدا کردن برش کمینه در گراف است. برای هر رأس i تعریف میکنیم $h_i = I_i + \alpha \sum_{j\in N(i)} w_{ij}$. گراف G' را از روی G به این صورت می‌سازیم: دو رأس s و t به گراف G اضافه می‌کنیم. برای هر رأس با $h_i < 0$ یک یال با ظرفیت $-h_i$ از i به t وصل می‌کنیم و برای هر رأس با $h_i \geq 0$ یک یال با ظرفیت h_i از s به i وصل می‌کنیم. به ازای هر دو یال بین رأس‌های i و j در G، همان یال را با ظرفیت αw_{ij} در G' قرار می‌دهیم. شبکه شار G' در شکل ۲.۷ نشان داده شده است.



شکل ۱.۴: شبکه شار برای حل مسئله زیرمجموعه وزن‌دار بیشینه.

برای هر برشی مانند (S,T) که s و t را از هم جدا کند، اندازه این برش را برابر است با:

$$\partial^+(S) = \sum_{\substack{h_i>0 \\ i\in T}} h_i + \sum_{\substack{h_i<0 \\ i\in S}} -h_i + \sum_{\substack{(i,j)\in E \\ i\in S, j\in T}} \alpha w_{ij}$$

با تعریف $W = \sum_{h_i>0} h_i = \sum_{h_i>0, i\in S} h_i + \sum_{h_i>0, i\in T} h_i$ می‌توان مقدار $W - \partial^+(S)$ را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
W - \partial^+(S) &= \sum_{\substack{h_i>0 \\ i\in S}} h_i + \sum_{\substack{h_i<0 \\ i\in S}} h_i - \sum_{\substack{(i,j)\in E \\ i\in S, j\in T}} \alpha w_{ij} \\
&= \sum_{i\in S} h_i - \sum_{\substack{(i,j)\in E \\ i\in S, j\in T}} \alpha w_{ij} \\
&= \sum_{i\in S} (I_i + \sum_{j\in N(i)} \alpha w_{ij}) - \sum_{\substack{(i,j)\in E \\ i\in S, j\in T}} \alpha w_{ij} \\
&= \sum_{i\in S} I_i + \sum_{i\in S} \sum_{j\in N(i)} \alpha w_{ij} - \sum_{\substack{(i,j)\in E \\ i\in S, j\in T}} \alpha w_{ij} \\
&= \sum_{i\in S} I_i + \sum_{\substack{(i,j)\in E \\ i,j\in S}} \alpha w_{ij}
\end{aligned}$$

با توجه به این‌که W مقدار ثابتی است و به مجموعه S وابسته نیست، می‌توان نتیجه گرفت که بیشینه کردن مقدار $\sum_{i\in S} I_i + \alpha \sum_{(i,j)\in E, i,j\in S} w_{ij}$ معادل کمینه کردن $\partial^+(S)$ است. می‌دانیم می‌توانیم مقدار کمینه $\partial^+(S)$ را در زمان چندجمله‌ای با استفاده از الگوریتم شار بیشینه بدست آوریم. □

بنابراین میتوان قضیه زیر را نتیجه گرفت.

قضیه ۳.۳.۴. *مسئله تعیین استراتژی بهینه قیمت‌گذاری برای زمانی که فروشنده می‌تواند قیمت‌های متفاوت ارائه دهد در مدل خطی متقارن در زمان چندجمله‌ای قابل حل است.*

۳.۳.۴ الگوریتم مکاشفه‌ای برای مدل خطی غیرمتقارن

همان‌طور که در بخش ۱.۳.۴ اشاره شد ارائه الگوریتم تقریبی که بتواند جواب بهینه تقریب بزند غیر ممکن است. البته جواب بهینه که با دانستن ترتیب ورود افراد بدست می‌آید. هم‌چنین روش ارائه شده برای مدل خطی متقارن در بخش ۲.۳.۴ برای مدل خطی غیرمتقارن قابل استفاده نیست. در این بخش یک الگوریتم مکاشفه‌ای ارائه می‌دهیم که عملکرد آن را بر روی بعضی بازاهای کوچک امتحان می‌کنیم. به توجه به نتایج بدست آمده بر روی بازارهای با تعداد افرادی کم، به نظر می‌رسد الگوریتم عملکرد مناسبی دارد.

ابتدا الگوریتم با زمان اجرای نمایی ارائه می‌دهیم که مسئله را حل کند. فرض کنید شخص i وارد بازار شده است و هنگام ورودش مجموعه افراد S کالا را خریده‌اند و مجموعه T هنوز وارد بازار نشده‌اند. مقدار $A[S,T,i]$ را برابر بیشینه متوسط سود فروشنده در این حالت در نظر می‌گیریم. در این وضعیت فروشنده دو انتخاب دارد: کالا را به i با قیمت $v_i(S)$ بفروشند یا کالا را به i نفروشند. در این صورت مقدار $A[S,T,i]$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A[S,T,i]=\max\{v_i(S_i)+\frac{۱}{|T|}\sum_{j\in T}A[S\cup\{i\},T-\{j\},j],\frac{۱}{|T|}\sum_{j\in T}A[S,T-\{j\},j]\}$$

که $v_i(S_i)+\frac{۱}{|T|}\sum_{j\in T}A[S\cup\{i\},T-\{j\},j]$ برابر متوسط سود در صورت فروش محصول به فرد i و $\frac{۱}{|T|}\sum_{j\in T}A[S,T-\{j\},j]$ برابر متوسط سود در صورت عدم فروش به فرد i است. به این ترتیب می‌توان مقادیر ماتریس A را با برنامه‌ریزی پویا بدست آورد و هنگام ورود هر فرد نسبت به فروش یا عدم فروش کالا تصمیم گرفت. مشکل اصلی این روش زمان اجرای آن است. در ادامه سعی بر ارائه الگوریتمی مکاشفه‌ای برای حل مسئله داریم.

همان‌طور که بخش ۲.۳.۴ اشاره شد، با تعیین مجموعه افرادی که در نهایت کالا را خریداری می‌کنند، می‌توان قیمت‌گذاری بهینه را بدست آورد. در این مسئله هم اگر فروشنده تصمیم بگیرد که کالا را به شخص i بفروشد آن را با قیمت $v_i(S_i)$ به او پیشنهاد میدهد، که S_i مجموعه افرادی هستند که هنگام ورود i از کالا استفاده می‌کنند. فرض کنید که هنگام ورود شخص i مجموعه افراد T هنوز وارد بازار نشده‌اند. فرض کنید ترتیب ورود افراد مجموعه T در آینده را می‌دانیم و هدف تعیین استراتژی قیمت‌گذاری در این حالت است. در ادامه الگوریتمی برای حل این مسئله با استفاده از مسئله‌ی زیرمجموعه وزن‌دار بیشینه پیشنهاد می‌دهیم. مسئله زیرمجموعه وزن‌دار بیشینه در ۱.۳.۴ تعریف شده است و در لم ۲.۳.۴ الگوریتمی چند جمله‌ای برای حل آن ارائه کرده‌ایم. گراف $G'=T\cup\{i\}$ را به این صورت می‌سازیم که وزن یال $w_{u,v}$ برابر ۰ قرار می‌دهیم اگر u

بعد از v وارد بازار شود و در غیر این‌صورت آن‌را تغییر نمی‌دهیم. مقدار $I_u = v_u(S_i)$ و $\alpha = ۱$ قرار می‌دهیم. به این ترتیب می‌توان بهترین زیرمجموعه از $T \cup \{i\}$ را با حل مسئله زیرمجموعه وزن‌دار بیشینه پیدا کرد و کالا را به آن‌ها فروخت. دقت کنید که الگوریتم پیشنهادی با این فرض طراحی شده بود که ترتیب ورود افراد مجموعه T در آینده را بدانیم. ولی در واقع این ترتیب را نمی‌دانیم. برای حل این مشکل چه باید کرد؟

برای حل این مشکل از ایده نمونه‌برداری کمک می‌گیریم. در حقیقت به صورت تصادفی ترتیبی برای ورود افراد T در آینده در نظر می‌گیریم و مسئله را حل می‌کنیم. در نهایت برای فروش یا عدم فروش کالا به شخص i این دو کار را انجام می‌دهیم:

- ابتدا فرض می‌کنیم کالا را به شخص i بفروشیم. در این صورت $v_i(S_i)$ سود می‌کنیم. اما ترتیب ورود افراد T را در آینده نمی‌دانیم. به صورت تصادفی m ترتیب دلخواه برای ورورد افراد T انتخاب می‌کنیم و مسئله را m بار با تبدیل به مسئله زیرمجموعه وزن‌دار بیشینه حل می‌کنیم. مقدار $R_۱$ را برابر متوسط سود در این m اجرا در نظر می‌گیریم.

- سپس فرض می‌کنیم کالا را به شخص i نفروشیم. دقت کنید که ترتیب ورود افراد T را در آینده نمی‌دانیم. به صورت تصادفی m ترتیب دلخواه برای ورورد افراد T انتخاب می‌کنیم و مسئله را m بار با تبدیل به مسئله زیرمجموعه وزن‌دار بیشینه حل می‌کنیم. مقدار $R_۲$ را برابر متوسط سود در این m اجرا در نظر می‌گیریم.

در نهایت اگر $R_۱ + v_i(S_i) \geq R_۲$، کالا را به شخص i با قیمت $v_i(S_i)$ می‌فروشیم و در غیر این‌صورت کالا را به شخص i نمی‌فروشیم.

در نهایت الگوریتم پیشنهادی را بر روی گراف‌های کوچک ارزیابی می‌کنیم. در این ارزیابی بازارهای مختلف با $n \leq ۱۳$ نفر تولید شده است. در تولید گراف بازار از چندین روش زیر استفاده کرده‌ایم:

- گراف بازار با روش اتصال ترجیحی تولید شود.

- گرافی بازار به صورت تصادفی تولید شود به طوری که تمام یال‌ها با احتمال یکسان در گراف قرار داده شوند.

- گراف بازار به صورت دستی توسط کاربر تعیین شود.

پس از تولید گراف بازار، جواب بهینه را با بدست آوردن ماتریس A پیدا می‌کنیم. سپس یک دنباله تصادفی مانند π برای ورود افراد در نظر می‌گیریم. در این صورت با توجه به ماتریس A و دنباله π می‌توان در مورد فروش و عدم فروش کالا به همه افراد تصمیم گرفت. در نهایت با استفاده از الگوریتم چندجمله‌ای پیشنهادی و

با $m = ۱۰۰$ بار نمونه‌برداری، هنگام ورود هر شخص از دنباله π و با فرض نامعلوم بودن ترتیب افراد ورودی در آینده، نسبت به فروش و عدم فروش کالا تصمیم‌گیری می‌کنیم و جواب را با جواب بهینه که توسط محاسبه ماتریس A بدست آمده مقایسه می‌کنیم. نکته قابل توجه این است در تمامی گراف‌های تولید شده با $n \leq ۱۳$ فرد دو الگوریتم عملکرد یکسانی داشتند و این موضوع نشان‌دهنده عملکرد خوب الگوریتم پیشنهادی است. دقت کنید که محاسبه ماتریس A برای $n > ۱۳$ زمان‌گیر است و در نتیجه امکان مقایسه این دو الگوریتم برای مقادیر بزرگ n وجود ندارد. ولی با الهام از نتایج بدست آمده، این الگوریتم برای گراف‌های بزرگ نیز توصیه می‌شود.

۴.۴ نتیجه‌گیری و کارهای آتی

در این فصل به بررسی بازارهای برخط پرداختیم. در این بازارها افراد به صورت برخط وارد بازار می‌شوند و فروشنده هیچ اطلاعاتی از ترتیب ورود افراد در آینده ندارد. فروشنده می‌خواهد هنگام ورود هر فرد محصول خود را با قیمتی مناسب به فرد پیشنهاد دهد. در این فصل مسئله قیمت‌گذاری در بازارهای برخط در حالت‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفت. در حقیقت برای زمانی که فروشنده متعهد به عدم تغییر قیمت کالا است، الگوریتمی چندجمله‌ای برای تخمین قیمت بهینه ارائه کردیم. هم‌چنین برای زمانی که فروشنده می‌تواند قیمت را برای افراد متفاوت تغییر دهد، یک الگوریتم چندجمله‌ای برای زمانی که بازار متقارن است طراحی کردیم و نشان دادیم که مسئله در حالت غیرمتقارن بسیار سخت خواهد بود.

با توجه به این‌که مدل این فصل شباهت زیادی به مدل فصل ۳ دارد، برای مشاهده تحقیقاتی که برای آینده پیشنهاد می‌شود به بخش ۴.۳ مراجعه کنید.

فصل ۵

بازار با افراد هوشمند

۱.۵ مقدمه

همان‌طور که اشاره شد در بسیاری از مدل‌ها، افراد جامعه به صورت هوشمند مدل نمی‌شوند. برای مثال در فصل ۳ افراد کالای مورد نظر خود را در اولین فرصتی که توانایی پرداخت پول آن را داشتند، خریداری می‌کردند. ولی در دنیای واقع مردم بسیار هوشمندتر هستند. حتی در بسیاری از اوقات علی‌رغم این‌که توانایی پرداخت پول یک کالا را دارند، آن را خریداری نمی‌کنند. دلیل این مطلب این است که با توجه به نوع جنس و سابقه فروشنده، تخمین می‌زنند که قیمت کالا در آینده کاهش پیدا می‌کند. در این صورت صبر خواهند کرد که کالا را دیرتر ولی با قیمت مناسب‌تر خریداری کنند.

در این فصل مدلی ارائه خواهیم داد که در آن افراد جامعه به طور هوشمند عمل می‌کنند و در هر لحظه تصمیمی می‌گیرند که سودشان بیشینه شود. در حقیقت بازار را به صورت یک بازی مدل می‌کنیم و فروشنده قیمت کالا را در k روز تعیین می‌کند. سپس خریداران با مشاهده قیمت در طول زمان تصمیم می‌گیرند که کالا را در چه زمانی خریداری کنند. یا این‌که تصمیم می‌گیرند که کالا را اصلاً نخرند. تعداد خریداران نامتناهی است و هر خریدار را با یک عدد حقیقی $b \in [۰, ۱]$ نشان می‌دهیم. بازار را با یک بازی مرحله‌ای[۱] مدل می‌کنیم. در این بازی ابتدا فروشنده حرکت می‌کند و یک بردار قیمت $p = (p_۱, p_۲, \cdots, p_k)$ تعیین می‌کند، که $p_i \in \Re$ قیمت کالا در روز i است. دقت کنید که p_i می‌تواند یک عدد منفی باشد. سپس خریداران حرکت می‌کنند و با توجه به بردار قیمت یک روز را برای خرید کالا را انتخاب می‌کنند. هم‌چنین با توجه به بردار قیمت، هر خریداری ممکن است تصمیم به عدم خرید کالا بگیرد.

خریداران به n دسته متفاوت $T_۱, T_۲, \cdots, T_n$ تقسیم شده‌اند، که هر T_i یک زیر بازه‌ای از $[۰, ۱]$ است.

[۱] sequential game

خریداران از یک دسته خواسته‌ها و عملکرد مشترکی در بازی خواهند داشت. مجموعه‌ی استراتژی خریداران $A = \{۱, ۲, \cdots, k\} \vee \{\emptyset\}$ است. هر عدد نشان دهنده‌ی روزی است که کالا خریداری می‌شود. هم‌چنین استراتژی $\emptyset$ بیانگر این است که کالا خریداری نشده است. بنابراین استراتژی کل خریداران را می‌توان با ماتریس $X = \{X_{i,t}\}$ به ابعاد $(k+۱) \times n$ نشان داد، که $X_{i,t}$ برابر قسمتی از خریداران دسته t است که کالا را قبل از روز i خریداری کرده‌اند. با نرمال‌سازی خواهیم داشت که $\sum_t X_{k+۱,t} \leq ۱$ و $۱ - \sum_t X_{k+۱,t}$ بخشی از خریداران را مشخص می‌کند که کالا را خریداری نکرده‌اند. دقت کنید که با این تعریف $X_{۱,t} = ۰$. با توجه به ماتریس X، ماتریس پایه استراتژی خریداران را با ماتریس $x = \{x_{i,t}\}$ به ابعاد $k \times n$ نشان می‌دهیم، که $x_{i,t} = X_{i+۱,t} - X_{i,t}$ بیانگر بخشی از خریدارانی از دسته t است که کالا را در روز i خریده‌اند. در ادامه در بعضی از بخش‌ها حالت خاصی از مسئله را بررسی کرده‌ایم که فقط ۱ دسته خریدار در بازار وجود دارد. در این صورت از X_i به عنوان یک عدد برای بیان بخشی از خریداران که کالا را قبل از روز i خریده‌اند استفاده می‌کنیم. به همین صورت x_i یک عدد است و بیانگر بخشی از خریداران است که کالا را در روز i خریده‌اند.

با توجه به ماتریس استراتژی X، ارزش[۲] کالا برای یک فرد از دسته t در روز i را با تابع ارزش $F_i^t(X_i)$ نشان می‌دهیم. دقت کنید که X_i سطر i-ام ماتریس استراتژی X است. در حقیقت تابع $F_i^t(X_i)$ به تعداد افرادی از دسته‌های مختلف که کالا را تا قبل از روز i خریده‌اند بستگی دارد و چگونگی خرید افراد در روزهای بعدی روی آن تأثیری ندارند. دقت کنید که $F_i^t(X_i)$ به زمان نیز بستگی دارد و به ازای $i \neq j$، توابع F_i^t و F_j^t می‌توانند متفاوت باشند. در بسیاری از بخش‌ها با در نظر گرفتن تابع ارزش به صورت $F_i^t(X_i) = \beta^i F^t(X_i)$، برای $۰ \leq \beta \leq ۱$، تأثیر زمان در تابع ارزش را مدل می‌کنیم. این مدل نشان دهنده این است که ارزش کالا به مرور زمان در حال کاهش است که دلایل متفاوتی از جمله کم شدن نوآوری کالا می‌تواند باعث این کاهش ارزش باشد. در بسیاری از کالاها که تکنولوژی در ساخت آن‌ها تأثیر به‌سزایی دارد این کاهش ارزش مشاهده می‌شود. برای مثال می‌توان به رایانه قابل حمل، دوربین عکاسی، گوشی موبایل، و تلویزیون اشاره کرد.

با توجه به ماتریس استراتژی X، سود[۳] یک فرد از دسته t برای خرید در روز i برابر $F_i^t(X_i) - p_i$ است. سود یک فرد در صورتی که کالا را نخرد برابر ۰ است. با توجه به این‌که ارزش پول در طول زمان کاهش می‌یابد، برای محاسبه سود واقعی افراد باید ارزش پول را در حال حاضر محاسبه کنیم. به این منظور سود یک فرد از دسته t برای خرید در روز i را برابر $(۱-\alpha)^i(F_i^t(X_i) - p_i)$ در نظر می‌گیریم. در حقیقت $۰ \leq \alpha \leq ۱$ نشان دهنده‌ی چگونگی کاهش ارزش پول در طول زمان است.

فرض کنید فروشنده در ابتدا بردار قیمت p را مشخص کرده است. در نوبت دوم خریداران به دنبال انتخاب

[۲] Value

[۳] Utility

استراتژی بهنیه برای خود هستند. به بازی ایجاد شده بین خریداران بعد از تعیین قیمت توسط فروشنده زیربازی[۴] گوییم. ماتریس استراتژی X یک تعادل نش برای زیربازی با بردار قیمت p است اگر:

- هر فرد بهترین بازی خود را انجام داده باشد. به بیانی دیگر برای هر فردی از دسته t که کالا را در روز i خریده است، داشته باشیم: $i \in argmax_j(F_j^t(X_j) - p_j)(۱ - \alpha)^j$.
- برای هر فردی از دسته t که کالا را نخریده است مقدار $max_j(F_j^t(X_j) - p_j)(۱ - \alpha)^j$ مثبت نباشد.

به یک تعادل *خوش‌رفتار* گوییم اگر فرد کالا را فقط در صورتی نخرد که $max_j(F_j^t(X_j) - p_j)(۱ - \alpha)^j$ منفی باشد. به بیان دیگر در صورتی که $max_j(F_j^t(X_j) - p_j)(۱ - \alpha)^j$ برابر صفر باشد و سود خریداری و عدم خریداری کالا برابر باشد، فرد کالا را خریداری می‌کند. به همین ترتیب ماتریس پایه استراتژی x یک تعادل نش برای زیر بازی با بردار قیمت p است اگر و تنها اگر ماتریس استراتژی X متناظر با آن یک تعادل نش باشد.

فرض کنید فروشنده بردار قیمت p را تعیین کرده است و خریداران در مرحله دوم با توجه به آن استراتژی بهینه خود را انتخاب کرده و ماتریس پایه استراتژی x بدست آمده است. سود فروشنده با توجه به بردار قیمت p و ماتریس پایه استراتژی x برابر $R(p,x) = \sum_{i=۱}^{k} \sum_{t=۱}^{n} x_{i,t} p_i (۱ - \alpha)^i$ است. به ازای هر بردار قیمت p، فرض کنید x_p یک تعادل نش برای زیربازی با بردار قیمت p باشد. پس فروشنده می‌داند در صورت تعیین بردار قیمت p به میزان $R(p, x_p)$ سود خواهد کرد. از آن‌جا که فروشنده به دنبال بیشینه کردن سودش است، پس بردار قیمتی را تعیین می‌کند که $R(p, x_p)$ که همان سودش است را بیشینه کند. یک *تعادل کامل*[۵] برای بازی مرحله‌ای تعریف شده در این فصل، یک بردار قیمت p^* و ماتریس پایه استراتژی x_{p^*} خواهد بود که $p^* = argmax_p R(p, x_p)$ و x_{p^*} یک تعادل نش برای زیربازی با بردار قیمت p^* باشد. در حقیقت فروشنده به دنبال بردار قیمتی است که سود خود را در نقطه‌ی تعادل بیشینه کند. می‌توان به این بازی به این گونه نگاه کرد که استراتژی فروشنده تعیین قیمت p و پاسخ خریداران تشکیل نقطه تعادل x_p است. در این صورت سود فروشنده از بازی $R(p, x_p)$ خواهد بود. در این صورت مسئله فروشنده بدست آوردن بهترین بردار قیمت ممکن است. به این مسئله در ادامه مسئله *بیشینه کردن سود فروشنده* می‌گوییم. به بهترین بردار قیمت برای فروشنده *قیمت بهینه* گوییم. یکی از اهداف این فصل طراحی الگوریتم برای مسئله بیشینه کردن سود فروشنده برای بازی تعریف شده بر روی بازارهای اجتماعی است. این مسئله را برای بازارهایی حل می‌کنیم که به ازای هر بردار قیمت p یک تعادل خوش‌رفتار x_p یکتا وجود داشته باشند. به این منظور ابتدا چند فرض متفاوت در مورد مدل رفتار افراد در جامعه را ارائه می‌دهیم. از این مدل‌ها در ادامه استفاده خواهد شد.

---

[۴] Subgame

[۵] perfect equilibrium

تعریف ۱.۱.۵. مدل تجمعی: در این مدل هر خریداری یک دسته منحصر به فرد دارد و در نتیجه بی‌نهایت دسته خواهیم داشت. در این مدل، دسته هر فرد $b \in [۰,۱]$ را با نماد b نشان می‌دهیم. تابع ارزش در این مدل وابسته به تعداد کل افرادی است که کالا را خریده‌اند و به این موضوع که افراد کدام دسته خریده‌اند بستگی ندارد. تابع ارزش خریدار b در این مدل را با $F_i^b(X_i)$ نشان می‌دهیم. به دلیل این‌که این تابع فقط به تعداد کل افرادی که کالا را خریده‌اند بستگی دارد، X_i را برابر کل افرادی که کالا را قبل از روز i-ام خریده‌اند در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲.۱.۵. مدل خطی: این مدل حالت خاصی از مدل تجمعی است. تابع ارزش خریدار b در این مدل برابر $F_i^b(X_i) = I + C(b).F_i(X_i)$ است، که I یک مقدار اولیه به عنوان ارزش کالا بدون تأثیرات اجتماعی است، $C(b)$ ضریب تأثیرپذیری فرد b، و $F_i(X_i)$ ارزش نرمال شده کالا در روز i است. فرض می‌کنیم نحوه توزیع $C(b)$ ها را می‌دانیم. در حقیقت اطلاعات کامل تابع توزیع $\mathcal{C} : \mathbb{R} \to [۰,۱]$ را در اختیار داریم. مقدار $\mathcal{C}(c)$ نشان‌دهنده‌ی بخشی از خریداران مانند b است که $C(b) \leq c$.

تعریف ۳.۱.۵. مدل متقارن: در این مدل فقط یک دسته داریم و برای هر خریدار b خواهیم داشت: $F_i^b = F_i$.

۱.۱.۵ نتایج بدست آمده

در این فصل بازار را به صورت یک بازی مرحله‌ای مورد مطالعه قرار می‌دهیم که ابتدا فروشنده قیمت کالا در طول زمان تعیین می‌کند و سپس افراد جامعه نسبت به قیمت‌های تعیین شده واکنش نشان می‌دهند. ابتدا در بخش ۲.۵ نشان می‌دهیم که اگر تابع ارزش کالا پیوسته باشد، بازی دارای نقطه تعادل نش می‌باشد. ایده اثبات شبیه روش ارائه شده در [۳۴] است. همچنین توسط مثالی نشان می‌دهیم که اگر تابع ارزش کالا پیوسته نباشد، بازی لزوماً دارای نقطه تعادل نش نیست.

پس از اثبات وجود نقطه تعادل، مسئله یکتایی آن را در بخش ۳.۵ مطالعه می‌کنیم. برای این منظور بر روی نقطه تعادل‌های خوش‌رفتار تمرکز می‌کنیم. در این نقاط تعادل اگر سود فردی با خرید کالا ۰ و برابر سود فرد با عدم خرید کالا شود، کالا را خریداری می‌کند. ابتدا نشان می‌دهیم که بازی می‌تواند چند نقطه تعادل داشته باشد. از طرفی دیگر ثابت می‌کنیم در بازی‌های تجمعی که ارزش کالا برای هر فرد تنها به تعداد کل افرادی که کالا را خریده‌اند وابسته است، نقطه تعادل خوش‌رفتار یکتاست. به این معنی که تعداد افراد هر دسته که در یک روز خاص کالا را خریده‌اند در نقطه تعادل نش به طور یکتا مشخص می‌شوند.

یکتا بودن نقطه تعادل ما را کمک می‌کند که بتوانیم به هر استراتژی قیمت‌گذاری یک سود نسبت دهیم. در نتیجه می‌توان به دنبال قیمت‌گذاری بهینه‌ای بود که سود فروشنده را بیشینه می‌کند. در بخش ۴.۵ این مسئله را به طور دقیق مطالعه می‌کنیم و در چندین حالت الگوریتم چندجمله‌ای برای پیدا کردن استراتژی قیمت‌گذاری بهینه

ارائه می‌دهیم. ابتدا یک الگوریتم FPTAS برای پیدا کردن قیمت‌گذاری بهینه در مدل متقارن ارائه می‌دهیم. سپس با گسترش همین ایده و تحلیل دقیق مدل خطی، الگوریتم FPTAS برای مسئله در مدل خطی بدون در نظر گرفتن کم شدن ارزش پول در زمان ارائه می‌دهیم. همچنین به مطالعه تجربی چگونگی تغییرات قیمت و تعداد خریداران کالا در طول زمان می‌پردازیم. مشاهده می‌کنیم که چگونگی تغییرات قیمت و تعداد خریداران به میزان تحدب تابع ارزش بستگی دارد. همچنین تأثیر میزان کاهش ارزش پول در طول زمان را بر روی سود فروشنده بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که سود فروشنده به شدت به میزان کاهش ارزش پول در طول زمان وابسته است. در نهایت همانند نتیجه بدست آمده در فصل ۳ مشاهده می‌شود که بیشتر سود فروشنده در روزهای اول قیمت‌گذاری حاصل می‌شود و تغییرات زیاد قیمت کمک چندانی به فروشنده نمی‌کند.

الگوریتم‌های ارائه شده در بخش ۴.۵ با کمک تبدیل مسئله به مسئله پوشش مستطیلی که هدف آن پوشاندن فضای زیر یک منحنی با تعدادی مستطیل است، طراحی شده است. در نهایت در بخش ۵.۵ مسئله پوشش مستطیلی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در حقیقت الگوریتم FPTAS برای حل این مسئله در حالت‌های مختلف ارائه می‌دهیم.

۲.۱.۵ کارهای انجام شده توسط دیگران

کارهای انجام شده در این فصل ادامه تحقیقات انجام شده در راستای طراحی یک استراتژی بازاریابی و قیمت‌گذاری برای کالاهایی است که دارای تأثیرات اجتماعی می‌باشند [۷، ۱۰، ۱۸، ۲۶، ۳۲، ۳۷، ۲۰، ۵، ۱۱]. تحقیق انجام شده در [۷] به مدل ارائه شده در این فصل بسیار نزدیک است. این مقاله مسئله فروش کالا با ارائه دو قیمت یا تعداد نامحدود قیمت را هنگامی که تأثیرات اجتماعی خطی می‌باشند مورد مطالعه قرار داده است. در این مقاله سیاست‌های قیمت‌گذاری فروشنده هنگامی که قیمت‌ها را در ابتدا اعلام کند و متعهد شود آن‌ها را تغییر ندهد و همچنین زمانی که هیچ تعهدی برای عدم تغییر قیمت ندارد بررسی شده‌اند. نمودار قیمت‌های پیشنهادی در این مقاله همانند نتیجه بدست آمده در این فصل صعودی است. همچنین مدل تأثیراتی که ما در این رساله بررسی می‌کنیم حالت کلی تأثیراتی است که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است. در مقاله [۷] تنها قیمت‌گذاری در دو روز یا تعداد نامحدود روز انجام می‌شود. در حالی که در این فصل الگوریتم برای ارائه قیمت‌گذاری برای تعداد دلخواهی روز پیشنهاد شده است.

بعضی تحقیقات اقتصادی انجام شده برای مطالعه قیمت‌گذاری کالا با وجود تأثیرات اجتماعی، به تعداد افرادی که کالا را در گذشته خریده یا در آینده می‌خرند بستگی دارد [۱۰]. در [۱۰] قیمت‌گذاری مورد مطالعه قرار گرفته است که فروشنده ابتدا قیمت کالا را تعیین می‌کند و آن را در طول زمان تغییر نمی‌دهد. در این مقاله نشان داده شده است که در قیمت‌گذاریی که سود فروشنده را بیشینه می‌کند و افراد جامعه کاملاً عقلانی عمل

می‌کنند، قیمت‌ها در طول زمان صعودی است. همچنین مانند مدل ارائه شده در این فصل در مقاله [۱۰] بازار با تعداد نامتناهی فرد مورد مطالعه قرار گرفته است.

در [۱۱] مدلی بررسی شده که افراد جامعه عقلانی عمل می‌کنند. در این مقاله یک بازی دو مرحله‌ای مطالعه شده است. در مرحله اول فروشنده قیمت را برای یک کالای قابل تقسیم تعیین می‌کند. سپس هر فرد در مورد این‌که چه مقدار از کالا را خریداری کند تصمیم می‌گیرد. در این مقاله برخلاف مدل ارائه شده در این فصل، فرض می‌شود فروشنده می‌تواند قیمت‌های متفاوت به افراد پیشنهاد دهد. همچنین استراتژی یک فرد، بر خلاف مدل این فصل که تعیین روز خرید کالا بود، تعیین مقداری از کالاست که خریداری می‌کند. در این مقاله مسئله پیدا کردن نقطه تعادل زیربازی مورد بررسی قرار گرفته است و خواص قیمت‌گذای بهینه مطالعه شده است. همچنین با نگاه الگوریتمی نیز مسئله‌ی پیدا کردن قیمت‌گذاری بهینه بررسی شده است.

بازارهایی با افراد نزدیک‌بین در مقالات قبلی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. این مقالات در بخش ۲.۱.۳ بیان شده‌اند. ولی در راستای بررسی بازارهایی با افراد منطقی باید ابتدا فرض نزدیک‌بینی افراد را در مدل‌سازی برداریم. در این صورت افراد به آینده و تغییرات قیمت در آینده نیز دقت می‌کنند.

۲.۵ وجود نقطه تعادل

فرض کنید که فروشنده در مرحله اول بازی بردار قیمت p را تعیین کرده است. هدف در این بخش بررسی این مسئله است که آیا زیربازی تعریف شده با بردار قیمت p دارای نقطه تعادل است؟ در ادامه با استفاده از قضیه نقطه ثابت کاکوتانی [۶] [۳۰] نشان می‌دهیم که بازار در حالتی که خریداران به تعداد محدودی دسته تقسیم شوند و تابع ارزش یک تابع پیوسته باشد دارای نقطه تعادل خواهد بود. در حقیقت نشان می‌دهیم زیربازی با بردار قیمت p دارای نقطه تعادل است. برای مدل تجمعی نیز وجود نقطه تعادل با استفاده از نتیجه ارائه شده در [۳۴] ثابت می‌شود. همچنین مثالی ارائه خواهیم داد که نشان می‌دهد که شرط پیوستگی تابع ارزش یک شرط لازم نیز می‌باشد. در حقیقت مثالی با تابع ارزش ناپیوسته ارائه می‌دهیم که دارای نقطه تعادل نمی‌باشد.

دقت کنید با وجود این‌که اثبات‌های ارائه شده وجود یک نقطه تعادل را ثابت می‌کند، ولی وجود یک نقطه تعادل خوش‌رفتار را تضمین نمی‌کند. تعادل خوش‌رفتار ممکن است وجود نداشته باشد. البته نشان می‌دهیم که تعادل خوش‌رفتار برای مدل‌های خطی و متقارن که عمده تمرکز ما بر روی آن‌ها می‌باشد، وجود دارد. اثبات وجود تعادل خوش‌رفتار برای مدل‌های خطی و متقارن در بخش ۲.۲.۵ آمده است.

[۶] Kakutani

۱.۲.۵ نقطه تعادل

در این قسمت نشان می‌دهیم که زیربازی تعریف شده با بردار قیمت p، با تعداد متناهی دسته و تابع ارزش پیوسته دارای نقطه تعادل است. برای این منظور یک تابع مجموعه‌ای بر روی ماتریس‌های پایه استراتژی تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که نقطه ثابت تابع تعریف شده یک نقطه تعادل بازی مورد نظر است. فرض کنید $\phi : X \to 2^Y$ با دامنه مجموعه X و برد مجموعه توانی Y باشد. می‌گوییم ϕ دارای یک گراف بسته است اگر مجموعه $\{(x, y)|y \in \phi(x)\}$ یک زیرمجموعه بسته در فضای توپولوژیکی $X \times Y$ باشد. در ادامه ابتدا قضیه نقطه ثابت کاکوتانی را بیان می‌کنیم. سپس با تعریف درست تابع ϕ و استفاده از قضیه کاکوتانی نشان می‌دهیم که بازی با تعداد متناهی دسته و تابع ارزش پیوسته نقطه تعادل دارد. دقت کنید که فرض کرده‌ایم که تأثیرات منفی در جامعه وجود ندارد و در نتیجه تابع ارزش هر فرد صعودی خواهد بود. قضیه نقطه ثابت کاکوتانی در ادامه آمده است:

قضیه ۱.۲.۵. *قضیه نقطه ثابت کاکوتانی [۳۰]: فرض کنید S یک زیرفضای غیرتهی، فشرده[۷]، و محدب از فضای اقلیدسی R^n باشد. همچنین فرض کنید $\phi : S \to 2^S$ یک تابع مجموعه‌ای بر روی S با گراف بسته باشد. اگر برای هر $x \in S$ مقدار $\phi(x)$ غیرتهی و محدب باشد، در این صورت ϕ یک نقطه ثابت مانند x خواهد داشته که $x \in \phi(x)$.*

قضیه ۲.۲.۵. *اگر تابع ارزش پیوسته و صعودی باشد آنگاه زیربازی با بردار قیمت p نقطه تعادل خواهد داشت.*

برهان. ماتریس S را زیر فضایی از $\mathbb{R}^{k\times n}$ در نظر بگیرید که برابر تمام ماتریس‌های پایه استراتژی ممکن x باشد. به ازای هر دسته t، مقدار $\mu(t)$ را برابر طول T_t تعریف می‌کنیم. با توجه به تعریف T_t می‌دانیم که T_t زیربازه‌ای از $[0, 1]$ است. هر عضو S یک ماتریس پایه استراتژی $x = (x_{1,1}, \cdots, x_{k,n})$، که $x_{i,t}$ میزان خریداران دسته t است که کالا را در روز i خریده‌اند. در این صورت برای هر $1 \le t \le n$، نامساوی $\sum_i x_{i,t} \le \mu(t)$ برقرار است. تابع $\phi : S \to 2^S$ به این صورت تعریف می‌کنیم که برای هر $x \in S$ مقدار $\phi(x)$ برابر تمام ماتریس‌های پایه استراتژی است که شامل بهترین جواب‌ها به ماتریس پایه استراتژی x هستند. به عبارتی دیگر $\phi(x)$ شامل ماتریس‌هایی مانند y است که خواص زیر را داشته باشد:

۱. خریداری از دسته t در ماتریس پایه استراتژی y کالا را می‌خرد، اگر افراد دسته t بتوانند کالا را در ماتریس پایه استراتژی x با سود نامنفی بخرند. به بیانی دیگر $\sum_i y_{i,t} > 0$ اگر روزی مانند j وجود داشته باشد که $F_j^t(X_j) - p_j \ge 0$.

[۷] compact

۲. اگر افراد دسته t بتوانند کالا را در x با سود مثبت بخرند، آن‌گاه تمام افراد دسته t در y کالا را می‌خرند. به بیانی دیگر اگر روزی مانند j وجود داشته باشد که $F_j^t(X_j) - p_j > ۰$، آنگاه $\sum_i y_{i,t} \geq \mu(t)$.

۳. اگر خریدار در y کالا را خریداری می‌کند، آن را در روزی می‌خرد که بیش‌ترین سود را در x داشته است. به بیانی دیگر اگر برای یک دسته t و یک روز i داشته باشیم $y_{i,t} > ۰$، آنگاه خواهیم داشت $i \in argmax_j\{F_j^t(X_j) - p_j\}$.

اگر شروط قضیه کاکوتانی برقرار باشد، می‌توان نتیجه گرفت که یک نقطه ثابت $x \in S$ وجود دارد که $x \in \phi(x)$. به‌راحتی می‌توان دید که هر نقطه ثابت تابع ϕ یک نقطه تعادل است. در ادامه نشان می‌دهیم که مجموعه S و تابع ϕ شرایط قضیه کاکوتانی را دارند. مجموعه S را می‌توان به عنوان زیرفضایی از $\mathbb{R}^{k\times n}$ دید که شروط خطی زیر را دارد:

$$\forall i,t : x_{i,t} \geq ۰, \forall t : \sum_i x_{i,t} \leq \mu(t)$$

بنابراین S حاصل اشتراک یک سری زیرفضای است و در نتیجه یک چندوجهی در فضای $\mathbb{R}^{k\times n}$ است که یک مجموعه بسته و محدب خواهد بود. هم‌چنین از آن‌جایی که $x_{i,t}$ در بازه $[۰, \mu(t)]$ است، پس مجموعه S کران‌دار است. در نتیجه S یک زیرمجموعه فشرده و محدب از فضای $\mathbb{R}^{k\times n}$ است.

یک نقطه دلخواه x از S را در نظر بگیرید. می‌توان مجموعه $\phi(x)$ را به عنوان اشتراک S و تعدادی زیر فضایی که با نامساوی‌های خطی در بالا بیان شده است تعریف کرد. بنابراین $\phi(x)$ نیز یک مجموعه محدب است. از طرفی می‌دانیم $\phi(x)$ تهی نیست. چون هر خریدار از دسته t یک پاسخ بهینه به ماتریس استراتژی X متناظر با ماتریس پایه استراتژی x دارد، که این پاسخ بهینه یا خرید در یک روز j است که $F_j^t(X_j) - p_j \geq ۰$ و یا عدم خرید کالا است.

تنها شرط باقیمانده از قضیه کاکوتانی این است که نشان دهید، گراف تابع ϕ یک زیرمجموعه بسته از $\mathbb{R}^{۲(k\times n)}$ است. به این منظور، ثابت می‌کنیم برای هر نقطه (x,y) که بیرون گراف ϕ قرار دارد، یک همسایگی باز اطراف آن نقطه وجود دارد که بیرون گراف ϕ است. این همسایگی به صورت $A \times B$ خواهد بود، که A یک همسایگی باز اطراف x است و B یک همسایگی باز اطراف y. فرض کنید (x,y) در گراف ϕ نباشد. در این صورت یا (x,y) در $S \times S$ نیست و یا y یکی از شروطی را که برای $\phi(x)$ بیان کردیم، ندارد. در حالت اول و با توجه به این‌که S بسته است، $S \times S$ بسته خواهد بود و می‌توانیم یک همسایگی باز اطراف (x,y) تعریف کنیم که اشتراکی با $S \times S$ و در نتیجه گراف ϕ ندارد. برای بررسی حالت دوم فرض کنید y حداقل یکی از شروط $\phi(x)$ را نداشته باشد. تابع $U : \mathbb{R}^{k\times n} \to \mathbb{R}^{k\times n}$ به این صورت تعریف می‌کنم که به هر ماتریس پایه استراتژی $x \in S$ ماتریس سود $\{u_{i,t}\}$ را نسبت می‌دهد که $u_{i,t} = F_i^t(X_i) - p_i$. در حقیقت $u_{i,t}$ سود خرید یک فرد از دسته t در روز i در ماتریس پایه استراتژی x است. با توجه به پیوستگی و صعودی بودن تابع

ارزش، تابع U و در نتیجه $U^{-۱}$ پیوسته و برگشت‌پذیر هستند. با فرض $y \notin \phi(x)$، یک دسته t وجود دارد که یکی از خواص زیر را داشته باشد:

۱. $\sum_j y_{j,t} > ۰$ و برای تمام روزهای j مقدار $u_{j,t}$ منفی است: در این صورت تعریف می‌کنیم $A = \{U^{-۱}(\{u_{i,t}\}) \mid \forall j : u_{j,t} < ۰\}$ و $B = \{\{y_{i,t}\} \mid \sum_j y_{j,t} > ۰\}$.

۲. $\max_j u_{j,t} > ۰$ و $\sum_j y_{j,t} < \mu(t)$: در این صورت تعریف می‌کنیم $A = \{U^{-۱}(\{u_{i,t}\}) \mid \exists i : u_{i,t} > ۰\}$ و $B = \{\{y_{i,t}\} \mid \sum_i y_{i,t} < \mu(t)\}$.

۳. وجود دارد مقداری مانند j' که $j^* \notin \arg\max_j u_{j,t}$ و $y_{j^*,t} > ۰$:در این صورت تعریف می‌کنیم $A = \{U^{-۱}(\{u_{i,t}\}) \mid \exists i : u_{i,t} > u_{j^*,t}\}$ و $B = \{\{y_{i,t}\} \mid y_{j^*,t} > ۰\}$.

با تعاریف ارائه شده از A و B در حالت‌های مختلف، $A \times B$ یک همسایگی باز است که شامل (x, y) می‌شود. دقت کنید که $U^{-۱}$ یک تابع پیوسته و برگشت‌پذیر است و ما از آن بر روی یک زیرمجموعه باز استفاده کرده‌ایم. از طرفی $A \times B$ اشتراکی با گراف ϕ ندارد. در نتیجه گراف تابع ϕ بسته است. پس تمام شروط قضیه کاکوتانی برقرار است و می‌توان از آن استفاده کرد و در نتیجه تابع ϕ یک نقطه ثابت x دارد که $x \in \phi(x)$. همین نقطه x یک نقطه تعادل است.

□

در ادامه نشان می‌دهیم که اگر تابع ارزش پیوسته نباشد، ممکن است زیربازی با بردار قیمت p نقطه تعادل نداشته باشد.

مثال ۳.۲.۵. در این مثال خریداران به یک دسته تعلق دارند و قیمت‌گذاری در دو روز انجام می‌شود. تابع ارزش برای روز $i = ۱, ۲$ برابر $F_i(X) = ۱$ است اگر $X \leq \frac{۱}{۲}$ و برابر $F_i(X۰ = \frac{۳}{۲} + X$ اگر $X > \frac{۱}{۲}$. نشان می‌دهیم که زیربازی با بردار قیمت $p = (۰, ۱)$ نقطه تعادل ندارد. ماتریس پایه استراتژی x را در نظر بگیرید. اگر $x_۱ \leq \frac{۱}{۲}$ سود خرید کالا در روز اول برابر ۱ و سود خرید کالا در روز دوم برابر ۰ است. بنابراین فردی که در روز اول کالا را نخریده است و به مقدار ۰ سود کرده است بهترین بازی خود را انجام نداده است. بنابراین x نقطه تعادل نمی‌باشد. از طرفی دیگر اگر $x_۱ > \frac{۱}{۲}$ سود خرید کالا در روز اول برابر ۱ و در روز دوم بیشتر از $۳/۲ + ۱/۲ - ۱ = ۱$ خواهد بود. بنابراین یک فرد که در روز اول کالا را خریده است بهترین بازی خود را نکرده است و می‌تواند با خرید در روز دوم سود بیشتری کند. بنابراین x در این حالت نیز نقطه تعادل نمی‌باشد.

با وجود این‌که مثال بالا نشان می‌دهد که در صورتی پیوسته نبودن تابع ارزش ممکن است نقطه تعادل نداشته باشیم، ولی با یک تغییر کوچک در تابع ارزش در نقطه $\frac{۱}{۲}$ این مشکل برطرف خواهد شد. به عبارت دیگر فرض

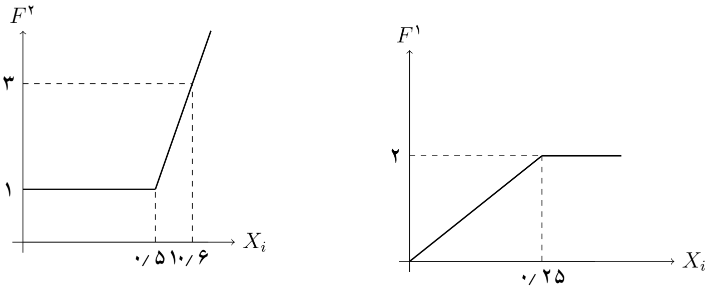
کنید تابع ارزش برای روز $i = ۱, ۲$ برابر $F_i(X) = ۱$ است اگر $X < \frac{۱}{۲}$ و برابر $F_i(X۰ = \frac{۳}{۲} + X$ اگر $X \geq \frac{۱}{۲}$. در این صورت نقطه $x = (۱/۲, ۱/۲)$ یک نقطه تعادل برای بردار قیمت $p = (۰, ۱)$ خواهد بود. در ادامه مثالی دیگر ارائه می‌دهیم که تابع ارزش پیوسته نبوده و زیربازی با بردار قیمت p نقطه تعادل ندارد. این مثال نسبت به تغییرات جزئی در تابع ارزش پایدارتر عمل می‌کند.

مثال ۴.۲.۵. در این مثال خریداران به سه دسته تقسیم می‌شوند و جمعیت هر دسته برابر ۱/۳ است. قیمت‌گذاری در دو روز انجام می‌شود. تابع ارزش برابر $F_i^t(X) = ۲$ اگر $X_{t'} < \frac{۱}{۳}$و برابر $F_i^t(X) = ۴$ است اگر $X_{t'} \geq \frac{۱}{۳}$، که t' به ترتیب برای $t = ۱, ۲, ۳$برابر $t' = ۲, ۳, ۱$ است. در ادامه نشان می‌دهیم که زیربازی با بردار قیمت $p = (۱, ۲)$ نقطه تعادل ندارد. ابتدا فرض کنید برای $۱ \leq t \leq ۳$ داشته باشیم $x_{۱,t} < ۱/۳$. در این صورت برای هر فرد سود خریدن کالا در روز اول برابر $۲ - ۱ = ۱$ و در روز دوم برابر $۲ - ۲ = ۰$ است. بنابراین هر فرد ترجیح می‌دهد در روز اول کالا را بخرد و باید برای $۱ \leq t \leq ۳$ داشته باشیم $x_{۱,t} = ۱/۳$. پس x نمی‌تواند نقطه تعادل باشد. حال بدون لطمه به کلیت مسئله فرض کنید $x_{۱,۱} = ۱/۳$. در این صورت سود یک فرد در دسته ۳ برای خرید کالا در روز اول برابر $۲ - ۱ = ۱$ و در روز دوم برابر $۴ - ۲ = ۲$ خواهد بود. بنابراین تمام افراد دسته ۳ در روز دوم کالا را می‌خرند و خواهیم داشت $x_{۱,۳} = ۰$ و $x_{۲,۳} = ۱/۳$. در این صورت سود یک فرد در دسته ۲ برای خرید کالا در روز اول برابر $۲ - ۱ = ۱$ و در روز دوم برابر $۲ - ۲ = ۰$ خواهد بود. بنابراین تمام افراد دسته ۲ در روز اول کالا را می‌خرند و خواهیم داشت $x_{۱,۲} = ۱/۳$ و $x_{۲,۲} = ۰$. در این صورت سود یک فرد در دسته ۱ برای خرید کالا در روز اول برابر $۲ - ۱ = ۱$ و در روز دوم برابر $۴ - ۲ = ۲$ خواهد بود. بنابراین تمام افراد دسته ۱ در روز دوم کالا را می‌خرند و خواهیم داشت $x_{۱,۱} = ۰$ و $x_{۲,۱} = ۱/۳$ که متناقض با فرض $x_{۱,۱} = ۱/۳$ است. بنابراین x در این حالت نیز نمی‌تواند نقطه تعادل باشد.

۲.۲.۵ نقطه تعادل خوش‌رفتار

طراحی الگوریتم برای پیدا کردن نقطه تعادل کامل بر این فرض استوار است که زیربازی با بردار قیمت p حتماً دارای نقطه تعادل خوش‌رفتار است. ولی متاسفانه این فرض همیشه برقرار نیست. در ادامه مثالی می‌زنیم که نشان می‌دهد بازی حتی در مدل تجمعی دارای نقطه تعادل خوش‌رفتار نیست.

مثال ۵.۲.۵. در این مثال خریداران به دو دسته تقسیم می‌شوند و جمعیت هر دسته برابر ۱/۲ است. قیمت‌گذاری در ۳ روز انجام می‌شود. تابع‌های ارزش $F_i^۱(X_i)$ و $F_i^۲(X_i)$ در شکل ۱.۵ نشان داده شده‌اند. دقت کنید که $F_i^t = F_j^t$ برای $i \neq j$. هم‌چنین مدل تجمعی در نظر گرفته شده است و تابع ارزش تنها به تعداد کل افرادی که کالا را خریده اند بستگی دارد. در ادامه نشان می‌دهیم زیربازی با بردار قیمت $p = (۱, ۲, ۳)$ نقطه تعادل خوش‌رفتار ندارد. دقت کنید که سود یک خریدار از دسته ۱ برای خرید کالا در روز اول برابر $۰ - ۱ = -۱$ و



شکل ۱.۵: تابع ارزش برای افراد دسته ۱ و ۲.

در روز سوم حداکثر برابر $۲ - ۳ = -۱$ می‌باشد. بنابراین هیچ خریداری از دسته ۱ در روز اول و سوم خرید نخواهد کرد و در نتیجه خواهیم داشت $x_{۱,۱} = x_{۳,۱} = ۱$. دو حالت برای $x_{۱,۲}$ در نظر می‌گیریم. اگر $x_{۱,۲} < \frac{۱}{۴}$ در این صورت سود خریداری از دسته ۱ برای خرید کالا در روز دوم برابر $۲ - ۲(x_{۱,۱} + x_{۱,۲})$ خواهد بود. چون مقدار $x_{۱,۱} = ۰$ و $x_{۱,۲} < \frac{۱}{۴}$، بنابراین سود خرید کالا در روز دوم برای خریداران دسته ۱ منفی خواهد بود و در نتیجه $x_{۲,۱} = ۰$. در نتیجه جمعیت افرادی که قبل از روز دوم و سوم خریده اند برابر $x_{۱,۲} < \frac{۱}{۴}$ است و در نتیجه سود افراد دسته ۲ برای خرید در روز دوم و سوم منفی خواهد شد. از طرفی می‌دانیم سود افراد دسته ۲ برای خرید در روز اول برابر صفر است. پس در یک تعادل خوش‌رفتار باید تمام افراد دسته ۲ در روز اول کالا را بخرند و در نتیجه $x_{۱,۲} = \frac{۱}{۲}$ که در تناقض با فرض $x_{۱,۲} < \frac{۱}{۴}$ است. حال فرض کنید $x_{۱,۲} \geq \frac{۱}{۴}$. در این صورت سود خرید کالا در روز دوم برای افراد دسته ۱ برابر $۲ - ۲ = ۰$ خواهد شد. چون به دنبال تعادل خوش‌رفتار هستیم. بنابراین تمام افراد دسته ۱ باید در روز دوم کالا را خریداری کنند و داشته باشیم $x_{۲,۱} = \frac{۱}{۲}$. در این صورت سود خرید کالا برای افراد دسته ۲ در روز دوم برابر -۱ و در روز سوم بیشتر از ۰ خواهد بود. پس افراد دسته ۲ ترجیح بر خرید کالا در روز سوم می‌دهند که به معنی $x_{۳,۲} = \frac{۱}{۲}$ است. این نتیجه به فرض $x_{۱,۲} \geq \frac{۱}{۴}$ در تناقض است. بنابراین هیچ نقطه تعادل خوش‌رفتار نخواهیم داشت.

دقت کنید که اگر این امکان برای افراد وجود داشته باشد که در صورتی که سود خرید کالا برایشان صفر است، کالا را نخرند در این صورت بازی دارای نقطه تعادل است. در حقیقت این بازی با بردار قیمت $p = (۱, ۲, ۳)$ دارای نقطه تعادل $x = ((۰, ۰/۲۵), (۰/۳۵, ۰), (۰, ۰/۲۵))$ است که این نقطه تعادل یک نقطه تعادل خوش‌رفتار نیست.

البته نشان خواهیم داشته که نقطه تعادل خوش‌رفتار برای مدل خطی و متقارن وجود دارد. در ادامه در قضیه ۶.۲.۵ ثابت می‌کنیم که اگر تابع‌های ارزش دارای شروطی باشند در این صورت زیربازی با هر بردار قیمتی نقطه تعادل خوش‌رفتار خواهد داشت. این قضیه بدون لطمه به کلیت برای تعداد محدودی دسته بیان شده است و قابل تعمیم با تعداد نامتناهی دسته است.

قضیه ۶.۲.۵. *اگر* $min_{t,i}F_i^t(\cdot) \leq min_i p_i$ *و یا* $max_{t,i}F_i^t(\cdot) < min_i p_i$ *در این صورت تعادل خوش‌رفتار خواهیم داشت.*

برهان. اگر $max_{t,i}F_i^t(\cdot) < min_i p_i$ در این صورت یک نقطه تعادل خواهیم داشت که هیچ فردی کالا را نخرد. در این حالت سود یک نفر از دسته t برای خرید در روز i برابر $F_i^t(\cdot) - p_i$ است که این مقدار منفی است. پس در این حالت هر فردی در صورت خرید کالا سود منفی خواهد داشت و در نتیجه ترجیح می‌دهد کالا را نخرد. بنابراین نقطه تعادلی که هیچ فردی کالا را نخرد یک نقطه تعادل خوش‌رفتار است.

در حالت دیگر فرض کنید $min_{t,i}F_i^t(\cdot) \leq min_i p_i$. بردار قیمت $p - \epsilon = (p_1 - \epsilon, p_2 - \epsilon, ..., p_k - \epsilon)$ را به ازای $\epsilon > 0$ در نظر بگیرید. دقت کنید که در مدل ارائه شده قیمت‌ها می‌توانند منفی نیز باشند. با توجه به بردار قیمت جدید سود یک فرد از دسته t برای خرید در روز i حداقل $F_i^t(\cdot) - p_i + \epsilon > 0$ است و خرید کالا را به عدم خرید آن ترجیح می‌دهد. در نتیجه هر نقطه تعادلی در زیربازی با بردار قیمت $p - \epsilon$ یک نقطه تعادل خوش‌رفتار است. در نتیجه زیربازی با بردار قیمت $p - \epsilon$ یک نقطه تعادل خوش‌رفتار دارد. در ادامه نشان می‌دهیم همین نقطه تعادل یک نقطه تعادل برای زیربازی با بردار قیمت p است. زمانی که تمام قیمت‌ها را به مقدار یکسان کاهش می‌دهیم، میزان سود افراد به همان میزان افزایش پیدا می‌کند. بنابراین ترتیب سود خرید در روزهای مختلف برای هر فرد در هر دو بردار قیمت یکسان است. از طرفی دیگر به دلیل این‌که $min_{t,i}F_i^t(\cdot) \leq min_i p_i$ بنابراین سود خرید کالا برای هر فرد نامنفی می‌باشد و در نتیجه هیچ فردی ترجیح نمی‌دهد که کالا را نخرد. در نتیجه همان نقطه تعادل زیربازی با قیمت $p - \epsilon$، یک نقطه تعادل خوش‌رفتار برای زیربازی با قیمت p است. □

۳.۵ یکتایی نقطه تعادل

در بخش ۲.۵ مسئله وجود نقطه تعادل را مطالعه کردیم. در این بخش مسئله یکتایی نقطه تعادل را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ابتدا نشان می‌دهیم اگر تابع ارزش نسبت به دسته‌های مختلف رفتار متفاوت داشته باشد، می‌توان نقاط تعادل متفاوت داشته که سود فروشنده در این نقاط تعادل متفاوت است. در مثال ۱.۳.۵ نشان می‌دهیم حتی اگر تابع ارزش پیوسته باشد ولی نسبت به دسته‌های مختلف حساس باشد، چند نقطه تعادل خواهیم داشت. در ادامه در قضیه ۳.۳.۵ ثابت می‌کنیم که در مدل تجمعی در تمام نقاط تعادل تعداد افرادی که کالا را در روز i می‌خرند یکسان هستند. به بیان دیگر ثابت می‌کنیم در مدل تجمعی سود فروشنده در تمام نقاط تعادل یکسان است. برای اثبات قضیه ۳.۳.۵ از لم ۲.۳.۵ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱.۳.۵. در این مثال خریداران به دو دسته تعلق دارند و قیمت‌گذاری در دو روز انجام می‌شود. تابع ارزش به صورت $F_i^t(Y) = Y_{t'} + 2$ است که $t = 1, 2$ و $t \neq t'$. در حقیقت تابع ارزش تنها به میزان خریداران دسته

دیگر وابسته است. جمعیت دسته اول برابر ۰/۳ و جمعیت دسته دوم ۰/۷ است. در این مثال به دنبال نقاط تعادل برای زیربازی با بردار قیمت $p = (۱, ۱/۲)$ هستیم. دقت کنید که دو نقطه $x = ((۰/۳, ۰), (۰, ۰/۷))$ و $x' = ((۰, ۰/۷), (۰/۳, ۰))$ دو نقطه تعادل برای زیربازی تعریف شده هستند. در نقطه تعادل اول تمام افراد دسته ۱ کالا را در روز اول و تمام افراد دسته ۲ کالا را در روز دوم می‌خرند. سود فروشنده در این نقطه تعادل برابر $۱/۱۴ = ۱/۲ \times ۰/۷ + ۱ \times ۰/۳$ است. در نقطه تعادل دوم تمام افراد دسته ۱ کالا را در روز دوم و تمام افراد دسته ۲ کالا را در روز اول می‌خرند. سود فروشند در این نقطه تعادل برابر $۱/۰۶ = ۱/۲ \times ۰/۳ + ۱ \times ۰/۷$ است. بنابراین زیربازی با بردار قیمت p دو نقطه تعادل خوش‌رفتار متفاوت دارد که سود فروشنده در این دو نقطه تعادل متفاوت است.

هدف در ادامه این بخش اثبات یکتایی نقطه تعادل در مدل تجمعی است. در حقیقت نشان می‌دهیم اگر یک نقطه تعادل خوش‌رفتار در مدل تجمعی وجود داشته باشد در این صورت این نقطه تعادل یکتا خواهد بود. دقت کنید که در مدل تجمعی می‌توان تعداد نامتناهی دسته داشت و حالت کلی مدل خطی و متقارن است که تمرکز اصلی ما در این فصل برروی این دو مدل است.

در ادامه مانند آنچه برای مدلی تجمعی تعریف کردیم، تابع ارزش خریدار $b \in [۰, ۱]$ را با F_i^b نشان می‌دهیم. ثابت خواهیم کرد که در تمام نقاط تعادل خوش‌رفتار، تعداد افرادی که در هر روز کالا را می‌خرند یکسان است و در نتیجه سود فروشنده در تمام نقاط تعادل خوش‌رفتار یکسان است. برای اثبات این مطلب زیربازی با بردار قیمت p را در نظر بگیرید. دو نقطه تعادل خوش‌رفتار x و y را برای این زیربازی در نظر بگیرید که $x \neq y$. با توجه به این‌که $x \neq y$، بدون لطمه به کلیت مسئله یک روز i وجود دارد که $X_i < Y_i$. روزها را به دو گروه مختلف تقسیم می‌کنیم. روز i از گروه ۱ است و آن را با $i \in D_۱(x, y)$ نشان می‌دهیم، اگر $X_i < Y_i$. به همین صورت روز i در گروه ۲ است و آن را با $i \in D_۲(x, y)$ نشان می‌دهیم، اگر $X_i \geq Y_i$. در ادامه در راستای اثبات لم ۳.۳.۵ ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۲.۳.۵. *فرض کنید دو نقطه تعادل خوش‌رفتار متفاوت x و y برای زیربازی با بردار قیمت p وجود داشته باشد. در این صورت یک خریدار وجود دارد که در نقطه تعادل x کالا را در روز $j_x \in D_۱(x, y)$، و در نقطه تعادل y کالا را در روز $j_y \in D_۲(x, y)$ خریده است.*

برهان. فرض کنید $S_۱$ مجموعه خریدارانی باشند که کالا را در یک روز از گروه یک در x خریده‌اند. همچنین فرض کنید $S_۲$ مجموع خریدارانی باشند که کالا را در یک روز از گروه دو در y خریده‌اند. تعریف می‌کنیم $S = S_۱ \cup S_۲$. هدف اثبات این مطلب است که $|S_۱| + |S_۲| > |S|$. در نتیجه $S_۱$ و $S_۲$ اشتراک خواهند داشت و لم ثابت می‌شود. دقت کنید که خریداری که هم در $S_۱$ است و هم در $S_۲$، خریداری است که در این لم به دنبال اثبات وجودش هستیم. در ادامه نشان می‌دهیم $|S_۱| + |S_۲| > min(X_{k+۱}, Y_{k+۱}) \geq |S|$. ابتدا

ثابت می‌کنیم $min(X_{k+1}, Y_{k+1}) \geq |S|$. یک خریدار مانند b در S را در نظر بگیرید. در این صورت:

- اگر $b \in S_1$، خریدار b کالا را در یک روز گروه یک مثل $i \in D_1(x, y)$ در نقطه تعادل x خریده است. چون i در گروه یک است پس $X_i < Y_i$. بنابراین سود خریدار b برای خرید در روز i در نقطه تعادل y نامنفی است. چون y یک نقطه تعادل خوش‌رفتار است، پس b حتماً در نقطه تعادل y کالا را خریده است. بنابراین b هم در x و هم در y کالا را خریده است و در X_{k+1} و Y_{k+1} به حساب می‌آید.

- اگر $b \in S_2$، خریدار b کالا را در یک روز گروه دو مثل $i \in D_2(x, y)$ در نقطه تعادل y خریده است. چون i در گروه دو است پس $X_i \geq Y_i$. بنابراین سود خریدار b برای خرید در روز i در نقطه تعادل x نامنفی است. چون x یک نقطه تعادل خوش‌رفتار است، پس b حتماً در نقطه تعادل x کالا را خریده است. بنابراین b هم در x و هم در y کالا را خریده است و در X_{k+1} و Y_{k+1} به حساب می‌آید.

بنابراین ثابت شد که $min(X_{k+1}, Y_{k+1}) \geq |S|$.

دنباله $z = \{z_i\}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: اگر $i \in D_1(x, y)$آنگاه $z_i = x_i$ و اگر $i \in D_2(x, y)$ آنگاه $z_i = y_i$. دقت کنید که $|S_1| + |S_2| = \sum_{i \in D_1(x,y)} x_i + \sum_{i \in D_2(x,y)} y_i = \sum_{i=1}^{k} z_i$. بنابراین کافی است اثبات کنیم $\sum_{i=1}^{k} z_i > min(X_{k+1}, Y_{k+1})$. فرض کنید $Z_i = \sum_{j=1}^{i-1} z_i$. در ادامه با استفاده از استقرا ثابت می‌کنیم $Z_i \geq min(X_i, Y_i)$. پایه استقرا برای $i = 1$ بدیهی است. در حقیقت برای $i = 1$ داریم $Z_1 = X_1 = Y_1 = 0$. با فرض $Z_i \geq min(X_i, Y_i)$، ثابت خواهیم کرد $Z_{i+1} \geq min(X_{i+1}, Y_{i+1})$. برای روز iدو احتمال وجود دارد:

- روز i در گروه یک باشد. در این صورت $Z_{i+1} = Z_i + z_i = Z_i + x_i$. طبق استقرا داریم $Z_i \geq min(X_i, Y_i)$. چون i در گروه یک است، بنابراین $Z_i \geq X_i$ که نتیجه می‌دهد $Z_{i+1} \geq X_i + x_i = X_{i+1} \geq min(X_{i+1}, Y_{i+1})$.

- روز i در گروه دو باشد. در این صورت $Z_{i+1} = Z_i + z_i = Z_i + y_i$. طبق استقرا داریم $Z_i \geq min(X_i, Y_i)$. چون i در گروه دو است، بنابراین $Z_i \geq Y_i$ که نتیجه می‌دهد $Z_{i+1} \geq Y_i + y_i = Y_{i+1} \geq min(X_{i+1}, Y_{i+1})$. دقت کنید که اگر $i + 1$ در گروه یک باشد، خواهیم داشت $X_{i+1} < Y_{i+1}$. به بیانی دیگر نامساوی اثبات شده اکید خواهد بود و خواهیم داشت: $Z_{i+1} > min(X_{i+1}, Y_{i+1})$.

بنابراین ثابت کردیم که $Z_{k+1} \geq min(X_{k+1}, Y_{k+1})$. ولی برای اثبات لم لازم داریم که ثابت کنیم Z_{k+1} اکیداً بزرگ‌تر از $min(X_{k+1}, Y_{k+1})$ است. برای این مطلب کافی است که ثابت کنیم به ازای یک i خواهیم داشت: $Z_i > min(X_i, Y_i)$. در این صورت طبق استدلال ارائه شده، برای تمامی روزهای بعد از i مانند j

هم خواهیم داشت: $Z_j > min(X_j, Y_j)$. دقت کنید که در حالت دوم از استدلال ارائه شده نشان دادیم اگر دو روز مانند i و $i+1$ پیدا شوند که i در گروه دوم و $i+1$ در گروه اول هستند در این صورت خواهیم داشت $Z_{i+1} > min(X_{i+1}, Y_{i+1})$. دقت کنید که روز اول در گروه دو است. همچنین طبق فرضی که قبل از این لم کردیم روزی مانند i وجود دارد که $X_i < Y_i$ و یا به بیانی دیگر i در گروه ۱ است. پس اگر j را اولین روزی بگیریم که در گروه ۱ است. برای روزهای j و $j-1$ خواهیم داشت که $j-1$ در گروه اول و j در گروه دوم است و در نتیجه خواهیم داشت $Z_j > min(X_j, Y_j)$. بنابراین برای تمام اعداد بعد از j نامساوی به صورت اکید برقرار خواهد بود. □

در ادامه قضیه اصلی این بخش را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۳.۳.۵. *فرض کنید $F_i^b(X)$ یک تابع ارزش اکیداً صعودی برای فرد b در روز i باشد. برای بردار قیمت p و دو نقطه تعادل x و y و هر روز i خواهیم داشت: $X_i = Y_i$. به بیانی دیگر تعداد افرادی که کالا را قبل از روز i می‌خرند در دو نقطه تعادل برابر است.*

برهان. با برهان خلف قضیه را ثابت می‌کنیم. فرض کنید دو نقطه تعادل خوش‌رفتار x و y و یک روز i وجود دارند که $X_i \neq Y_i$. بدون لطمه به کلیت مسئله فرض کنید $X_i < Y_i$. با استفاده از لم ۲.۳.۵ می‌توان نتیجه گرفت که یک خریدار مانند b وجود دارد که در یک روز گروه یک مانند i در نقطه تعادل x و در یک روز گروه دو مانند j در نقطه تعادل y خریده است. چون خریدار b در روز i در نقطه تعادل x کالا را خریده است، بنابراین $F_i^b(X_i) - p_i \geq F_j^b(X_j) - p_j$. به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت $F_j^b(Y_j) - p_j \geq F_i^b(Y_i) - p_i$. با جمع این دو نامساوی خواهیم داشت $F_i^b(X_i) + F_j^b(Y_j) \geq F_j^b(X_j) + F_i^b(Y_i)$. از طرفی دیگر چون i یک روز در گروه یک است، پس $X_i < Y_i$ و در نتیجه $F_i^b(X_i) < F_i^b(Y_i)$. به همین دلیل چون j یک روز در گروه دو است، پس $X_i \geq Y_i$ و در نتیجه $F_j^b(Y_j) \leq F_j^b(X_j)$. با جمع کردن این دو نامساوی خواهیم داشت $F_i^b(X_i) + F_j^b(Y_j) < F_j^b(X_j) + F_i^b(Y_i)$ که نامساوی قبلی را نقض می‌کند. □

۴.۵ بیشینه کردن سود فروشنده

در این فصل مسئله پیدا کردن نقطه تعادل کامل بازی را در دو حالت بررسی می‌کنیم. حالت اول مدل متقارن، و حالت دوم مدل خطی بدون در نظر گرفتن کم شدن ارزش پول در طول زمان است. در هر دو حالت یک الگوریتم FPTAS برای پیدا کردن بردار قیمت بهینه برای فروشنده ارائه می‌دهیم. ابتدا در بخش ۱.۴.۵ مدل متقارن را بررسی می‌کنیم. سپس در بخش ۲.۴.۵ مدل خطی بدون در نظر گرفتن کم شدن ارزش پول را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱.۴.۵ مدل متقارن

در مدل متقارن تمام خریداران در یک دسته قرار دارند و در نتیجه ماتریس پایه استراتژی به صورت بردار $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$ قابل بیان هستند. همچنین تابع ارزش برای تمام خریداران با تابع ارزش F قابل بیان است. به بیانی دقیق‌تر در صورت با در نظر گرفتن p و x، میزان سود یک خریدار b برای خرید در روز i برابر با $F_i^b(X_i) = F(X_i)\beta^i(1-\alpha)^i - p_i(1-\alpha)^i$، و میزان سود فروشنده برابر $R(p,x) = \sum_i x_i p_i (1-\alpha)^i$ است. با قرار دادن $q_i = p_i(1-\alpha)^i$ و $\gamma = \beta(1-\alpha)$، سود خریدار b برای خرید در روز i برابر $F(X_i)\gamma^i - q_i$ و سود فروشنده برابر $\sum_i x_i q_i$ است. با تعریف γ و q در ادامه بدون لطمه به کلیت مسئله فرض می‌کنیم تنها ضریب γ در مسئله وجود دارد. همچنین در ادامه از p به جای q استفاده می‌کنیم.

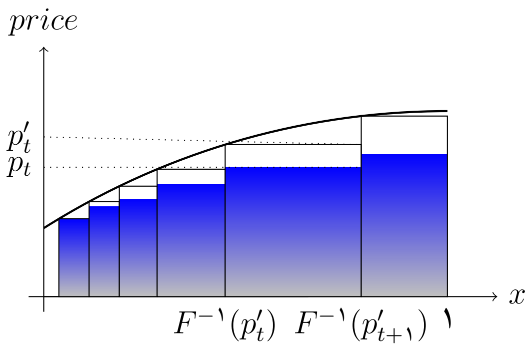
به دلیل اینکه تنها یک دسته داریم، سود خرید در روز i برای تمام خریداران یکسان است. در ادامه سود روز i برای تمام خریداران را با $u_i = F(X_i)\gamma^i - p_i$ نشان می‌دهیم. همچنین سود روز i را برابر u_i تعریف می‌کنیم. فرض کنید $u(p,x) = max_i u_i$. بردار قیمت p و نقطه تعادل خوش‌رفتار متناظر آن x را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه هر فرد به دنبال بیشینه کردن سود خود هستند، می‌توان نتیجه گرفت:

- اگر در یک روز i داشته باشیم $x_i > 0$، می‌توان نتیجه گرفت $u(p,x) \geq 0$. همچنین به دلیل اینکه حداقل یک نفر وجود دارد که در روز i خریده است، بنابراین $u_i = u(p,x)$.
- اگر در یک روز i داشته باشیم $x_i > 0$، می‌توان نتیجه گرفت $\sum_{i=1}^{k} x_i = 1$. از $x_i > 0$ می‌توان نتیجه گرفت که سود خرید در روز i نامنفی است. پس در نقطه تعادل خوش‌رفتار x تمام افراد کالا را خریداری خواهند کرد.
-

در ادامه در لم ۱.۴.۵ ثابت می‌کنیم که در نقطه تعادل کامل که فروشنده به دنبال بیشینه کردن سود خود است، سود تمام خریداران صفر خواهد بود.

لم ۱.۴.۵. *اگر بردار قیمت p^* بردار قیمتی بهینه باشد که سود فروشنده را در نقطه تعادل $x^* = x_{p^*}$ بیشینه کند، آنگاه $u(p^*, x^*) = 0$.*

برهان. با برهان خلف مسئله را حل می‌کنیم. فرض کنید $u(p^*, x^*) = w > 0$. بردار $w^* = (w, \cdots, w)$ را یک بردار به طول k که تمام درایه‌های آن برابر w است تعریف می‌کنیم. بردار قیمت $p^* + w^*$ و بردار x^* را در نظر بگیرید. سود هر روز با بردار قیمت جدید به مقدار دقیقاً w کاهش پیدا می‌کند. دقت کنید $u(p^* + w^*, x^*) \geq u(p^*, x^*) - w = 0$. بنابراین پاسخ خریداران به بردار قیمت جدید تغییر نمی‌کند و x^*



شکل ۲.۵: مسئله پوشش مستطیلی. ناحیه آبی مساحت پوشش داده شده توسط مستطیل‌های ضریب خورده را نشان می‌دهد.

یک نقطه تعادل برای بردار قیمت $p^* + w^*$ است. با توجه به این‌که x^* یک نقطه تعادل خوش‌رفتار است و $\sum_i x_i^* =$ میزان سود فروشنده با توجه به بردار قیمت جدید به مقدار w افزایش پیدا می‌کند. این موضوع به این فرض که p^* سود فروشنده را در نقطه تعادل بیشینه می‌کند در تناقض است. □

یک بردار قیمت p با نقطه تعادل خوش‌رفتار x را در نظر بگیرید. فرض کنید برای یک روز i داشته باشیم $x_i = ۰$ و $x_{i+۱} > ۰$. یک بردار قیمت جدید p^* به این صورت تعریف می‌کنیم. p^* در تمام روزهای $i < j$ برابر p است. برای $i \leq j$ داریم: $p_j^* = p_{j+۱}/\gamma$. همچنین x_j^* را در تمام روزهای $i < j$ برابر x_j و در تمام $i \geq j$ برابر $x_{j+۱}$ تعریف می‌کنیم. همچنین فرض کنید $x_k^* = ۰$. به راحتی دیده می‌شود که (p^*, x^*) یک تعادل است. دقت کنید که میزان سود در این نقطه تعادل جدید کمتر نخواهد شد. بنابراین بدون لطمه به کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که اگر p^* قیمت بهینه باشد و x^* نقطه تعادل زیربازی با بردار قیمت p^* باشد، در این صورت یک روز مانند $k \leq k'$ پیدا می‌شود که $x_i \neq ۰$ اگر و تنها اگر $i \leq k'$ باشد. به بیانی دیگر در تمام روزهای قبل از k' حتماً خریداری وجود داشته است و در تمام روزهای بعد از k' خریداری نبوده است. با توجه به لم ۱.۴.۵ می‌توان نتیجه گرفت که برای $۱ \leq i \leq k'$ مقدار سود روز i صفر است و در نتیجه $u_i = F(X_i)\gamma^i - p_i = ۰$. با توجه به این‌که F یک تابع صعودی است، می‌توان تعریف کرد $X_i = F^{-۱}(p_i/\gamma^i)$. فرض کنید $p'_t = p_t/\gamma^t$. مقدار افرادی که روز i کالا را می‌خرند و پول p_i پرداخت می‌کنند برابر $x_i = F^{-۱}(p'_{i+۱}) - F^{-۱}(p'_i)$ است. بنابراین می‌توان سود فروشنده به صورت $\sum_i x_i p_i = \sum_i (F^{-۱}(p'_{i+۱}) - F^{-۱}(p'_i)) p'_i \gamma^i$ نوشت. این مقدار برابر مساحت ضریب خورده تعداد مستطیل است که زیر منحنی F قرار گرفته‌اند. برای مشاهده بهتر این موضوع به شکل ۲.۵ توجه کنید. بنابراین مسئله پیدا کردن سود بهینه به مسئله پوشش مستطیلی که در ادامه آمده است، تبدیل می‌شود. در بخش ۵.۵ مسئله پوشش مستطیلی را بررسی خواهیم کرد.

تعریف ۲.۴.۵. مسئله پوشش مستطیلی: تابع صعودی F و عدد طبیعی k داده شده است. هدف پیدا کردن

دنباله p با k عنصر است که مقدار $\sum_t (F^{-1}(p_{t+1}) - F^{-1}(p_t))p_t\gamma^t$ بیشنه شود. به عبارتی دیگر هدف قرار داد k مستطیل زیر منحنی F است که مساحت ضریب خورده آنها بیشینه شود.

۲.۴.۵ مدل خطی

در این بخش مسئله پیدا کردن بردار قیمت بهینه برای فروشنده را در مدل خطی و بدون در نظر گرفتن ارزش پول بررسی می‌کنیم. به این منظور ابتدا خواص نقطه تعادل کامل بازی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس نشان می‌دهیم چگونه می‌توان یک رابطه میان قیمت‌های بهینه، سود فروشنده و بردار پایه استراتژی x برقرار کرد. در انتها یک الگوریتم برای پیدا کردن بردار قیمت بهینه ارائه می‌دهیم که بر پایه حل مسئله پوشش مستطیلی استوار است. در حقیقت یک تابع که وابسته به توابع F و $\mathcal{C}$ است، بدست می‌آید و مسئله به مسئله پوشش مستطیلی برای این تابع تبدیل می‌شود. به این ترتیب یک الگوریتم FPTAS برای پیدا کردن بردار قیمت بهینه ارائه می‌کنیم.

خواص نقطه تعادل: یک بردار قیمت p و نقطه تعادل x متناظر با آن را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه ارزش پول در طول زمان کاهش پیدا نمی‌کند، می‌توان تمام روزهایی که هیچ فرد کالا را نمی‌خرد را در نظر نگرفت. بنابراین می‌توان فرض کرد وجود دارد $k' \leq k$ به طوری‌که خرید در روز i اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر $i \leq k'$. در نتیجه برای $j < i \leq k'$ خواهیم داشت $X_j < X_i$. سود خریدار b برای خرید در روز i برابر $I_b - C_bF(X_i) - p_i$ است. برای این‌که تمرکز اصلی را بر روی ساختار شبکه قرار دهیم، در ادامه فرض می‌کنیم I_b برای تمام خریداران یکسان و برابر مقدار I است. در این‌صورت می‌توان سود خریدار b در روز i را به صورت $I + C_bF(X_i) - p_i$ نشان داد. مجموعه نقاط $q_i = (F(X_i), p_i)$ برای $1 \leq i \leq k'$ در نظر بگیرید. مقدار $\hat{s}(i,j)$ را برابر $(p_i - p_j)/(F(X_i) - F(X_j))$ تعریف می‌کنیم. این مقدار برابر شیب خط بین نقاط q_i و q_j است. فرض کنید $i > j$. خریدار b روز i را به روز j ترجیح می‌دهد، اگر و تنها اگر $I + C_bF(X_i) - p_i \geq I + C_bF(X_j) - p_j$. این شرط را می‌توان به صورت $C_b \geq \frac{p_i - p_j}{F(X_i) - F(Xj)}$ نوشت. دقت کنید که چون $i > j$، پس $X_i > X_j$ و در نتیجه $F(X_i) > F(X_j)$. به همین صورت اگر $C_b \leq \frac{p_i - p_j}{F(X_i) - F(X_j)}$ خریدار b روز j را به روز i ترجیح می‌دهد.

تعریف می‌کنیم $s(i) = \hat{s}(i, i+1)$. در ادامه در لم ۳.۴.۵ ثابت می‌کنیم که s یک تابع غیر نزولی است. سپس در لم ۴.۴.۵ نشان می‌دهیم که سود خریدار b در روز i بیشینه می‌شود اگر و تنها اگر $C_b \in [s(i-1), s(i)]$. در نهایت از این دو لم در لم ۵.۴.۵ استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان بردار قیمت را از روی بردار پایه استراتژی بدست آورد. از این نتایج برای بدست آوردن بردار قیمت بهینه استفاده خواهیم کرد.

لم ۳.۴.۵. *تابع s که در بالا تعریف شده است یک تابع غیر نزولی است.*

برهان. فرض کنید i، $i+1$ و $i+2$ سه روز متوالی باشند و خریدار b تصمیم به خرید در روز $i+1$ گرفته

باشد. بنابراین روز $i+۱$ از دو روز i و $i+۲$ برای خریدار b بهتر است. بنابراین $C_b \geq \frac{p_{i+۱}-p_i}{F(X_{i+۱}-F(X_i)} = s(i) = \hat{s}(i+۱,i)$ و همچنین $s(i+۱) = \hat{s}(i+۲,i+۱) = \frac{p_{i+۲}-p_{i+۱}}{F(X_{i+۲})-F(X_{i+۱})} \geq C_b$. در نتیجه $s(i) \leq s(i+۱)$. □

لم ۴.۴.۵. *اگر $C_b \in [s(i-۱), s(i)]$، خریدار b بیشترین سود را با خرید در روز i می‌برد.*

برهان. فرض کنید $C_b \in [s(i-۱), s(i)]$. برای هر روز $j > i$ و با توجه به $C_b \leq s(i) \leq \hat{s}(i,j)$، سود خرید در روز i از روز j برای خریدار b بیشتر خواهد بود. برای هر روز $j < i$ و با توجه به $\hat{s}(i,j) \leq s(i-۱) \leq C_b$، سود خرید در روز i از روز j برای خریدار b بیشتر خواهد بود. حالت‌های خاص $C_b \in [۰, s(۱)]$ و $C_b \in [s(k-۱), \infty]$ با روش مشابه اثبات می‌شوند. □

لم ۵.۴.۵. *در نقطه تعادل برای هر $۲ \leq i \leq k$ خواهیم داشت:* $p_i - p_{i-۱} = (F(X_i) - F(X_{i-۱}))\mathcal{C}^{-۱}(X_i)$.

برهان. با توجه به لم ۴.۴.۵ خریدارانی که کالا را در روز i می‌خرند، خریدارانی هستند که C_b مربوط به آنها در بازه $[s(i-۱), s(i)]$ قرار دارد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $x_i = X_{i+۱} - X_i = \mathcal{C}(s(i)) - \mathcal{C}(s(i-۱))$. اگر به دو دنباله $X_۱, X_۲, \cdots, X_k$ و $\mathcal{C}(s(۰)), \mathcal{C}(s(۱)), \cdots, \mathcal{C}(s(k-۱))$ دقت کنید، اختلاف هر دو جمله متوالی در این دو دنباله یکسان است. همچنین مقدار اولیه این دو دنباله نیز با هم برابر است و داریم $X_۱ = \mathcal{C}(s(۰)) = ۰$. در نتیجه این دو دنباله با هم برابرند و $X_i = \mathcal{C}(s(i-۱))$. از طرف دیگر با توجه به تعریف s می‌دانیم $s(i-۱) = \frac{p_i - p_{i-۱}}{F(X_i) - F(X_{i-۱})}$. در نتیجه خواهیم داشت $\mathcal{C}^{-۱}(X_i) = \frac{p_i - p_{i-۱}}{F(X_i) - F(X_{i-۱})}$ و لم ثابت می‌شود. □

بیشینه کردن سود فروشنده: با توجه به اینکه خواص نقاط تعادل را بدست آوردیم، در این قسمت خواص نقاط تعادل‌هایی را بررسی می‌کنیم که نماینده نقطه تعادل کامل بازی هستند. در حقیقت نقاط تعادل زیربازی با بردار قیمت p را بررسی می‌کنیم که قیمت p یک نماینده برای بردار قیمت بهینه فروشنده است. در ادامه در لم ۶.۴.۵ اثبات می‌کنیم در بردار قیمت بهینه، اولین قیمت برابر I است. سپس در لم ۷.۴.۵ نشان می‌دهیم که سود فروشنده برای بردار قیمت بهینه تابعی از بردار پایه استراتژی x است. در نهایت نشان می‌دهیم که مسئله بیشینه کردن سود فروشنده به مسئله پوشش مستطیلی قابل تبدیل است و در نتیجه یک الگوریتم FPTAS برای حل آن وجود دارد.

لم ۶.۴.۵. *در بردار قیمت بهینه* $p_۱ = I$.

برهان. فرض کنید بردار قیمت p بردار قیمت بهینه برای فروشنده و x نقطه تعادل متناظر با آن باشد. سود خریداری که کالا را در روز اول می‌خرد برابر $I - p_۱ = I + C_bF(۰) - p_۱$ است. چون حداقل یک نفر

کالا را در روز یک خریده است بنابراین $I \leq p_1$. فرش کنید $I < p_1$. در این صورت بردار قیمت p' را با اضافه کردن $I - p_1$ به تمام درایه‌های p می‌سازیم. در این صورت بردار x یک نقطه تعادل برای زیربازی با بردار قیمت p' نیز خواهد بود. از طرفی چون قیمت در تمام روزها به مقدار $I - p_1$ افزایش پیدا کرده است، پس سود فروشنده با تعیین بردار قیمت p' بیشتر از p خواهد بود که خلاف بهینه بودن بردار قیمت p است. پس باید $I - p_1 = 0$. □

قبل از اثبات لم ۷.۴.۵ لازم است به چند نکته اشاره کنیم. دقت کنید که با در دست داشتن بردار پایه استراتژی x می‌توان مقدار X_i را حساب کرد و در نتیجه با استفاده از لم ۵.۴.۵ می‌توان مقدار $p_i - p_{i-1}$ را با توجه به معلوم بودن X_i ها محاسبه نمود. از طرفی دیگر ثابت کردیم که در بردار قیمت بهینه $I = p_1$. بنابراین بردار قیمت p با استفاده از بردار پایه استراتژی x به طور یکتا مشخص می‌شود. بنابراین می‌توان در مسئله پیدا کردن بردار قیمت بهینه به دنبال بردار پایه استراتژی متناظر آن گشت. در ادامه تلاش می‌کنیم که سود فروشنده در نقطه تعادل را به صورت تابعی از بردار پایه استراتژی x نشان دهیم.

لم ۷.۴.۵. *اگر بردار قیمت p بردار قیمت بهینه برای فروشنده و x نقطه تعادل در زیربازی با بردار قیمت p باشند، سود فروشنده را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:*

$$R(p,x) = I + \sum_{i=2}^{k}(1 - X_i)\mathcal{C}^{-1}(X_i)(F(X_i) - F(X_{i-1}))$$

برهان. با توجه به اینکه سود خرید در روز اول نا منفی است و به دنبال تعادل خوش‌رفتار هستیم، پس تمام افراد کالا را می‌خرند و $X_{k+1} = 1$. بنابراین سود فروشنده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

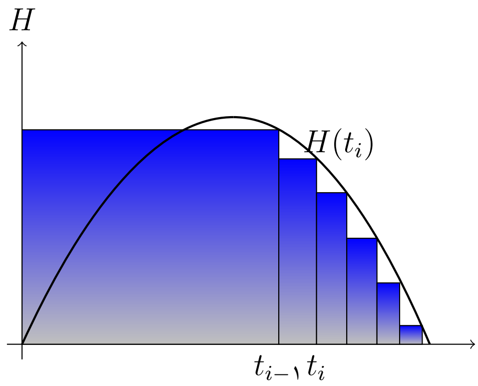
$$R(p,x) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i = p_1 \left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right) + \sum_{i=2}^{k}(p_i - p_{i-1}) \left(\sum_{j=i}^{k} x_j\right)$$

بیان سود فروشنده به صورت بالا را می‌توان این‌گونه توجیه کرد که تغییرات قیمت از روز $i - 1$ به روز i برروی تمام افرادی که کالا را در روز i یا بعد از آن می‌خرند، تأثیر می‌گذارد. با توجه به این‌که $\sum_{j=1}^{k} x_j = 1$، می‌توان سود فروشنده را به صورت $R(p,x) = p_1 + \sum_{i=2}^{k}(p_i - p_{i-1})(1 - X_i)$ بیان نمود. با جایگزین کردن مقدار p_1 و $p_i = p_{i-1}$ از لم‌های ۶.۴.۵ و ۵.۴.۵ می‌توان نتیجه گرفت:

$$R(p,x) = I + \sum_{i=2}^{k}\mathcal{C}^{-1}(X_i)(F(X_i) - F(X_{i-1}))(1 - X_i)$$

□

لم ۸.۴.۵. *پیدا کردن مقدار بیشینه $\sum_{i=2}^{k}(1 - X_i)\mathcal{C}^{-1}(X_i)(F(X_i) - F(X_{i-1}))$ با استفاده از مسئله پوشش مستطیلی قابل حل است.*



شکل ۳.۵: سود فروشنده با توجه به تابع H.

برهان. با توجه به این‌که F یک تابع صعودی و معکوس‌پذیر است، سود فروشنده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$R(p,x) = I + \sum_{i=2}^{k})(1 - F^{-1}(F(X_i)))\mathcal{C}^{-1}(F^{-1}(F(X_i)))(F(X_i) - F(X_{i-1}))$$

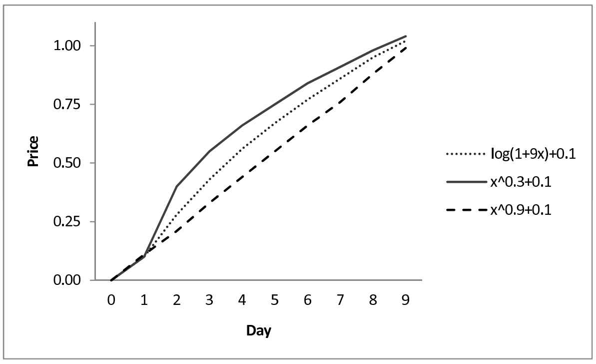
دقت کنید که در معادله بالا سود فروشنده تنها به $F(X_i)$ وابسته است و در ادامه تلاش می‌کنیم آن را به صورت مسئله پوشش مستطیلی بیان کنیم. فرض کنید $F_{min} = F(0)$ و $F_{max} = F(1)$. تابع $H : [F_{min}, F_{max}] \to \mathbb{R}$ را به صورت $H(x) = (1 - F^{-1}(x))\mathcal{C}^{-1}(F^{-1}(x))$ تعریف می‌کنیم. دقت کنید که سود فروشنده برابر $\sum_{i=2}^{k} H(F(X_i))(F(X_i) - F(X_{i-1}))$ است. بنابراین میخواهیم مقادیر $t_i = F(X_i)$ را طوری تعیین کنیم که سود فروشنده بیشنیه شود. دقت کنید که سود فروشنده را می‌توان به عنوان مجموع مساحت تعدادی مستطیل که یکی از گوشه‌های آنها بر روی منحنی H است، نگاه کرد. برای درک بهتر این موضوع به شکل ۳.۵ نگاه کنید. پیدا کردن این مستطیل‌ها شباهت زیادی به مسئله پوشش مستطیلی دارد. با تعریف $H'(x) = H(-x)$ و $t'_i = -t_{k-i}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} R(p,x) &= \sum H(t_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum H'(-t_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum H'(t'_{k-i})(t'_{k-i+1} - t'_{k-i}) = \sum H'(t'_j)(t'_{j+1} - t'_j)) \end{aligned}$$

بنابراین برای پیدا کردن سود بیشینه فروشنده باید مسئله پوشش مستطیلی را برای تابع H' حل کنیم. □

۳.۴.۵ نتایج تجربی بر روی مدل متقارن

در این بخش نحوه تغییر قیمت‌ها، رفتار افراد جامعه و تأثیر متغیرهای α و β در سیاست قیمت‌گذاری را به صورت تجربی بررسی می‌کنیم. به این منظور از مدل متقارن برای شبیه‌سازی بازار استفاده می‌کنیم. در تمام موارد جمعیت کل جامعه را برابر ۱ در نظر می‌گیریم و از سه تابع $0/1 + x^{0/9}$، $0/1 + x^{0/3}$ و $0/1 + \log(1 + 9x)$ به



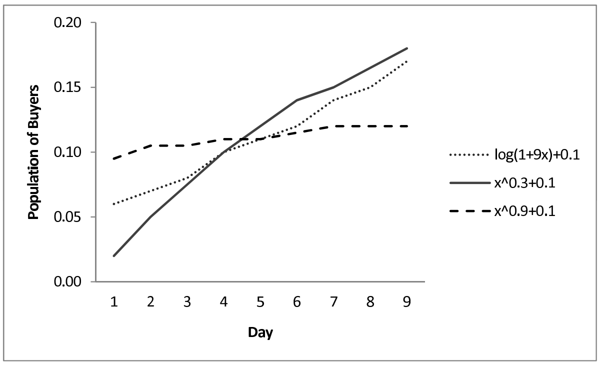
شکل ۴.۵: نحوه تغییرات قیمت در طول زمان. قیمت‌ها در طول زمان زیاد می‌شوند.

عنوان توابع تأثیر استفاده می‌کنیم. دقت کنید که در نظر گرفتن توابع محدب برای شبیه‌سازی به کاربرد نزدیک‌تر است. دلیل این مطلب این است که هر چه تعداد دوستان یک نفر که از کالا استفاده می‌کنند بیشتر باشد، تأثیر اضافه شدن یک نفر باید کم‌تر باشد. به بیانی دیگر مشتق تابع ارزش بر حسب تعداد دوستان باید نزولی باشد. به همین دلیل از توابع محدب برای شبیه‌سازی استفاده می‌کنیم. توابع را طوری انتخاب می‌کنیم که تمام آن‌ها در نقاط $x = ۰$ و $x = ۱$ مقدار یکسانی داشته باشند. این موضوع مقایسه بین توابع مختلف را آسان‌تر می‌کند.

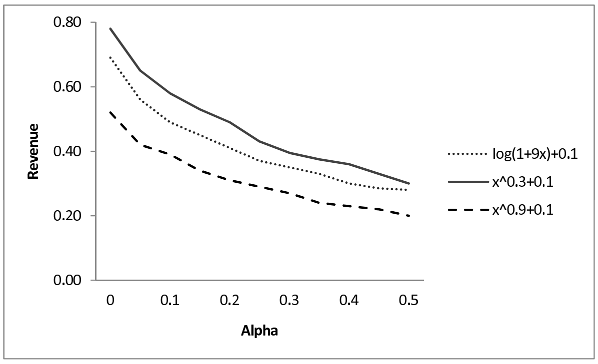
ابتدا به بررسی چگونگی تغییر قیمت‌ها در طول زمان می‌پردازیم. همان‌طور که در شکل ۴.۵ مشاهده می‌شود بر خلاف مدل پایه در فصل ۳ و همانند نتایج بدست آمده در [۷، ۱۰] قیمت‌ها در طول زمان زیاد می‌شوند. به چگونگی تغییرات قیمت بر حسب تابع ارزش دقت کنید. در بازار با تابع ارزش $۰/۱ + x^{۰/۹}$ که بسیار نزدیک به تابع خطی می‌باشد، تغییرات قیمت تقریباً خطی است. ولی در بازار با تابع ارزش $۰/۱ + x^{۰/۳}$ که دارای تحدب بیشتری است، میزان افزایش قیمت نیز در طول زمان کمتر می‌شود.

در ادامه به جمعیت افرادی که کالا را می‌خرند در طول زمان مشاهده می‌کنیم. همان‌طور که در شکل ۵ .۵ مشاهده می‌کنید، جمعیت افرادی که کالا را می‌خرند به میزان تحدب تابع ارزش وابسته است. در تابع $۰/۱ + x^{۰/۹}$ که تقریباً خطی است، جمعیت افرادی که کالا را می‌خرند در طول زمان ثابت است. به این معنی که میزان تقاضا برای خرید کالا تغییر چندانی نمی‌کند. هر چه تحدب تابع بیشتر باشد، افراد تمایل دارند کالا را دیرتر بخرند. همان‌طور که مشاهده می‌کنید هر چه تحدب تابع بیشتر می‌شود، تمایل افراد به خرید در روزهای پایانی بیشتر می‌شود.

موضوع دیگری که به مطالعه آن می‌پردازیم، تأثیر متغیرهای α و β در بازار است. متغیر α میزان کم شدن ارزش پول در طول زمان را نشان می‌دهد و β میزان کم شدن ارزش کالا در طول زمان را نشان می‌دهد. در ادامه تغییرات α را در بازار را مطالعه می‌کنیم. فرض کنید $\beta = ۱$. همان‌طور که در شکل ۶.۵ مشاهده می‌کنید، با زیاد شدن α میزان سود به سرعت کاهش پیدا می‌کند و سود فروشنده به متغیر α بسیار وابسته است. دقت کنید که فروشنده ابتدا با فروش به تعدادی از افراد در روزهای اولیه، از تأثیر این افراد بر روی بقیه برای افزایش قیمت



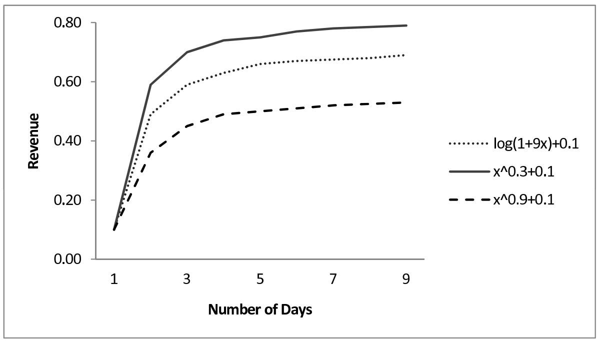
شکل ۵.۵: رابطه جمعیت خریدار و زمان. هر چه تحدب تابع ارزش کالا بیشتر باشد، افراد تمایل به خرید دیرتر کالا دارند.



شکل ۶.۵: وابستگی سود فروشنده به میزان کاهش ارزش پول در طول زمان. وابستگی سود فروشنده به میزان کاهش ارزش کالا در طول زمان نیز به همین صورت است.

و سود بیشتر در آینده استفاده می‌کند. این سیاست زمانی که ارزش پول در طول زمان کم می‌شود کم اثر خواهد بود. به همین ترتیب سود فروشنده با زیاد شدن α کاهش پیدا می‌کند. نکته قابل توجه دیگر این است در تمامی موارد نسبت سود با توجه به توابع ارزش مختلف ثابت می‌ماند. همان‌طور که در بخش ۱.۴.۵ اشاره شد، مسئله با $\alpha = ۰$ و $\beta = c$ همانند مسئله با $\beta = ۱$ و $\alpha = ۱ - c$ خواهد بود. بنابراین تأثیر تغییرات β بر روی سود فروشنده همانند تأثیر تغییرات α بر روی سود است. پس سود فروشنده با کاهش β به شدت کاهش پیدا می‌کند. دقت کنید که کاهش β نشان‌دهنده کم شدن ارزش کالا در طول زمان است. در این شرایط سرمایه‌گذاری برای استفاده از تأثیر افراد در آینده کم اثرتر خواهد شد. این موضوع یکی از دلایلی وابستگی سود به متغیر β است.

در نهایت تأثیر تعداد روزها را بر روی سود در این بازار مشاهده می‌کنیم. در شکل ۷.۵ این رابطه نشان داده شده است. همانند بازاری که در فصل ۳ معرفی شد، در این بازار نیز بیشتر سود در روزهای اولیه بدست می‌آید.



شکل ۷.۵: وابستگی سود فروشنده به میزان کاهش ارزش پول در طول زمان. وابستگی سود فروشنده به میزان کاهش ارزش کالا در طول زمان نیز به همین صورت است.

۵.۵ مسئله پوشش مستطیلی

تعریف ۱.۵.۵. مسئله پوشش مستطیلی (RCP): تابع $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ داده شده است. هدف پیدا کردن k عدد $x_1, x_2, \cdots, x_k$ به گونه‌ای است که مقدار $R=\sum_{i=0}^{k}(x_{i+1}-x_i)F(x_i)\gamma^i$ بیشینه شود. در تعریف R فرض کنید $x_0=0$ و $x_{k+1}=1$.

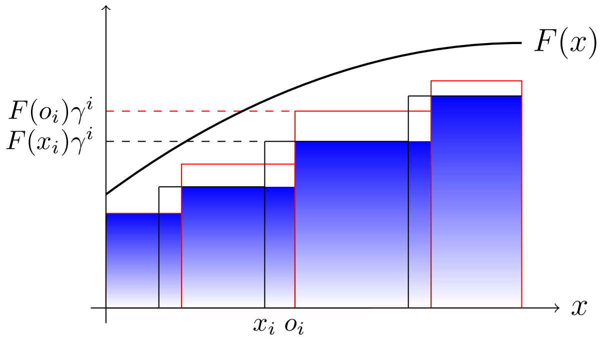
در مسئله پوشش مستطیلی هدف قرار دادن k مستطیل زیر منحنی F به گونه‌ای است که مساحت ضریب خورده مستطیل‌ها بیشینه شود (شکل ۲.۵). در این بخش یک الگوریتم تقریبی برای مسئله پوشش مستطیلی در حالت‌های مختلف ارائه می‌دهیم. ابتدا در بخش ۱.۵.۵ یک الگوریتم FPTAS برای حالتی که تابع F محدب است ارائه می‌دهیم. سپس در بخش ۲.۵.۵ یک الگوریتم FPTAS برای حالتی که مشتق تابع F محدود است طراحی می‌کنیم. در ادامه فرض می‌کنیم که تابع F غیر نزولی است و $F(1)=1$. در بخش ۳.۵.۵ نشان می‌دهیم این فرض‌ها به کلیت مسئله لطمه‌ای نمی‌زند. در ادامه چند نسخه متفاوت از مسئله پوشش مستطیلی را تعریف می‌کنیم که در ارائه الگوریتم از آنها استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۲.۵.۵. $RCP(\delta)$: این مسئله همان مسئله پوشش مستطیلی است با این فرض که x_i ها باید طوری انتخاب شوند که $F(x_i)\geq\delta$.

تعریف ۳.۵.۵. $RCP(\delta_2,\delta_1)$: این مسئله همان مسئله پوشش مستطیلی است با این فرض که x_i ها باید طوری انتخاب شوند که $F(x_i)$ در بازه‌ی (δ_2,δ_1) نباشد.

۱.۵.۵ تابع محدب

در این بخش یک الگوریتم FPTAS برای مسئله پوشش مستطیلی و تابع محدب F ارائه می‌کنیم.



شکل ۸.۵: ناحیه با مساحت A.

لم ۴.۵.۵. *برای هر $\epsilon > 0$ و $\delta \geq 0$، مسئله $RCP(\delta)$ در زمان $poly(k, \log_{1+\epsilon}(F(1)/\delta))$ و با ضریب تقریب $1+\epsilon$ قابل حل است.*

برهان. ابتدا دنباله $s = (s_1, s_2, \cdots, s_m)$ را به صورت $s_i = F^{-1}((1+\epsilon)^{i-1}\delta)$ تعریف می‌کنیم. در حقیقت برای $i < m$ خواهیم داشت $F(s_{i+1}) = (1+\epsilon)F(s_i)$، $s_0 = 0$ و $s_m \leq 1 < s_{m+1}$. ثابت می‌کنیم اگر تمام x_i ها از دنباله s انتخاب شوند، می‌توان مقدار بهینه را تقریب زد. فرض کنید جواب بهینه برای مسئله $RCP(\delta)$ مقادیر $o_1, o_2, \cdots, o_k$ باشند. مقدار جواب بهینه برابر $O = \sum_{i=0}^{k}(o_{i+1} - o_i)F(o_i)\gamma^i$ است. فرض کنید x_i بزرگترین مقدار دنباله s است که بیشتر از o_i نیست. بنابراین $F(o_i) \leq F(x_i)(1+\epsilon)$. در این صورت می‌توان مقدار O را به صورت زیر تقریب زد. در تمام نامساوی‌ها فرض کنید $x_0 = o_0 = 0$ و $x_{k+1} = o_{k+1} = 1$.

$$O = \sum_{i=0}^{k}(o_{i+1} - o_i)F(o_i)\gamma^i \leq \sum_{i=0}^{k}(o_{i+1} - o_i)(1+\epsilon)F(x_i)\gamma^i = (1+\epsilon)A \tag{۱.۵}$$

ناحیه با مساحت A در شکل ۸.۵ نشان داده شده است. مقدار A کمتر مساوی $\sum_{i=0}^{k}(x_{i+1} - x_i)F(x_i)\gamma^i$ است. بنابراین اگر x_i ها را از عناصر دنباله s انتخاب کنیم، می‌توانیم مقدار بهینه را با ضریب $1+\epsilon$ تقریب بزنیم.

در ادامه با استفاده از برنامه‌ریزی پویا بهترین مقادیر را از دنباله s انتخاب می‌کنیم. مقدار $A[n,r]$ را برابر بهترین جواب ممکن در حالتی در نظر بگیرید که r مقدار از دنباله $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ انتخاب می‌کنیم و همچنین مقدار s_n انتخاب شده باشد. در این صورت می‌توان مقدار $A[n,r]$ را به صورت زیر نوشت:

$$A[n,r] = max_{n'<n}\{A[n', r-1] + (s_n - s_{n'})F(s_{n'})\gamma^r\}$$

زمان اجرای الگوریتم ارائه شده $\Theta(m^2 k)$ است که $m = \Theta(\log_{1+\epsilon}())F(1)/\delta$. □

در ادامه یک الگوریتم FPTAS برای مسئله پوشش مستطیلی با تابع محدب F ارائه می‌کنیم.

قضیه ۵.۵.۵. *برای هر مقدار $\epsilon > ۰$، الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب $۱+\epsilon$ برای حل مسئله پوشش مستطیلی با تابع محدب F در زمان $O(poly(k, ۱/\log(۱+\epsilon), \log(۱/\epsilon))$ وجود دارد.*

فرض کنید $\epsilon' = \epsilon/۲$. ابتدا فرض کنید مسئله $RCP(\delta)$ را برای تابع F و $\delta = F(۱)(\frac{۱}{۱+\epsilon'})^n$ که $n = \log_{۱+\epsilon'} \frac{۴(۱+۲\epsilon')}{\epsilon'}$ حل کنیم. با توجه به محدب بودن تابع F، جواب بهینه برای مسئله پوشش مستطیلی (OPT) حداقل $F(۱)/۴$ می‌باشد. جواب بهینه برای مسئله $RCP(\delta)$ را OPT_δ و جواب ارائه شده توسط لم ۴.۵.۵ برای مسئله $RCP(\delta)$ را A_δ در نظر بگیرید. در لم ۴.۵.۵ ثابت کردیم $A_\delta \geq \frac{OPT_\delta}{۱+\epsilon'}$. از طرفی دیگر جواب بهینه برای مسئله پوشش مستطیلی حداکثر $OPT_\delta + \delta$ خواهد بود. بنابراین خواهیم داشت:

$$A_\delta \geq \frac{OPT - \delta}{۱+\epsilon'} = \frac{OPT}{۱+\epsilon'} - \frac{F(۱)}{(۱+\epsilon')^{n+۱}} \geq \frac{OPT}{۱+\epsilon'} - \frac{۴OPT}{(۱+\epsilon')^{n+۱}}$$

اگر مقدار $(۱+\epsilon')^n$ را با $\frac{۴(۱+۲\epsilon')}{\epsilon'}$ جایگزین کنیم، نتیجه خواهیم گرفت $A_\delta \geq \frac{OPT}{۱+۲\epsilon'} = \frac{OPT}{۱+\epsilon}$. برای حل این مسئله از لم ۴.۵.۵ با مقدارهای ϵ' و $\delta = F(۱)(\frac{۱}{۱+\epsilon'})^n$ استفاده شد. بنابراین زمان اجرای الگوریتم $\Theta(poly(k, n))$ خواهد بود که $n = \Theta(\frac{\log(۱/\epsilon)}{\log(۱+\epsilon)})$.

۲.۵.۵ تابع با مشتق محدود

در این بخش یک الگوریتم FPTAS برای مسئله پوشش مستطیلی برای تابع F با $F'(x) \leq L$ و مقدار $\gamma = ۱$ ارائه می‌دهیم.

لم ۶.۵.۵. *برای $\gamma = ۱$ و هر $\delta_۱, \delta_۲, \epsilon > ۰$، مسئله $RCP(\delta_۲, \delta_۱)$ در زمان چند جمله‌ای بر حسب k، $\log_{۱+\epsilon}(\frac{۱}{۱-F^{-۱}(\delta_۲)})$ و $\log_{۱+\epsilon}(\frac{۱-\delta_۲}{\delta_۱-\delta_۲})$ با ضریب تقریب $۱+\epsilon$ قابل حل است.*

برهان. دنباله $s = (s_۱, s_۲, \cdots, s_m)$ را طوری تعریف می‌کنیم که بتوان مقدار بهینه را با انتخاب مقدارهای $x_۱, x_۲, \cdots, x_k$ از دنباله s تقریب زد. دنباله s از دو دنباله s' و s'' تشکیل شده است که صورت زیر ساخته می‌شوند.

- دنباله $s' = (s'_۱, s'_۲, \cdots, s'_{m'})$ شامل مقدارهایی با $F(s'_i) \geq \delta_۱$ است. فرض کنید $s'_۱ = F^{-۱}(\delta_۱)$ و $s'_{i+۱} = F^{-۱}((۱+\epsilon)(F(s'_i) - \delta_۲) + \delta_۲)$ و $s'_{m'} \leq ۱$ و $s'_{m'+۱} > ۱$. در حقیقت برای هر $i < m'$ خواهیم داشت $F(s'_{i+۱} - \delta_۲ \leq (۱+\epsilon)(F(s'_i) - \delta_۲)$. طول دنباله s' برابر $m' = \log_{۱+\epsilon}(\frac{۱-\delta_۲}{\delta_۱-\delta_۲})$ است.

- دنباله $s'' = (s''_۱, s''_۲, \cdots, s''_{m''})$ شامل مقدارهایی با $F(s''_i) \leq \delta_۲$ است. فرض کنید $s''_۱ = ۰$ و $۱ - s''_i = (\frac{۱}{۱+\epsilon})^{i-۱}$ و $s''_{m''} \leq F^{-۱}(\delta_۲)$ و $s''_{m''+۱} > F^{-۱}(\delta_۲)$. در حقیقت برای هر $i < m''$

خواهیم داشت $1 - s''_i \leq (1+\epsilon)(1 - s''_{i+1})$. طول دنباله s'' برابر $m'' = \log_{1+\epsilon}(\frac{1}{1-F^{-1}(\delta_2)})$ است.

فرض کنید دنباله $o = (o_1, o_2, \cdots, o_k)$ جواب بهینه مسئله $RCP(\delta_2, \delta_1)$ را مشخص کند و مقدار جواب بهینه برابر $O = \sum_{i=1}^{k}(o_{i+1} - o_i)F(o_i)$ باشد. می‌دانیم تمام مقادیر $F(o_i)$ بیرون بازه‌ی (δ_2, δ_1) هستند. برای هر $o_i \leq F^{-1}(\delta_2)$، مقدار x_i را برابر کوچک‌ترین مقدار دنباله s'' که از o_i کمتر نیست، در نظر می‌گیریم. برای هر $o_i \geq F^{-1}(\delta_1)$، مقدار x_i را برابر بیش‌ترین مقدار دنباله s' که از o_i بیشتر نیست، در نظر می‌گیریم. فرض کنید که برای هر $i < k'$ داریم $x_i \in s''$ و برای هر $i \geq k'$ داریم $x_i \in s'$. جواب بهینه را به صورت زیر نوشت. در تمام معادلات فرض کنید $x_0 = o_0 = 0$ و $x_{k+1} = o_{k+1} = 1$.

$$O = \sum_{i=0}^{k}(o_{i+1} - o_i)F(o_i) = \sum_{i=0}^{k'-1}(o_{i+1} - o_i)F(o_i) + \sum_{i=k'}^{k}(o_{i+1} - o_i)F(o_i) \tag{۲.۵}$$

سمت راست معادله بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{i=0}^{k'-1}(o_{i+1} - o_i)F(o_i) = \sum_{i=0}^{k'-1}(1 - o_i)(F(o_i) - F(o_{i-1})) - F(o_{k'-1})(1 - o_{k'}) \tag{۳.۵}$$

و سمت چپ معادله ۲.۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

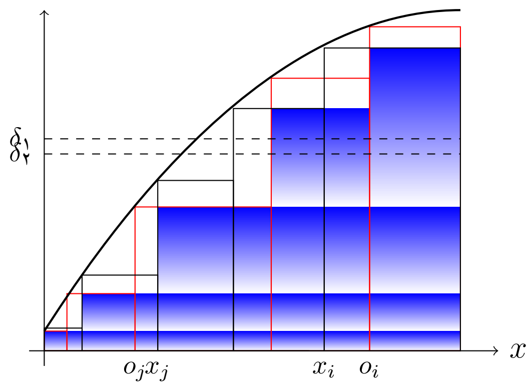
$$\sum_{i=k'}^{k}(o_{i+1} - o_i)F(o_i) = \sum_{i=k'}^{k}(o_{i+1} - o_i)(F(o_i) - F(o_{k'-1})) + F(o_{k'-1})(1 - o_{k'}) \tag{۴.۵}$$

معادله ۲.۵ را با توجه به معادلات ۳.۵ و ۴.۵ بازنویسی می‌کنیم:

$$O = \sum_{i=0}^{k'-1}(1 - o_i)(F(o_i) - F(o_{i-1})) + \sum_{i=k'}^{k}(o_{i+1} - o_i)(F(o_i) - F(o_{k'-1})) \tag{۵.۵}$$

برای هر $i < k'$ می‌دانیم که $1 - o_i \leq (1+\epsilon)(1 - x_i)$. از طرفی دیگر برای هر $i \geq k'$ می‌دانیم که $F(o_i) - \delta_2 \leq (1+\epsilon)(F(x_i) - \delta_2)$. با توجه به این‌که $F(o_{k'-1}) \leq \delta_2$ برای هر $i \geq k'$ می‌توان نوشت $F(o_i) - F(o_{k'-1}) \leq (1+\epsilon)(F(x_i) - F(o_{k'-1}))$. با توجه به این نکات می‌توان مقدار بهینه را به صورت زیر تقریب زد.

$$\begin{aligned} O &\leq (1+\epsilon)\sum_{i=0}^{k'-1}(1 - x_i)(F(o_i) - F(o_{i-1})) \\ &+ (1+\epsilon)\sum_{i=k'}^{k}(o_{i+1} - o_i)(F(x_i) - F(o_{k'-1})) \\ &= (1+\epsilon)B \end{aligned} \tag{۶.۵}$$



شکل ۹.۵: ناحیه با مساحت B.

ناحیه با مساحت B در شکل ۹.۵ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۹.۵ می‌توان نتیجه گرفت که مقدار B حداکثر $\sum_{i=1}^{k}(x_{i+1}-x_i)F(x_i)$ است. بنابراین اگر تمام x_i ها را از دنباله s انتخاب کنیم، می‌توان مقدار بهینه را با ضریب $\epsilon+1$ تقریب زد. در ادامه یک الگوریتم پویا برای انتخاب k مقدار از دنباله s طراحی می‌کنیم. فرض کنید $A[n,t]$ بهترین جواب باشد، هنگامی که می‌خواهیم t مقدار از دنباله $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ انتخاب کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$A[n,t] = max_{n'<n}\{A[n',t-1]+(s_n - s_{n'})F(s_{n'})\}$$

□

در ادامه الگوریتمی برای مسئله پوشش مستطیلی برای تابع F با $F'(x) \leq L$ و $\gamma = 1$ ارائه می‌دهیم.

قضیه ۷.۵.۵. *برای $\gamma = 1$ و هر $\epsilon > 0$، الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب $\epsilon+1$ برای مسئله پوشش مستطیلی با $F'(x) \leq L$ وجود دارد که در زمان چند جمله‌ای بر حسب k و $\log_{1+\epsilon} k$ و $\log_{1+\epsilon} L$ اجرا می‌شود.*

برهان. مسئله پوشش مستطیلی با جواب بهینه OPT رو در نظر بگیرید. در ادامه می‌خواهیم مسئله $RCP(\delta_2, \delta_1)$ را $k+1$ بار حل کنیم. در نمونه i-ام مقدارهای $\delta_2 = \frac{i-1}{k+1}$ و $\delta_1 = \frac{i}{k+1}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم جواب بهینه برای مسئله $RCP(\delta_2, \delta_1)$ برابر OPT_i باشد. فرض کنید دنباله $o = (o_1, o_2, \cdots, o_k)$ جواب بهینه برای مسئله پوشش مستطیلی را تعیین کند. بدیهی است که یک عدد $1 \leq j \leq k+1$ وجود دارد که تمام مقادیر دنباله o خارج بازه‌ی $(\frac{j-1}{k+1}, \frac{j}{k+1})$ باشند. بنابراین $OPT = OPT_j$. تمام k^2+1 نمونه مسئله $RCP(\delta_2, \delta_1)$ را با استفاده از لم ۶.۵.۵ حل می‌کنیم. فرض کنید مقدار بدست آمده توسط الگوریتم ارائه شده در لم ۶.۵.۵ برای نمونه i-ام برابر A_i باشد. در این صورت خواهیم داشت $OPT_i \leq (1+\epsilon)A_i$. بنابراین اگر مقدار $max_i A_i$ را به عنوان جواب مسئله پوشش مستطیلی در نظر بگیریم، مقدار بهینه را با ضریب $1+\epsilon$ تقریب زده‌ایم.

در ادامه زمان اجرای الگوریتم ارائه شده را تحلیل می‌کنیم. ابتدا باید ثابت کنیم هنگامی‌که لم ۶.۵.۵ را با مقادیر $\delta_۱ = \frac{i}{k+۱}$ و $\delta_۲ = \frac{i-۱}{k+۱}$ اجرا می‌کنیم، مقدارهای $\log_{۱+\epsilon}(\frac{۱}{۱-F^{-۱}(\delta_۲)})$ و $\log_{۱+\epsilon}(\frac{۱-\delta_۲}{\delta_۱-\delta_۲})$ چند جمله‌ای هستند. دقت کنید که $\frac{۱-\delta_۲}{\delta_۱-\delta_۲} = k+۲-i$ با توجه به k چند جمله‌ای است. همچنین می‌دانیم $\delta_۲ + \int_{F^{-۱}(\delta_۲)}^{۱} F'(x)dx = F(۱) = ۱$ که نتیجه می‌دهد $\int_{F^{-۱}(\delta_۲)}^{۱} F'(x)dx = ۱ - \delta_۲ \geq \frac{۱}{k+۱}$. با فرض $F'(x) \leq L$ می‌توان نتیجه گرفت $۱ - F^{-۱}(\delta_۲) \geq \frac{۱}{L(k+۱)}$. بنابراین $\frac{۱}{۱-F^{-۱}(\delta_۲)}$ حداکثر $L(k+۱)$ است که بر حسب k و L چند جمله‌ای است.

□

۳.۵.۵ پیش فرضهای در مورد تابع F

در این بخش نشان می‌دهیم که پیش‌فرض‌های غیر نزولی بودن تابع F و $F(۱) = ۱$ به کلیت مسئله لطمه‌ای وارد نمی‌کند.

- فرض غیر نزولی بودن تابع F: تعریف می‌کنیم $G(x) = \max_{۰\leq y\leq x} F(y)$. در ادامه نشان می‌دهیم که جواب بهینه مسئله پوشش مستطیلی برای F و G یکسان است. ابتدا فرض کنید $x_۱, x_۲, \cdots, x_k$ جواب بهینه برای تابع F باشد. برای هر $۱ \leq i \leq k$ ثابت می‌کنیم $F(x_i) = G(x_i)$. اگر این‌طور نباشد، فرض کنید j کوچک‌ترین مقداری است که $F(x_j) < G(x_j)$. همچنین فرض کنید j' کوچک‌ترین مقداری است که $G(x_{j'}) = G(x_j)$. بنابراین $F(x_{j'})$ بیش‌ترین مقدار را در بازه $[۰, x_j]$ دارد. در این‌صورت اگر مقدار x_j را با $x_{j'}$ در جواب بهینه جایگزین کنیم مقدار تغییرات در تابع هدف برابر است با:

$$
\begin{aligned}
& (x_{j'} - x_{j-۱})F(x_{j-۱})\gamma^{j-۱} + (x_{j+۱} - x_{j'})F(x_{j'})\gamma^{j} \\
- \quad & (x_j - x_{j-۱})F(x_{j-۱})\gamma^{j-۱} + (x_{j+۱} - x_j)F(x_j)\gamma^{j}
\end{aligned}
$$

دقت کنید که $F(x_{j'})\gamma^{i}$ از $F(x_j)\gamma^j$ بزرگ‌تر است. همچنین با توجه به فرض بهینه بودن $x_۱, x_۲, \cdots, x_k$ می‌توان نتیجه گرفت $F(x_j)\gamma^j$ از $F(x_{j-۱})\gamma^{j-۱}$ بزرگ‌تر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تغییرات در تابع هدف مثبت است که با فرض بهینه بودن $x_۱, x_۲, \cdots, x_k$ در تناقض است. بنابراین برای $۱ \leq i \leq k$ خواهیم داشت $F(x_i) = G(x_i$ و در نتیجه $x_۱, x_۲, \cdots, x_k$ یک جواب برای تابع G است.

از طرف دیگر فرض کنید $x_۱, x_۲, \cdots, x_k$ جواب بهینه برای مسئله پوشش مستطیلی در G باشد. با توجه به تعریف تابع G، این تابع غیر نزولی است. در نتیجه اگر برای $x_{j'} < x_j$ داشته باشیم $F(x_{j'}) \geq$

$F(x_j)$، مقدار x_j در جواب بهینه G نمی‌آید. اگر تمام مقدارها با این خاصیت را از فضای جستجوی برای پیدا کردن جواب بهینه حذف کنیم، تنها مقادیر x_i که $F(x_i) = G(x_i)$ باقی می‌مانند. بنابراین $x_۱, x_۲, \cdots, x_k$ یک جواب برای تابع F خواهد بود.

- فرض $F(۱) = ۱$: فرض کنید $F(۱) = c \neq ۱$. تابع G را به صورت $G(x) = F(x)/c$ تعریف می‌کنیم و مسئله پوشش مستطیلی را برای G حل می‌کنیم. فرض کنید $x_۱, x_۲, \cdots, x_k$ مقدارهایی برای یک پوشش مستطیلی G باشد. در این صورت خواهیم داشت:
$$\sum_{i=۰}^{k}(x_{i+۱} - x_i)G(x_i)\gamma^i = \frac{۱}{c}\sum_{i=۰}^{k}(x_{i+۱} - x_i)F(x_i)\gamma^i$$
بنابراین می‌توانیم هر جوابی برای پوشش سطح زیر منحنی G را به یک جواب برای پوشش سطح زیر منحنی F تبدیل کنیم و برعکس. در حقیقت مقدار تابع هدف در دو جواب متناظر برای تابع F و G یک ضریب c با هم فرق دارند. بنابراین با حل کردن مسئله پوشش مستطیلی برای تابع G می‌توان جواب مسئله برای تابع F را نیز بدست آورد.

۶.۵ نتیجه‌گیری و کارهای آتی

در این فصل به بررسی بازار با قیمت‌گذاری عمومی پرداختیم که افراد در آن هوشمند عمل می‌کنند. در این مدل ارزش کالا نزد یک نفر به میزان افرادی که در گذشته کالا را خریده‌اند بستگی دارد. در حقیقت بازار را توسط یک بازی مدل کردیم و مسئله وجود و یکتایی و خواص نقطه تعادل را در این بازی مطالعه کردیم. در نهایت برای حالت‌های خطی و متقارن از مسئله یک الگوریتم برای پیدا کردن استراتژی بهینه قیمت‌گذاری ارائه کردیم.

دقت کنید که در مدل ارائه شده با وجود این‌که افراد را هوشمند در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم ارزش کالا نزد یک فرد به میزان افرادی که در گذشته کالا را خریده‌اند بستگی دارد. دقت کنید که یک فرد می‌تواند حدس بزند که در آینده کالا توسط دوستانش خریداری خواهد شد. در این صورت ممکن است ارزش کالا نزد یک فرد به تعداد دوستانش که حدس می‌زند در آینده کالا را می‌خرند نیز بستگی داشته باشد. به نظر می‌رسد این مدل در بسیار موارد کاربرد خواهد داشت. مطالعه بازی در این شرایط که ارزش کالا علاوه بر تعداد افرادی که در گذشته کالا را خریده‌اند به تعداد افرادی که ممکن است در آینده بخرند وابسته باشد، جالب به نظر می‌رسد.

هم‌چنین مسئله رقابت در بازار، مسئله قیمت‌گذاری را تحت تأثیر خود قرار می‌دهد. به این معنی که تغییرات قیمت در بازار یک محصولی و بازار چند محصولی بسیار متفاوت است. بررسی بازاری با مدل ارائه شده و در شرایطی که چندین فروشنده برای فروش کالا با هم رقابت می‌کنند در ادامه این تحقیقات توصیه می‌شود.

فصل ۶

بازار با افراد هوشمند ولی بدون اطلاعات کامل

۱.۶ مقدمه

در فصل ۵ بازاری با افرادی که عملکرد کاملاً عقلانی دارند را بررسی کردیم. این فرض که تمام افراد جامعه در تمام موارد به صورت درست و منطقی رفتار می‌کنند، شاید فرض واقع‌گرایانه‌ای نباشد. در بسیاری از موارد افراد اطلاعات کامل و درستی از انتخاب‌های خود ندارند، و یا این‌که فرصت و قدرت کافی برای محاسبه تمام جوانب یک موضوع را ندارند و ممکن است تصمیم اشتباه بگیرند. دقت کنید این موضوع با فرض این‌که افراد به دنبال بیشینه کردن سود خود هستند در تناقض نیست. در حقیقت هر فرد به دنبال بیشینه کردن سودش است ولی اطلاعات و ابزار کافی برای تصمیم‌گیری درست در تمامی موارد را ندارد. در این فصل تلاش شده مدلی برای مطالعه چنین وضعیتی ارائه دهیم. در حقیقت در بازاری که در این فصل مطالعه می‌کنیم، افراد به دنبال سود خود هستند ولی احتمال خطا در انتخاب‌هایشان وجود دارد.

در فصل‌های قبلی بازارهای با یک فروشنده را بررسی کردیم. در این فصل تلاش می‌کنیم بازاری با دو شرکت رقیب را بررسی کنیم. در چنین بازاری هر شرکت به دنبال بیشینه کردن سود خود است و در نتیجه قیمت‌ها با توجه به رقابت بین دو شرکت تغییرات زیادی خواهد کرد. در این فصل چگونگی تغییرات قیمت را مطالعه می‌کنیم.

هدف اصلی بررسی جامعه‌ای است که از چندین گروه تشکیل شده است و گروه‌ها بر روی یکدیگر تأثیر می‌گذارند. تعداد n گروه در جامعه وجود دارند که جمعیت گروه i-ام m^i است. مقدار $m_T = \sum_{i\in T} m^i$ را برابر جمعیت گروه‌های مجموعه T و $m = \sum_i m^i$ را برابر جمعیت کل جامعه تعریف می‌کنیم. مانند مدل ارائه شده در فصل ۵ تعداد افراد جامعه نامتناهی است و هر فرد را می‌توان با یک عدد حقیقی $b \in [۰, m]$ نشان داد. ارتباط‌های مختلف بین گروه‌های مختلف را با گراف بدون جهت $G = (V, E)$ نشان می‌دهیم، که

	A	B
A	a	c
B	d	b

شکل ۱.۶: ماتریس سود $\mathbf{U}$.

رأس‌های آن متناظر با گروه‌های جامعه هستند و یال $(i,j) \in E$ نشان‌دهنده ارتباط بین گروه i و j است. در ادامه به این گراف، *گراف بازار* گوییم. دقت کنید گراف G دارای حلقه است و برای هر گروه i خواهیم داشت $(i,i) \in E$. به بیانی دیگر افراد هر گروه برروی هم‌دیگر تأثیر می‌گذارند. $N(i)$ را برابر مجموعه همسایه‌های گروه i در نظر می‌گیریم. هم‌چنین تعریف می‌کنیم $e_m(S_A,S_B)=\sum_{i\in S_A}\sum_{j\in N(i)\cap S_B} m^i m^j$. به بیانی دیگر $e_m(S_A,S_B)$ مقدار ارتباطات دو مجموعه گروه S_A و S_B را نشان می‌دهد. دقت کنید که در تعریف $e_m(S_A,S_B)$ ممکن است دو مجموعه S_A و S_B اشتراک داشته باشند.

فرض کنید دو محصول A و B توسط دو شرکت رقیب با قیمت‌های p_A و p_B در بازار عرضه می‌شوند. هر فرد در جامعه تصمیم به استفاده از یکی از این دو محصول را می‌گیرد. در حقیقت مجموعه استراتژی‌های هر فرد برابر $S=\{A,B\}$ است. برای یک استراتژی $s \in S$، مقدار x_s^i را برابر جمعیتی از افراد گروه i می‌گیریم که تصمیم به استفاده از محصول s گرفته‌اند. با توجه به این تعریف $x_A^i + x_B^i$ برابر m^i است. استراتژی کل افراد جامعه را می‌توان با ماتریس $x=(x_s^i)$ به ابعاد $n \times ۲$ نشان داد. به ماتریس x در ادامه ماتریس حالت بازی نیز می‌گوییم. جمعیت افرادی که از محصول $s \in S$ استفاده می‌کنند را با $m_s(x)=\sum_i x_s^i$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین برای هر $s \in S$، فرض کنید $\mathcal{D}_s^i=\sum_{j\in N(i)} x_s^j$ برابر جمعیت همسایگان گروه i است که از کالای s استفاده می‌کنند. به طور مشابه برای هر $T \subseteq V$ و هر $s \in S$، تعریف می‌کنیم $\mathcal{D}_s^T(x)=\sum_{i\in T} x_s^i \mathcal{D}_s^i(x)$. در ادامه برای راحتی از $\mathcal{D}_s^V(x)$ به جای $\mathcal{D}_s(x)$ استفاده می‌کنیم. سود هر فرد با جمع سودی که در ارتباط با افراد دیگر بدست می‌آید، محاسبه می‌شود. فرض کنید ماتریس $\mathbf{U}$ که در شکل ۱.۶ نشان داده شده است، میزان سود در ارتباط بین دو فرد را نشان می‌دهد. در این صورت سود یک فرد در گروه i برای بازی s در ماتریس استراتژی x به صورت زیر قابل بیان است:

$$F_s^i(x)=\mathbf{U}(s,A)\mathcal{D}_A^i+\mathbf{U}(s,B)\mathcal{D}_B^i-p_s \tag{۱.۶}$$

به بیانی دیگر:

$$\begin{aligned} F_A^i(x) &= \sum_{j\in N(i)}(ax_A^j+cx_B^j)-p_A \\ F_B^i(x) &= \sum_{j\in N(i)}(dx_A^j+bx_B^j)-p_A \end{aligned}$$

در ادامه فرض می‌کنیم فرض می‌کنیم که یک فرد در صورتی که محصول شبیه دوستانش داشته باشد، سود بیشتری می‌کند. در حقیقت فرض می‌کنیم $a > d$ و $b > c$. در ادامه بدون لطمه به کلیت مسئله حالت $a > b$ را بررسی می‌کنیم. دقت کنید که یکی از نتایج مستقیم قضیه ۱.۱.۶ با فرض $w = d = c$ بدست می‌آید که نشان می‌دهد بدون لطمه به کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $c = d = ۰$. بنابراین در ادامه این فصل فرض می‌کنیم $c = d = ۰$.

قضیه ۱.۱.۶. *فرض کنید $w \leq \min(a, b, c, d)$. عملکرد افراد در بازی‌های با ماتریس سود $\mathbf{U}$ و ماتریس سود $\mathbf{U} - w$ یکسان خواهد بود، که ماتریس $\mathbf{U} - w$ از کم کردن مقدار w از تمام درایه‌های $\mathbf{U}$ بدست می‌آید.*

برهان. میزان سود یک فرد از گروه i برای استفاده از محصول s و با توجه به ماتریس سود $\mathbf{U}$ برابر $F_s^i(x)$ است که در ۱.۶ نشان داده شده است. حال اگر سود همین فرد را با ماتریس $\mathbf{U} - w$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\hat{F}_s^i(x) &= (\mathbf{U}(s, A) - w)\mathcal{D}_A^i + (\mathbf{U}(s, B) - w)\mathcal{D}_B^i - p_s \\ &= F_s^i(x) - w(\mathcal{D}_A^i + \mathcal{D}_B^i)\end{aligned}$$

بنابراین $F_A^i(x) - F_B^i(x)$ با $\hat{F}_A^i(x) - \hat{F}_B^i(s)$ برابر خواهد بود. در نتیجه میزان اختلاف میزان سود استفاده از محصول A و B با توجه به ماتریس سود $\mathbf{U}$ دقیقاً برابر اختلاف میزان سود استفاده از محصول A و B با توجه به ماتریس سود $\mathbf{U} - w$ است. در نتیجه عملکرد فرد در هر دو بازی تعریف شده یکسان خواهد بود. □

نحوه تغییر بازار: فرض کنید دو شرکت رقیب A و B، محصول‌های خود را با قیمت‌های p_A و p_B در بازار عرضه کرده‌اند. [۱] افراد جامعه استراتژی خود برای استفاده از محصول A یا B را با توجه به دوستان خود انتخاب می‌کنند. فرض کنید مدل رفتار افراد جامعه به صورت *بهترین پاسخ با اختلال* [۲] است. در این مدل هر فرد بهترین پاسخ خود را با احتمال نزدیک به ۱ انتخاب می‌کند. در حقیقت احتمال کمی وجود دارد که فرد در انتخاب خود دچار اشتباه شود. برای آشنایی بیشتر با مدل ارائه شده به [۴۸] مراجعه کنید. برای تعریف دقیق بهترین پاسخ با اختلال که در ادامه به آن پاسخ می‌گوییم از یک متغیر $\beta \in R$ استفاده می‌کنیم. متغیر β نشان دهنده‌ی میزان اختلال در پاسخ افراد است. در حقیقت $\beta = \infty$ به معنی پاسخ بدون اختلال یا همان بهترین پاسخ است و $\beta = ۰$ به معنی پاسخ بدون توجه به سود و تفاوت استراتژی‌های مختلف است و در این حالت افراد به صورت تصادفی عمل می‌کنند. فرض کنید هر فرد در طول زمان فرصت‌های مختلف برای تغییر استراتژی خود بدست می‌آورد. به طور دقیق‌تر در مدل بررسی شده در این فصل، به هر فرد یک متغیر پواسون با

[۱] دقت کنید که در تمامی موارد با فرض $p_B = ۰$ و $b = ۰$ می‌توان وضعیت بازار با تنها یک محصول را بررسی کرد.

[۲] noisy best response

متوسط ۱ نسبت می‌دهیم که فرصت‌های تغییر استراتژی فرد را معین می‌کند. برای بررسی کامل‌تر این مدل به [۴۸] مراجعه کنید. بنابراین احتمال این‌که یک فرد از گروه i استراتژی s را انتخاب کند برابر است با:

$$P_{i,\beta}(s|x) = \frac{e^{\beta F_s^i(x)}}{\sum_{s' \in S} e^{\beta F_{s'}^i(x)}} \quad (۲.۶)$$

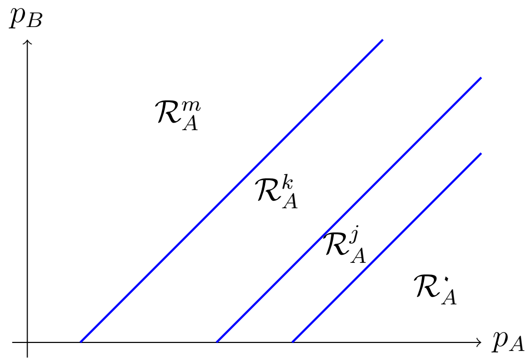
به این ترتیب می‌توان هر ماتریس حالت بازی را به عنوان یک حالت(رأس) در زنجیره مارکوف در نظر گرفت. احتمال تغییر حالت‌ها در زنجیره مارکوف با توجه به نحوه تغییر استراتژی افراد مشخص می‌شود. در ادامه این فصل ثابت می‌کنیم بازی تعریف شده، یک *بازی پتانسیلی کامل* [۳] است که با یک تابع پتانسیل مانند f مشخص می‌شود. در این‌صورت در حالت ایستا [۴] زنجیره مارکوف تعریف شده، احتمال حضور در حالت x برابر $\mu(x) \propto e^{\beta f(x)}$ است. به‌راحتی دیده می‌شود که زمانی که $\beta \to \infty$ بازی بیش‌ترین زمان خود را در نقطه بیشینه تابع f سپری می‌کند. در ادامه نقطه بیشینه تابع f را حالت ایستای بازار نام‌گذاری می‌کنیم.

همان‌طور که در ادامه مشاهده خواهیم کرد، تابع پتانسیل f و حالت ایستای بازار به قیمت‌های p_A و p_B وابسته‌اند. بنابراین حالت ایستای بازار به ازای قیمت‌های p_A و p_B را با $x(p_A, p_B)$ نشان می‌دهیم. در حقیقت $x(p_A, p_B)$ نشان می‌دهد که در حالت ایستای بازار چه تعداد از افراد هر گروه از محصول A و چه تعداد از محصول B استفاده می‌کنند. در ادامه خواهیم دید که $x(p_A, p_B)$ تنها به اختلاف p_A و p_B وابسته است. به بیانی دقیق‌تر اگر $p_A - p_B = p'_A - p'_B$، آنگاه $x(p_A, p_B) = x(p'_A, p'_B)$. حالت ایستای $x(p_A, p_B)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $y = m_A(x(p_A, p_B))$ و $m_B(x(p_A, p_B)) = m - y$. در حقیقت در حالت ایستای $x(p_A, p_B)$ جمعیت y از محصول A و جمعیت $m-y$ از محصول B استفاده می‌کنند. در این صورت می‌گوییم، نقطه (p_A, p_B) در ناحیه $\mathcal{R}_A^y = \mathcal{R}_B^{m-y}$ واقع شده است. این ناحیه‌ها در شکل ۲.۶ نشان داده شده‌اند. به‌راحتی مشاهده می‌شود که با افزایش p_A جمعیت افرادی که از محصول A در حالت ایستا استفاده می‌کنند، کاهش می‌یابد. همچنین در ادامه ثابت می‌کنیم به غیر از خطوط مرزی بین نواحی که در شکل ۶.۲ مشاهده می‌شوند، بازی در تمامی وضعیت‌ها دارای نقطه ایستای یکتا است. همچنین در قضیه ۴.۳.۶ نشان می‌دهیم شرکت‌های A و B قیمت‌ها را طوری تنظیم نمی‌کنند که نقطه (p_A, p_B) بر روی خطوط مرزی واقع نشوند. بنابراین در ادامه فصل فرض می‌کنیم بازی دارای نقطه ایستای یکتا است. همچنین در قضیه ۴.۲.۶ نشان خواهیم داد که $(۰, ۰) \in \mathcal{R}_A^m$.

رقابت بین شرکت‌ها: در این فصل رقابت بین دو شرکت برای فروش محصول خود را نیز بررسی می‌کنیم. یک نقطه $(p_A, p_B) \in \mathcal{R}_A^y = \mathcal{R}_B^{m-y}$ در نظر بگیرید. سود شرکت A در این نقطه برابر $U_A(p_A, p_B) = yp_A$ و سود شرکت B برابر $U_B(p_A, p_B) = (m-y)p_B$ است. بهترین پاسخ برای

[۳] full potential game

[۴] stationary state



شکل ۲.۶: یک بازی با چهار ناحیه $\mathcal{R}_A^{۰}$، $\mathcal{R}_A^j$، $\mathcal{R}_A^k$ و $\mathcal{R}_A^m$ که $۰ < j < k < m$.

شرکت A که آنرا به $br_A(p_A, p_B)$ نشان می‌دهیم، قیمتی است که $U_A(p, p_B)$ را بیشینه کند. به بیانی دیگر $br_A(p_A, p_B) = argmax_p U_A(p, p_B)$. به همین صورت بهترین پاسخ شرکت B را به صورت $br_B(p_A, p_B) = argmax_p U_B(p_A, p)$ تعریف می‌کنیم.

در بازی *قیمت‌گذاری*، بازی بین دو شرکت برای تعیین قیمت محصول‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در حقیقت الگوریتمی برای بدست آوردن بهترین پاسخ ارائه می‌دهیم. هم‌چنین شرایطی را بررسی می‌کنیم که این بازی یک نقطه تعادل نش داشته باشد و ثابت می‌کنیم در صورت وجود تعادل نش، این نقطه تعادل یکتاست. هم‌چنین نشان می‌دهیم که اگر شرکت‌ها در هر حرکت بهترین پاسخ خود را انتخاب کنند بازی به نقطه تعادل نش، در صورت وجود، همگرا می‌شود.

برای این‌که تمرکز بیشتری بر روی تأثیر ساختار گراف بازار داشته باشیم یک نسخه خاص از مسئله را تعریف می‌کنیم. از این نسخه در بخش ۳.۶ استفاده می‌کنیم. فرض کنید توزیع جمعیت بر روی رأس‌های گراف به طور یکنواخت انجام شده است و برای هر گروه i داریم $m^i = ۱$. به بیان دیگر جمعیت گروه‌های مختلف برابر است. در ادامه برای بررسی تأثیر ساختار گراف بر روی بازی قیمت‌گذاری این نسخه از مسئله را که در ادامه *بازار یکنواخت* می‌نامیم، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱.۱.۶ نتایج بدست آمده

در این فصل بازار را توسط یک بازی جمعیتی مدل می‌کنیم. در این بازار هر فرد به صورت عقلانی تصمیم می‌گیرد به این معنی که فرد قصد بیشینه کردن سود خود را دارد ولی به دلیل نداشتن اطلاعات کافی و محدود بودن قدرت محاسباتی ممکن است در تصمیم‌گیری خود اشتباه کند. در این فصل دو موضوع به طور دقیق مطالعه می‌شود. ابتدا این موضوع که افراد جامعه نسبت به قیمت‌های ارائه شده توسط دو شرکت چگونه واکنش نشان می‌دهند و بازار در بلند مدت به چه سمتی همگرا می‌شود. موضوع دوم مسئله رقابت بین دو شرکت است.

در حقیقت با توجه به واکنش افراد به قیمت‌ها مختلف، دو شرکت رقیب چگونه قیمت محصول خود را در طول زمان تغییر می‌دهند.

ابتدا در بخش ۲.۶ چگونگی واکنش افراد به قیمت‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم بازی افراد برای انتخاب محصول مناسب یک بازی پتانسیلی است و در نتیجه برای توصیف بازی می‌توان از یک تابع پتانسیل استفاده نمود. در این صورت بازی در زمانی که خطای تصمیم‌گیری افراد کم باشد به نقطه بیشینه تابع پتانسیل همگرا می‌شود. در بخش ۲.۶ با استفاده از ایده شار بیشینه در شبکه شار الگوریتمی چندجمله‌ای برای محاسبه نقطه بیشینه تابع پتانسیل در شرایط مختلف ارائه می‌کنیم. به این ترتیب می‌توان وضعیت بازار بعد از گذشت زمان را تخمین زد.

در بخش ۳.۶ مسئله قیمت‌گذاری توسط شرکت‌ها را مطالعه می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم هر شرکت در صورت ثابت بودن قیمت کالا توسط رقیب، می‌تواند در زمان چندجمله‌ای قیمت بهینه برای کالای خود را بدست آورد. از نتایج این اثبات این است که در صورتی که فقط یک شرکت در بازار باشد، می‌تواند قیمت بهینه کالا را در زمان چندجمله‌ای محاسبه کند. سپس بازی قیمت‌گذاری بین دو شرکت را بررسی می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم این بازی یا نقطه تعادل نش ندارد و یا نقطه تعادل نش در آن یکتاست. همچنین ثابت می‌کنیم که در صورت وجود نقطه تعادل نش در بازار، بازی قیمت‌گذاری حتماً به آن همگرا خواهد شد. در ادامه شرایطی را معرفی می‌کنیم که اگر بازار دارای آن شرایط باشد، بازی قیمت‌گذاری نقطه تعادل نش یکتا دارد و بازی به آن همگرا می‌شود. در نهایت در بخش ۴.۳.۶ نشان می‌دهیم که بازی قیمت‌گذاری در بازار یکنواخت بر روی گراف‌های منتظم و گراف‌های اتصال ترجیحی شرایط گفته شده را دارد و در نتیجه بازی قیمت‌گذاری در این شرایط نقطه تعادل نش یکتا خواهد داشت که بازی به آن همگرا می‌شود. در حقیقت این موضوع دلیلی است بر آن‌که بازی قیمت‌گذاری در شبکه‌های اجتماعی نقطه تعادل نش دارد.

شایان ذکر است که نتایج تحقیق آورده شده در رساله کارشناسی ارشد آقای قاسمیه آورده شده است [۲].

۲.۱.۶ کارهای انجام شده توسط دیگران

چگونگی تغییرات جامعه با توجه به افراد عاقل و با اطلاعات محدود در مقالات قبلی مورد مطالعه قرار گرفته است [۳۱، ۲۵، ۳۶]. در یک مقاله بسیار ارزنده مدل پاسخ بهینه خطادار پیشنهاد شده و چگونگی رفتار جامعه با توجه به رفتار عقلانی ولی خطادار افراد مطالعه شده است [۳۱]. در حقیقت وضعیتی که جامعه به آن همگرا می‌شود به طور دقیق مشخص گردیده و نشان داده شده است که در حالت همگرایی تمام افراد از استراتژی یکسان استفاده می‌کنند. در مقاله [۲۵] ارتباط ساختار گراف با بازی مورد مطالعه قرار گرفته است. به بیانی دقیق‌تر زمان همگرایی بازی برای بعضی شبکه‌های خاص بدست آمده است. در ادامه این مقالات، مقاله [۳۶] مسئله

زمان همگرایی در یک بازی را بررسی می‌کند که هر فرد باید بین دو محصول انتخاب کند و سودش به تعداد دوستانش که از محصول مشابه استفاده می‌کنند وابسته است. در حقیقت یک رابطه جالب بین زمان همگرایی و میزان همبندی گراف نشان داده شده است. مدل مورد مطالعه در این فصل از مدل ارائه شده در [۳۶] الهام گرفته شده است. در حقیقت ما مسئله قیمت‌گذاری را در این مدل بررسی می‌کنیم.

همان‌طور که اشاره شد، کارهای مختلفی در راستای ارائه یک استراتژی مناسب قیمت‌گذاری در بازارهای اجتماعی انجام شده است. برای مشاهد این تحقیقات به بخش‌های ۲.۱.۳ و ۲.۱.۵ مراجعه کنید.

۲.۶ خواص بازار

در این بخش نحوه عملکرد گروه‌های مختلف در بازار را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در حقیقت واکنش افراد مختلف نسبت به قیمت‌های p_A و p_B را با توجه به تأثیر افراد بر روی یکدیگر بررسی می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که بازی ما یک بازی پتانسیلی کامل است و در نتیجه بسیار از خواص زیبای بازی‌های پتانسیلی را دارد. بازی پتانسیلی کامل به طور دقیق در [۴۷] تعریف شده است. سپس ثابت می‌کنیم که در حالت ایستای بازار افراد هر گروه به طور یکسان عمل خواهند کرد. به این معنی که تمام افراد یک گروه از محصول مشابه استفاده می‌کنند. با توجه به این خاصیت می‌توان یک الگوریتم چند جمله‌ای برای پیدا کردن حالت ایستای بازار طراحی نمود.

۱.۲.۶ بازی پتانسیلی کامل

در این بخش ثابت می‌کنیم که بازی بین افراد جامعه برای تعیین محصول مورد استفاده، یک بازی پتانسیلی کامل است. به این منظور ابتدا بازی پتانسیل کامل را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۶. فرض کنید $F:\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$ یک بازی جمعیتی را نشان می‌دهد. بازی تعریف شده یک بازی پتانسیلی کامل است، اگر و تنها اگر یک تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $f:\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که:

$$\nabla f(x) = F(x), \forall x \in \mathbb{R}^n_+ \qquad (۳.۶)$$

در بازی‌های پتانسیلی تمام اطلاعات مربوط به بازی با تابع f قابل بیان است. وجود چنین تابع پتانسیل این قدرت را به ما می‌دهد که خواص زیبایی برای بازی ثابت کنیم و به طور کلی ابزاری قوی برای تحلیل بازی است. در بازی تعریف شده در این فصل، F یک تابع است که بردار x با $2 \times n$ مقدار به عنوان ورودی می‌گیرد و برداری با $2 \times n$ مقدار به عنوان خروجی، که همان F^i_s ها هستند، می‌دهد. در قضیه بعدی ثابت می‌کنیم که

بازی بین افراد جامعه یک بازی پتانسیلی کامل است. در حقیقت تابع پتانسیل f را معرفی می‌کنیم که خواص ۳.۶ را داشته باشد.

قضیه ۲.۲.۶. *تابع f که در زیر ارائه می‌شود، یک تابع پتانسیل برای بازی بین افراد جامعه است که توسط تابع F تعریف شده است.*

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(a\mathcal{D}_A^V(x) + b\mathcal{D}_B^V(x)\right) - p_A m_A(x) - p_B m_B(x) \qquad (۴.۶)$$

برهان. ابتدا $f(x)$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i\in V}\sum_{j\in N(i)} a x_A^i x_A^j + \sum_{i\in V}\sum_{j\in N(i)} b x_B^i x_B^j\right) - p_A\sum_{i\in V} x_A^i - p_B \sum_{i\in V} x_B^i$$

ابتدا دقت کنید که $N(i)$ شامل خود گروه i هم می‌شود. در ادامه بدون لطمه به کلیت از تابع f نسبت به x_A^i مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_A^i} = \frac{1}{2}\left(2\sum_{j\in N(i)} a x_A^j +\right) - p_A = \sum_{j\in N(i)} a x_A^j - p_A = F_A^i(x)$$

بنابراین بازی بین افراد جامعه یک بازی پتانسیلی کامل است. □

همان‌طور که اشاره شد، افراد انتخاب استراتژی خود را با توجه به ۲.۶ تغییر می‌دهند. در این‌صورت یک بازی پتانسیل کامل خواص جالبی دارد که در لم زیر آمده است. این لم نتیجه اثباتی است که در [۴۸] برای بازی‌های جمعیتی با تعداد نامتناهی بازیکن ارائه شده است.

لم ۳.۲.۶. *فرض کنید F یک بازی پتانسیلی با تابع پتانسیل f باشد. حالت ایستای زنجیره مارکوفی که با بهترین پاسخ با اختلال تعریف می‌شود برابر است با:*

$$\mu(x) \propto e^{\beta f(x)}$$

هنگامی که $\beta \to \infty$ بازار به نقطه بیشینه تابع f همگرا می‌شود. به بیانی دیگر، بازار بیش‌ترین زمان خود را اطراف نقطه بیشینه تابع f خواهد بود. بنابراین پیدا کردن نقطه بیشینه تابع f برای بدست آوردن تخمینی از وضعیت بازار بسیار با اهمیت است. در ادامه این بخش روشی برای پیدا کردن بیشنیه تابع f ارائه می‌دهیم.

۲.۲.۶ حالت ایستای بازار

در این بخش حالت ایستای بازار را بررسی می‌کنیم. ابتدا حالت ایستای بازار را برای $p_A \leq p_B$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که که در این وضعیت تمام افراد جامعه از محصول A استفاده می‌کنند. سپس روشی برای پیدا کردن حالت ایستای بازار برای $p_A > p_B$ ارائه می‌کنیم.

قضیه ۴.۲.۶. *اگر $p_A \leq p_B$ و $\beta \to \infty$، در حالت ایستای بازار تمام افراد از محصول A استفاده می‌کنند.*

برهان. فرض کنید y حالتی باشد که تمام افراد محصول A را خریده‌اند. در حقیقت برای هر روز گروه i داریم $y_A^i = m^i$ و $y_B^i = ۰$. در این‌صورت مقدار تابع پتانسیل در نقطه y برابر است با:

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{۱}{۲}(a\sum_{i\in V}\sum_{j\in N(i)} y_A^i y^j A + b\sum_{i\in V}\sum_{j\in N(i)} y_B^i y_B^j) - p_A\sum_{i\in V} y_A^i - p_B\sum_{i\in V} y_B^i \\ &= \frac{۱}{۲}(a\sum_{i\in V}\sum_{j\in N(i)} m^i m^j) - p_A\sum_{i\in V} m^i \end{aligned}$$

یک حالت دلخواه مانند $y \neq x$ در نظر بگیرید. با جایگزینی $x_A^i + x_B^i$ با m^i در مقدار $f(y)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{۱}{۲}(a\sum_{i\in V}\sum_{j\in N(i)} (x_A^i + x_B^i)(x_A^j + x_B^j)) - p_A\sum_{i\in V}(x_A^i + x_B^i) \\ f(y) &> \frac{۱}{۲}\left(\sum_{i\in V}\sum_{j\in N(i)} a x_A^i x_A^j + \sum_{i\in V}\sum_{j\in N(i)} a x_B^i x_B^j\right) - p_A\sum_{i\in V} x_A^i - p_A\sum_{i\in V} x_B^i \\ &> \frac{۱}{۲}\left(aD_A^V(x) + aD_B^V(x)\right) - p_A m_A(x) - p_A m_B(x) \\ &> \frac{۱}{۲}\left(aD_A^V(x) + bD_B^V(x)\right) - p_A m_A(x) - p_B m_B(x) = f(x) \end{aligned}$$

دقت کنید که نامساوی آخر با توجه به این‌که $p_A \leq p_B$ و $a > b$ بدست آمده است. بنابراین y نقطه بیشینه تابع f است. بنابراین هنگامی که $\beta \to \infty$ حالت ایستای بازار به y همگرا می‌شود و در نتیجه تمام افراد از محصول A استفاده می‌کنند. □

در ادامه این بخش می‌خواهیم الگوریتمی طراحی کنیم که بتوان حالت ایستای بازار برای $p_A > p_B$ را بدست آورد. البته این مسئله به راحتی زمانی که $p_A \leq p_B$ قابل حل نیست. به این منظور ابتدا در لم ۵.۲.۶ ثابت می‌کنیم در نقطه بیشینه تابع f تمام افراد یک گروه مانند یکدیگر بازی می‌کنند. با استفاده از این نتیجه مسئله را به مسئله *زیرمجموعه وزن‌دار بیشینه* در گراف تبدیل می‌کنیم. مسئله زیرمجموعه وزن‌دار بیشینه در ۴.۱.۳ تعریف شده است. در نهایت با توجه به الگوریتم چندجمله‌ای که برای مسئله‌ی زیرمجموعه وزن‌دار بیشینه در ۲.۳.۴ ارائه شده است، مسئله را در زمان چندجمله‌ای حل خواهیم کرد.

لم ۵.۲.۶. *اگر $\beta \to \infty$، تمام افراد یک گروه از محصول مشابه در حالت ایستای بازار استفاده می‌کنند.*

برهان. گروه دلخواه i را در نظر بگیرید. می‌دانیم که هنگامی که $\beta \to \infty$ حالت ایستای بازار با استفاده از نقطه بیشینه تابع پتانسیل f مشخص می‌شود. قسمتی از تابع پتانسیل f که به گروه i مرتبط است را به صورت

زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} g(x_A^i) &= \frac{۱}{۲}\left(ax_A^i x_A^i + bx_B^i x_B^i\right) + x_A^i \sum_{\substack{j\in N(i)\\ i\neq j}} ax_A^j + x_B^i \sum_{\substack{j\in N(i)\\ i\neq j}} bx_B^j \\ &\quad -p_A x_A^i - p_B x_B^i \end{aligned}$$

با جایگزینی x_B^i با $m^i - x_A^i$ در عبارت بالا، می‌توان دید که $g(x_A^i)$ یک تابع درجه دو بر حسب x_A^i است. ضریب جمله‌ی ${x_A^i}^۲$ برابر $\frac{۱}{۲}(a+b) > ۰$ است. بنابراین $g(x_A^i)$ مقدار بیشینه خود را در یکی از دو انتهای خود خواهد داشت. در نتیجه بیشینه مقدار $g(x_A^i)$ به ازای یکی از دو مقدار $x_A^i = ۰$ و یا $x_A^i = m^i$ بدست می‌آید. $\square$

در ادامه یک الگوریتم چند جمله‌ای برای پیدا کردن حالت ایستای بازار ارائه می‌کنیم. برای این منظور از مسئله زیرمجموع وزن‌دار بیشینه که در تعریف ۱.۳.۴ آمده است استفاده می‌کنیم. در لم ۲.۳.۴ الگوریتمی چندجمله‌ای برای حل این مسئله ارائه شده است.

قضیه ۶.۲.۶. *برای $\beta \to \infty$، می‌توان حالت ایستای بازار را در زمان چند جمله‌ای بدست آورد.*

برهان. با توجه به لم ۵.۲.۶ می‌دانیم تمام افراد یک گروه از محصول مشابه استفاده می‌کنند. بنابراین کافی است بدست بیاوریم در حالت ایستای بازار هر گروهی از چه محصولی استفاده می‌کنند. این مسئله را به مسئله زیرمجموعه وزن‌دار بیشنه تبدیل می‌کنیم. فرض کنید در نقطه بیشنه تابع پتانسیل f که نشان‌دهنده‌ی حالت ایستای بازار است مجموعه S_A از گروه‌ها از محصول A و مجموعه S_B از گروه‌ها از محصول B استفاده کرده‌اند. می‌توان مقدار تابع پتانسیل را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$f = \frac{۱}{۲}(ae_m(S_A, S_A) + be_m(S_B, S_B)) - p_A m^{S_A} - p_B m^{S_B}$$

با جایگزینی m^{S_B} با $m - m^{S_A}$ و $e_m(S_B, S_B)$ با $e_m(V,V) - e_m(S_A, S_B) - e_m(S_B, S_A) - e_m(S_A, S_A)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f &= \frac{۱}{۲}(ae_m(S_A, S_A) + be_m(V,V) - ۲be_m(S_A, S_B) - be_m(S_A, S_A)) \\ &\quad -p_A m^{S_A} + p_B m^{S_A} - p_B m \end{aligned}$$

دقت کنید که چون گراف بدون جهت است، می‌توان نتیجه گرفت $e_m(S_A, S_B) = e_m(S_B, S_A)$. از این موضوع در تساوی بالا استفاده شده است. اگر جملات ثابت که به انتخاب S_A وابسته نیست را حذف کنیم، بیشینه کردن تابع f معادل بیشینه کردن مقدار زیر خواهد بود:

$$\frac{۱}{۲}(a-b)e_m(S_A, S_A) - be_m(S_A, V\backslash S_A) + (p_B - p_A)m^{S_A}$$

در ادامه نشان می‌دهیم پیدا کردن زیرمجموعه S_A در گراف بازی معادل حل مسئله زیرمجموعه وزن‌دار بیشینه بر روی گراف G' است که در ادامه آن را تعریف می‌کنیم. گراف G' از روی گراف G به این صورت ساخته می‌شود که مجموعه رئوس آن برابر مجموعه رئوس G است. وزن I_i هر رأس i برابر $(p_B-p_A)m^i-bm^i\sum_{j\in N(i)} m^j$ و وزن هر یال w_{ij} برابر $\frac{1}{2}(a+b)m^im^j$ است. در این صورت برای هر زیرمجموعه $S\subseteq V$، اندازه وزن‌دار زیرمجموعه S برابر است با:

$$\begin{aligned} W_S &= \sum_{i\in S}\left((p_B-p_A)m^i-bm^i\sum_{j\in N(i)} m^j\right)+\sum_{\substack{(i,j)\in E\\ i,j\in S}}\left(\frac{1}{2}(a+b)m^im^j\right)\\ &= (p_B-p_A)m^S-be_m(S,V)+\frac{1}{2}(a+b)e_m(S,S)\\ &= \frac{1}{2}(a-b)e_m(S,S)-be_m(S,V\backslash S)+(p_B-p_A)m^S \end{aligned}$$

بنابراین پیدا کردن زیرمجموعه وزن‌دار بیشینه در گراف G' با مقدار $\alpha=1$ معادل پیدا کردن زیرمجموعه‌ای است که متناظر با بیشینه مقدار f است. طبق لم ۲.۳.۴ می‌توان این زیرمجموعه را در زمان چند جمله‌ای بدست آورد. □

۳.۶ رقابت بین شرکتها

در این بخش مسئله رقابت بین دو شرکت A و B را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. همان‌طور که در بخش ۱.۶ اشاره شد، رقابت بین دو شرکت را با یک بازی مدل می‌کنیم و به آن بازی قیمت‌گذاری گوییم. ابتدا با کمک نتایجی که از بخش قبلی بدست آورده‌ایم، یک روش برای محاسبه پاسخ بهینه هر شرکت در بازی قیمت‌گذاری ارائه می‌دهیم. سپس نشان می‌دهیم، یا این بازی نقطه تعادل نش ندارد و یا در نقطه تعادل نش قیمت شرکت B برابر صفر است و شرکت A تمام بازار را در اختیار می‌گیرد. همچنین ثابت می‌کنیم، در صورتی که شرکت‌ها در تمام وضعیت‌ها پاسخ بهینه را به عنوان قیمت انتخاب کنند بازار به نقطه تعادل نش، در صورت وجود چنین نقطه‌ای، همگرا خواهد شد. در نهایت بازار را هنگامی که گراف بازار، گرافی با خواص شبکه‌های اجتماعی باشد بررسی می‌کنیم. در حقیقت ثابت می‌کنیم در این حالت حتماً بازار نقطه تعادل نش دارد و بازی قیمت‌گذاری به آن هم‌گرا خواهد شد.

۱.۳.۶ بهترین پاسخ

اولین مسئله‌ای که در بازی قیمت‌گذاری بررسی می‌کنیم، مسئله بدست آوردن بهترین پاسخ است. در مسئله بهترین پاسخ شرکت B قیمت خود برای محصول را p_B قرار داده است و در این شرایط شرکت A می‌خواهد

قیمت p_A را طوری تعیین کند که بیشترین سود را کند. دقت کنید همین مسئله به طور برعکس که شرکت A قیمت محصول خود را تعیین کرده و شرکت B به دنبال بهترین قیمت برای محصول است نیز قابل تعریف است.

همان‌طور که در لم ۵.۲.۶ ثابت کردیم، در حالت ایستای بازار تمام افراد یک گروه از محصول مشابه استفاده می‌کنند. فرض کنید با قرار دادن قیمت‌های p_A و p_B در حالت ایستای بازار مجموعه S_A از محصول A و مجموعه S_B از محصول B استفاده کرده‌اند. سود شرکت A برابر $U_A(p_A, p_B) = p_A m^{S_A}$ و سود شرکت B برابر $U_B(p_A, p_B) = p_B m^{S_B}$ است. فرض کنید p_B ثابت است. ابتدا یک حد بالا و پایین برای مقدار بهینه قیمت محصول A بدست می‌آوریم و در نهایت با یک جستجوی دودوی بین حد بالا و پایین مقدار بهینه p_A را حساب می‌کنیم. ابتدا با استفاده از قضیه ۴.۲.۶ می‌دانیم اگر $p_A \leq p_B$ تمام بازار از محصول A استفاده می‌کنند. بنابراین شرکت A قیمتی پایین‌تر از p_B برای محصول خود انتخاب نمی‌کند. از طرفی دیگر بیشترین مقدار ممکن p_A قیمتی است که هیچ فردی از محصول A استفاده نکند. در لم بعدی یک حد بالا برای p_A ارائه شده است.

لم ۱.۳.۶. *اگر برای هر گروه i داشته باشیم $p_A > p_B + a \sum_{j \in N(i)} m^j$، در این صورت در حالت ایستای بازار تمام افراد از محصول B استفاده می‌کنند.*

برهان. دقت کنید که در بازی پتانسیلی حالت ایستای بازار حتماً یک نقطه تعادل نش است و هیچ کس نمی‌خواهد استراتژی خود را تغییر دهد. فرض کنید تمام افراد در حالت ایستای بازار از محصول B استفاده نکرده باشند و یک فرد از گروه i از محصول A استفاده کند. برای این فرد سود استفاده از محصول A و B در زیر آمده است:

$$F_A^i(x) = \sum_{j \in N(i)} a x_A^j - p_A \quad \leq \quad \sum_{j \in N(i)} a m^j - p_A$$
$$F_B^i(x) = \sum_{j \in N(i)} b x_B^j - p_B \quad \geq \quad -p_B$$

با فرض بیان شده در صورت لم می‌توان نتیجه گرفت $F_B^i(x) > F_A^i(x)$. در نتیجه فرد i ترجیح می‌دهد از محصول B استفاده کند. □

بنابراین در صورت ثابت بودن p_B، بیشینه مقدار ممکن برای p_A برابر

$$p_A^{max} = p_B + \max_i \{a \sum_{j \in N(i)} m^j\}$$

است. بدیهی است که با افزایش قیمت p_A تعداد افرادی که از محصول A استفاده می‌کنند کاهش می‌یابد. فرض کنید عدد k را به عنوان میزان جمعیتی که در نهایت از محصول A استفاده می‌کنند، ثابت نگه داشته‌ایم. با ثابت بودن p_B و k به دنبال بیشترین قیمت ممکن برای p_A هستیم که در حالت ایستای بازار حداقل جمعیت

k از محصول A استفاده کنند. پیدا کردن این قیمت با یک جستجوی دودویی قابل انجام است. به این صورت که برای یک قیمت مانند p'_A حالت ایستای بازار را با استفاده از قضیه ۶.۲.۶ بدست می‌آوریم و جمعیت افرادی که از محصول A استفاده کرده‌اند را در حالت ایستا محاسبه می‌کنیم. در صورتی که جمعیت آنها از k بیشتر باشد باید p'_A را افزایش دهیم و در صورتی که از k کمتر باشد باید p'_A را کاهش دهیم. فرض کنید بیشترین قیمت p_A را که حداقل جمعیت k از محصول A استفاده کنند را با جستجوی دودویی بدست آورده‌ایم و آن را p_A^k می‌نامیم. در این صورت اگر شرکت A قیمت p_A^k را پیشنهاد دهد به میزان kp_A^k سود می‌کند. پس کافی است p_A^k را برای حالت‌های مختلف k محاسبه کنیم و از میان آنها قیمتی که سود را بیشینه به عنوان بهترین پاسخ برگردانیم.

فرض کنید به تعداد r انتخاب مختلف برای مقدار k داریم. برای بدست آوردن p_A^k با دقت ϵبرای هر k به تعداد $\log \frac{p_A^{max}-p_B}{\epsilon}$ باید از قضیه ۶.۲.۶ استفاده کنیم. در نتیجه در کل باید به تعداد $r \log \frac{p_A^{max}-p_B}{\epsilon}$ مسئله پیدا کردن برش کمینه در گراف را حل کنیم. با توجه به اینکه پیدا کردن برش کمینه در $O(n^۳)$ قابل حل است. پس زمان اجرای الگوریتم پیشنهادی $\Theta(rn^۳ \log \frac{p_A^{max}-p_B}{\epsilon})$ است. در ادامه ثابت می‌کنیم که مقدار r حداکثر برابر $n+۱$ است. همان‌طور که بیان کردیم با افزایش p_A جمعیت افرادی که از محصول A در حالت ایستای بازار استفاده می‌کنند کم می‌شود. در ادامه در لم ۲.۳.۶ ثابت می‌کنیم با افزایش p_A هیچ گروهی استراتژی خود را در حالت ایستای بازار از B به A تغییر نمی‌دهد.

لم ۲.۳.۶. *فرض کنید S_A و S'_A مجموعه گروه‌هایی باشند که در حالت ایستای بازار از محصول A استفاده می‌کنند، هنگامی که قیمت محصول B برابر p_B و قیمت محصول A به ترتیب برابر p_A و $p'_A > p_A$ است. در این‌صورت $S'_A \subseteq S_A$.*

برهان. فرض کنید $S'_A \nsubseteq S_A$. دقت کنید که S_A مجموعه گروه‌هایی هستند که در حالت ایستای بازار با قیمت‌ها p_B و p_A از محصول A استفاده می‌کنند. با توجه به اثبات قضیه ۶.۲.۶ می‌توان نتیجه گرفت که S_A زیرمجموعه وزن‌دار بیشنه گراف G_W با وزن‌های زیر است:

$$I_i = (p_B - p_A)m^i - bm^i \sum_{j \in N(i)} m^j$$
$$w_{ij} = \frac{۱}{۲}(a+b)m^i m^j$$

بنابراین وزن زیرمجموعه S_A از زیرمجموعه $S_A \cup S'_A$ بیشتر است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sum_{i\in S_A} I_i + \sum_{\substack{(i,j)\in E\\ i,j\in S_A}} w_{ij} &\geq \sum_{i\in S_A\cup S'_A} I_i + \sum_{\substack{(i,j)\in E\\ i,j\in S_A\cup S'_A}} w_{ij} \\ \Rightarrow \cdot &\geq \sum_{i\in S'_A - S_A} I_i + \sum_{\substack{(i,j)\in E\\ i\in S'_A-S_A, j\in S_A\cup S'_A}} w_{ij} \end{aligned} \tag{۵.۶}$$

به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که S'_A زیرمجموعه وزن‌دار بیشنه گراف G'_W با وزن‌های $I'_i = I_i - (p'_A - p_A)m^i$ و $w'_{ij} = w_{ij}$ است. بنابراین وزن زیرمجموعه S'_A از زیرمجموعه $S_A \cap S'_A$ بیشتر است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sum_{i\in S'_A} I'_i + \sum_{\substack{(i,j)\in E\\ i,j\in S'_A}} w'_{ij} &\geq \sum_{i\in S_A\cap S'_A} I'_i + \sum_{\substack{(i,j)\in E\\ i,j\in S_A\cap S'_A}} w'_{ij} \\ \Rightarrow \sum_{i\in S'_A - S_A} I'_i + \sum_{\substack{(i,j)\in E\\ i\in S'_A-S_A, j\in S'_A}} w'_{ij} &\geq \cdot \end{aligned} \tag{۶.۶}$$

از طرفی دیگر با توجه به این‌که $p'_A > p_A$، برای هر $1 \leq i \leq n$ مقدار I'_i از I_i کمتر است. همچنین با فرض $S'_A \not\subseteq S_A$، می‌توان نتیجه گرفت $|S'_A - S_A| > \cdot$. بنابراین $\sum_{i\in S'_A - S_A} I'_i < \sum_{i\in S'_A - S_A} I_i$. دقت کنید که $w'_{ij} = w_{ij}$ و برای هر i و j مقدار w_{ij} نامنفی است. در این صورت با توجه به نامساویهای ۵.۶ و ۶.۶ به تناقض می‌رسیم. □

بنابراین با افزایش قیمت محصول A در یک نقطه حداقل یکی از گروه‌ها تصمیم به خرید محصول B می‌گیرد. با اثباتی که در لم ۲.۳.۶ ارائه شد، این گروه در آینده و با بیشتر شدن قیمت محصول A تصمیم به خرید آن نمی‌گیرد. این روند به همین صورت ادامه دارد که با افزایش قیمت محصول A گروه‌ها یکی پس از دیگری تصمیم به استفاده از محصول B می‌گیرند و انتخاب خود را با بیشتر شدن A عوض نمی‌کنند. در نتیجه حداکثر $n + 1$ انتخاب مختلف برای k خواهیم داشت و در نتیجه $r \leq n + 1$. پس می‌توان قضیه زیر را نتیجه گرفت.

قضیه ۳.۳.۶. *در بازی قیمت‌گذاری اگر هر شرکت قیمت رقیب را بداند، می‌تواند بهترین قیمت برای محصول خود را در زمان چند جمله‌ای محاسبه کند.*

فرض کنید شرکت B در بازار وجود ندارد. به عبارت دیگر فرض کنید $b = \cdot$ و $p_B = \cdot$. در این صورت مسئله به مسئله تعیین قیمت توسط یک شرکت تبدیل می‌شود. در حقیقت شرکت A می‌خواهد بهترین قیمت را برای محصول خود انتخاب کند و افراد جامعه نیز با توجه به قیمت تصمیم به خرید یا عدم خرید محصول

می‌گیرند. الگوریتم ارائه شده در این بخش می‌تواند این مسئله را نیز در زمان چند جمله‌ای حل کند. تنها کافی است فرض کنیم $b = ۰$ و $p_B = ۰$.

۶.۳.۲ نقطه تعادل نش

در این بخش به دنبال پیدا کردن نقطه تعادل نش در بازی قیمت‌گذاری هستیم. فرض کنید دو شرکت قیمت p_A و p_B را برای محصولات خود انتخاب کرده‌اند و افراد جامعه با توجه به این قیمت‌ها و تأثیرات اجتماعی تصمیم به خرید یکی از این دو کالا را گرفته‌اند. می‌دانیم حالت ایستای بازار با توجه به نقطه بیشینه تابع پتانسیل بازی بدست می‌آید. همچنین در لم ۶.۲.۵ نشان دادیم در حالت ایستای بازار تمام افراد یک گروه از محصول مشابه استفاده می‌کنند. یک حالت x که تمام افراد یک گروه از محصول مشابه استفاده می‌کنند را در نظر بگیرید. فرض کنید S_A مجموعه گروههایی هستند که در حالت x از کالای A استفاده می‌کنند و S_B مجموعه گروههایی هستند که در حالت x از کالای B استفاده می‌کنند. می‌توان مقدار تابع پتانسیل $f(x)$ را به صورت زیر نوشت:

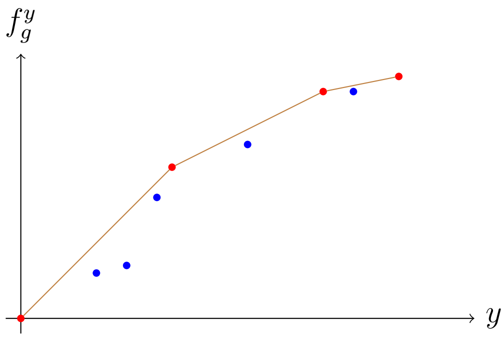
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{۱}{۲}(ae_m(S_A, S_A) + be_m(S_B, S_B)) - p_A m^{S_A} - p_B m^{S_B} \\ &= f_g + (p_B - p_A) m^{S_A} + \mathcal{C} \end{aligned}$$

که f_g و $\mathcal{C}$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned} f_g &= \frac{۱}{۲}((a-b)e_m(S_A, S_A) - be_m(S_A, S_B) - be_m(S_B, S_A)) \\ \mathcal{C} &= \frac{۱}{۲}be_m(V, V) - p_B m \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\mathcal{C}$ ثابت است و به مجموعه S_A بستگی ندارد، پیدا کردن نقطه‌ی بیشینه تابع پتانسیل f معادل پیدا کردن بیشینه $f_g + (p_b - p_A)m^{S_A}$ خواهد بود. فرض کنید جمعیت افراد گروه‌های S_A برابر y و $\alpha = p_A - p_B$. دقت کنید که f_g مستقل از α است و به طور کامل به ساختار گراف ارتباط دارد. f_g^y را بیش‌ترین مقدار f_g هنگامی که جمعیت گروه‌های S_A برابر y است، تعریف می‌کنیم. به عبارتی دقیق‌تر $f_g^y = \max_{m^{S_A}=y} f_g$. اگر زیرمجموعه‌های از گروه‌ها با جمعیت y وجود نداشته باشد، مقدار f_g^y را برابر صفر در نظر می‌گیریم. بنابراین با ثابت در نظر گرفتن α، برای پیدا کردن بیشینه تابع پتانسیل f باید مقدار بیشینه $f_g^z - z\alpha$ را به ازای $۰ \leq z \leq m$ بدست آوریم.

به ناحیه $\mathcal{R}_A^y$ یک ناحیه *فعال* می‌گوییم، اگر $R_A^y \neq \emptyset$. به بیانی دیگر ناحیه $\mathcal{R}_A^y$ یک ناحیه فعال است، اگر مقدار مانند α وجود داشته باشد که $y \in argmax_z\{f_g^z - z\alpha\}$. دقت کنید که اگر برای یک مقدار α $y \in argmax_z\{f_g^z - z\alpha\}$ در این صورت ناحیه $\mathcal{R}_A^y$ شامل تمام نقاط (p_A, p_B) خواهد بود که $p_A - p_b = \alpha$.



شکل ۳.۶: پوش محدب نقاط به صورت (y, f_g^y) برای $0 \leq y \leq m$. نقاط قرمز مشخص کننده‌ی ناحیه‌های فعال هستند.

در نتیجه ناحیه $\mathcal{R}_A^y$ تهی نیست و یک ناحیه فعال است. ناحیه‌های فعال در شکل ۲.۶ نشان داده شده‌اند. دقت کنید که هر دو ناحیه توسط یک خط از هم جدا شده‌اند. برای بدست آورن شهود بهتر از ناحیه‌های فعال تمام نقاط به صورت (y, f_g^y) را برای $0 \leq y \leq m$ در نظر بگیرید. در صورتی که ناحیه $\mathcal{R}_A^y$ فعال باشد، یک مقدار α وجود دارد که خواص زیر برقرار است:

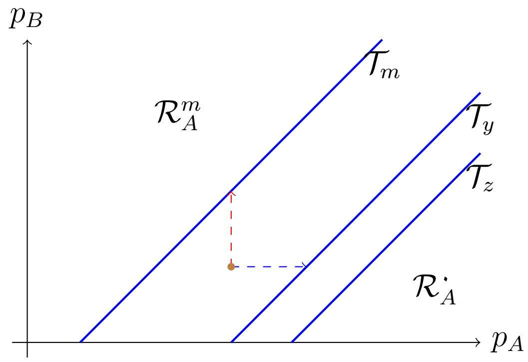
- برای هر $z < y$ خواهیم داشت $f_g^y - y\alpha \geq f_g^z - z\alpha$. بنابراین $\alpha < \frac{f_g^y - f_g^z}{y-z}$. در این صورت α از شیب خط بین نقاط (z, f_g^z) و (y, f_g^y) بیشتر نیست.
- برای هر $z > y$ خواهیم داشت $f_g^y - y\alpha \geq f_g^z - z\alpha$. بنابراین $\alpha > \frac{f_g^z - f_g^y}{z-y}$. در این صورت α از شیب خط بین نقاط (z, f_g^z) و (y, f_g^y) کمتر نیست.

پوش محدب [5] تمام نقاط به صورت (y, f_g^y)، برای هر $0 \leq y \leq m$، را در نظر بگیرید. با توجه به خواص گفته شده، نقاطی که بر روی این پوش محدب قرار دارد ناحیه‌های فعال را مشخص می‌کنند. برای مشاهده پوش محدب و ناحیه‌های فعال به شکل ۳.۶ مراجعه کنید.

فرض کنید k ناحیه فعال به نام‌های $\mathcal{R}_A^{n_1}, \mathcal{R}_A^{n_2}, \cdots, \mathcal{R}_A^{n_k}$ داریم که $0 = n_1 < n_2 < \cdots < n_k = m$. مرز بین دو ناحیه $\mathcal{R}_A^{n_i}$ و $\mathcal{R}_A^{n_{i-1}}$ را با خط $p_A - p_B = \mathcal{T}_{n_i}$ مشخص می‌کنیم. به بیانی دیگر نقطه (p_A, p_B) در ناحیه $\mathcal{R}_A^{n_i}$ است، اگر و تنها اگر $\mathcal{T}_{n_{i+1}} \leq p_A - p_B \leq \mathcal{T}_{n_i}$. دقت کنید که اگر $p_A - p_B = \mathcal{T}_{n_i}$، نقطه (p_A, p_B) بر روی مرز بین ناحیه‌های $\mathcal{R}_A^{n_i}$ و $\mathcal{R}_A^{n_{i-1}}$ قرار دارد.

در ادامه برای بیان دقیق قضیه‌های این بخش چند تعریف ارائه می‌دهیم. ابتدا دقت کنید که فضای جستجو برای قیمت بهینه تمام اعداد حقیقی است. در ادامه این فصل فرض کنید این فضا را با پارامتر ϵ گسسته کرده‌ایم و تنها قیمت‌های به فرم $i\epsilon$ را در نظر می‌گیریم. برای هر عدد β، مقدار β^- را برابر بزرگ‌ترین عدد به فرم $i\epsilon$ که

[5] convex hull



شکل ۴.۶: پاسخ شرکت A و B به ترتیب با خط سبز و قرمز نشان داده شده است.

کوچک‌تر از β است تعریف می‌کنیم. به همین صورت مقدار β^+ را برابر کوچک‌ترین عدد به فرم $i\epsilon$ که بزرگ‌تر از β است تعریف می‌کنیم. خط $p_A - p_B = \mathcal{T}^-_{n_i}$ را مرز سمت راست ناحیه $\mathcal{R}_A^{n_i}$ و خط $p_A - p_B = \mathcal{T}^+_{n_i}$ را مرز سمت چپ ناحیه $\mathcal{R}_A^{n_i-1}$ تعریف می‌کنیم. در ادامه ثابت می‌کنیم بازی قیمت‌گذاری حداکثر یک نقطه تعادل نش دارد.

قضیه ۴.۳.۶ *اگر $br_A(p_A, 0) = \mathcal{T}^-_m$، نقطه $(\mathcal{T}^-_m, 0)$ یک نقطه تعادل نش بازی قیمت‌گذاری است. در غیر این صورت بازی قیمت‌گذاری نقطه تعادل نش ندارد.*

برهان. ابتدا دقت کنید که نقطه (p_A, p_B) نمی‌تواند روی مرز دو ناحیه واقع شود. به این دلیل که روی نقاط مرزی تابع پتانسیل بازی چند نقطه بیشینه دارد و در نتیجه حالت ایستای بازار به احتمال مساوی یکی از آن‌ها خواهد بود. دقت کنید که جمعیت افراد استفاده کننده از محصول A و B در این چند حالت با هم متفاوت است. در نتیجه هر دو شرکت A و B انگیزه دارند با کاهش جزئی قیمت کالای خود جمعیت افرادی که از کالایشان استفاده می‌کنند را بیشتر کنند.

نقطه (p_A, p_B) در ناحیه $\mathcal{R}_A^y$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $y \neq 0$ و $y \neq m$. با توجه به شکل ۴.۶ با افزایش قیمت توسط شرکت A و یا شرکت B نقطه (p_A, p_B) همچنان در ناحیه $\mathcal{R}_A^y$ باقی می‌مانند. بدون لطمه به کلیت فرض می‌کنیم با افزایش قیمت توسط شرکت A نقطه (p_A, p_B) در ناحیه $\mathcal{R}_A^y$ باقی بماند. در این صورت شرکت A با افزایش قیمت، با کاهش مشتری روبرو نخواهد بود و در نتیجه با افزایش قیمت سود بیشتری می‌کند. پس نقطه (p_A, p_B) یک نقطه تعادل نش نیست.

اگر $y = 0$، نقطه (p_A, p_B) در ناحیه $\mathcal{R}_A^0 = \mathcal{R}_B^m$ است. سود شرکت A در این نقطه برابر ۰ است. بنابراین شرکت A قیمت محصول خود را کاهش می‌دهد تا جمعیت افرادی که از او خریداری می‌کنند مثبت شود. با توجه به اینکه $a > b$، شرکت A می‌تواند با کاهش قیمت محصول خود، سود خود را مثبت کند. پس در این حالت نیز نقطه (p_A, p_B) یک نقطه تعادل نش نیست.

اگر $y = m$، در این صورت (p_A, p_B) در ناحیه $\mathcal{R}_A^m$ است. اگر این نقطه بر روی مرز سمت راست $\mathcal{R}_A^m$ نباشد، شرکت A با افزایش قیمت محصول خود سود بیشتری می‌کند. پس تنها نقاط روی مرز سمت راست $\mathcal{R}_A^m$ را باید بررسی کنیم. این نقاط را می‌توان به صورت $(\mathcal{T}_m^- + p_b, p_B)$ نمایش داد. دقت کنید که شرکت B هیچ خریداری ندارد و اگر $p_B > ۰$، شرکت B تمایل دارد با کاهش قیمت خود تعدادی مشتری جذب کند. پس تنها هنگامی که $p_B = ۰$ می‌توان تعادل نش داشت که این نقطه همان $(\mathcal{T}_m^-, ۰)$ است. اگر $br_A(p_A, ۰) \neq \mathcal{T}_m^-$، در این صورت شرکت A در نقطه $(\mathcal{T}_m^-, ۰)$ بیشترین سود را نمی‌کند و علاقه‌مند به تغییر استراتژی است. در این حالت بازی هیچ نقطه تعادلی ندارد. ولی اگر $br_A(p_A, ۰) = \mathcal{T}_m^-$، نقطه $(\mathcal{T}_m^-, ۰)$ یک نقطه تعادل نش برای بازی قیمت‌گذاری است. □

۳.۳.۶ همگرایی

در این بخش نشان می‌دهیم اگر بازی قیمت‌گذاری نقطه تعادل نش داشته باشد، و شرکت‌ها هر لحظه بهترین پاسخ خود را انتخاب کنند در این صورت بازی به نقطه تعادل نش همگرا خواهد شد. به این منظور در قضیه ۵.۳.۶ ثابت می‌کنیم اگر بهترین پاسخ شرکت A به قیمت $p_B = ۰$ پیشنهاد قیمت $p_A = \mathcal{T}_m^-$ باشد، بازی به نقطه تعادل نش هم‌گرا خواهد شد. دقت کنید که شرط قضیه ۴.۳.۶ و ۵.۳.۶ یکسان است. در نتیجه در صورتی که بازی نقطه تعادل داشته باشد، این نقطه تعادل یکتاست و بازی به آن همگرا می‌شود. سپس شرایطی را بررسی می‌کنیم که شرط قضیه‌های ۴.۳.۶ و ۵.۳.۶ را برقرار سازند. در حقیقت نشان می‌دهیم اگر برای هر $۰ \leq y < m$ داشته باشیم $yf_g^m > mf_g^y$، در اینصورت $br_A(p_A, ۰) = \mathcal{T}_m^-$. به طور خاص نشان می‌دهیم گراف‌های منتظم و گراف‌های .. این شرط را دارند.

قضیه ۵.۳.۶. *اگر $br_A(p_A, ۰) = \mathcal{T}_m^-$ بازی قیمت‌گذاری به نقطه تعادل $(\mathcal{T}_m^-, ۰)$ همگرا می‌شود.*

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم اگر $br_A(p_A, ۰) = \mathcal{T}_m^-$ آن‌گاه $br_A(p_A, p_B) = \mathcal{T}_m^- + p_B$. فرض کنید $br_A(p_A, p_B) = p \neq \mathcal{T}_m^- + p_B$. فرض کنید $(p_A, p_B) \in \mathcal{R}_m^y$ به این معنی جمعیت افرادی که از محصول A استفاده می‌کنند برابر y باشد. با توجه به اینکه نقاط $(\mathcal{T}_m^-, ۰)$ و $(\mathcal{T}_m^- + p_B, p_B)$ در یک ناحیه هستند و $(\mathcal{T}_m^-, ۰) \in \mathcal{R}_A^m$ بنابراین $(\mathcal{T}_m^- + p_B, p_B) \in \mathcal{R}_A^m$. از طرفی دیگر دقت کنید که $br_A(p_A, p_B) = p$. در نتیجه خواهیم داشت $m(\mathcal{T}_m^- + p_B) < yp$. از طرفی دیگر، دو نقطه‌ی (p, p_B) و $(p - p_B, ۰)$ نیز در یک ناحیه قرار دارند و در نتیجه $(p - p_B, ۰) \in \mathcal{R}_A^y$. شرط لم بیان می‌کند که $br_A(p_A, ۰) = \mathcal{T}_m^-$ که به این معنی است که قیمت $\mathcal{T}_m^-$ از قیمت $p - p_B$ در ای حالت برای شرکت A بهتر است. بنابراین $m\mathcal{T}_m^- > y(p - p_B)$ که با نتیجه قبلی بدست آمده که $m(\mathcal{T}_m^- + p_B) < yp$ در تناقض است.

بنابراین خواهیم داشت $br_A(p_A, p_B) = \mathcal{T}_m^- + p_B$. در حقیقت بهترین پاسخ شرکت A در هر زمان این

است که قیمت را طوری تعیین کند که تمام افراد جامعه از محصول A استفاده کنند. بنابراین در هر لحظه بازی را به مرز سمت راست ناحیه $\mathcal{R}_A^m$ منتقل می‌کند. دقت کنید هیچ فردی در ناحیه $\mathcal{R}_A^m$ از محصول B استفاده نمی‌کند و در نتیجه سود شرکت B صفر خواهد بود. بنابراین شرکت B با کاهش قیمت محصول خود سعی در خارج شدن از ناحیه $\mathcal{R}_A^m$ دارد. بنابراین دو شرکت به صورت متوالی قیمت محصول خود را کاهش می‌دهند تا اینکه قیمت محصول شرکت B برابر ۰ شود. در این حالت شرکت B نمی‌تواند قیمت را کاهش دهد. در این وضعیت و با توجه به اینکه $br_A(p_A, ۰) = \mathcal{T}_m^-$ ، شرکت A قیمت محصول خود را به $\mathcal{T}_m^-$ تغییر می‌دهد و بازی به نقطه $(\mathcal{T}_m^-, ۰)$ می‌رسد. با توجه به قضیه ۴.۳.۶ این نقطه یک نقطه تعادل نش است و هیچ‌کدام از دو شرکت علاقه به تغییر قیمت محصول خود ندارد. □

لم ۶.۳.۶. *اگر برای هر $y < m$ داشته باشیم $mf_g^y > yf_g^m$، آن‌گاه $br_A(p_A, ۰) = \mathcal{T}_m^-$.*

برهان. نشان می‌دهیم که اگر شروط لم برقرا باشد تنها نواحی فعال در بازی قیمت‌گذاری، ناحیه‌های $\mathcal{R}_A^m$ و $\mathcal{R}_A^{\cdot}$ خواهند بود. دقت کنید که اگر برای $y \neq ۰$ و $y \neq m$ ناحیه $\mathcal{R}_A^y$ یک ناحیه فعال باشد، نقطه (y, f_g^y) روی پوش محدب نقاط به صورت (z, f_g^z) برای $۰ \leq z \leq m$ واقع شده است. بنابراین نقطه‌ی (y, f_g^y) نباید زیر خط بین نقاط (m, f_g^m) و $(۰, f_g^{\cdot} = ۰)$ قرار بگیرید. بنابراین باید داشته باشیم $f_g^y \geq y\frac{f_g^m}{m}$. در نتیجه $mf_g^y \geq yf_g^m$ که خلاف فرض لم است. بنابراین ناحیه $\mathcal{R}_A^y$ یک ناحیه فعال نیست.

پس ثابت کردیم که تنها ناحیه‌های $\mathcal{R}_A^m$ و $\mathcal{R}_A^{\cdot}$ فعال هستند بنابراین شرکت A باید تصمیم بگیرید که تمام بازار را در اختیار بگیرید و یا محصول خود را به هیچ فردی نفروشد. در این شرایط شرکت A در هر لحظه با تصمیم به در اختیار گرفتن تمام بازار، سود بیشتری می‌کند. بنابراین $br_A(p_A, ۰) = \mathcal{T}_m^-$. □

۴.۳.۶ بازار یکنواخت

در این بخش بازی قیمت‌گذاری را در شرایط واقعی‌تر بررسی می‌کنیم و نشان خواهیم داشت در این شرایط بازی یک نقطه تعادل نش دارد و بازی به آن همگرا می‌شود. برای بررسی تأثیر ساختار گراف در بازار، فرض می‌کنیم توزیع جمعیت در گروه‌های مختلف به صورت یکنواخت صورت گرفته است. در حقیقت بازی قیمت‌گذاری را برای بازارهای یکنواخت که در بخش ۱.۶ تعریف شده است، مطالعه می‌کنیم. در بازارهای یکنواخت برای هر گروه i خواهیم داشت $m^i = ۱$. در نتیجه جمعیت جامعه برابر $m = n$ است. ابتدا در مثال زیر نشان می‌دهیم که اگر گراف بازار خواص گراف‌های اجتماعی را نداشته باشد، بازی قیمت‌گذاری می‌تواند نقطه تعادل نش نداشته باشد. سپس در ادامه نشان می‌دهیم برای گراف‌هایی که خواص مشابه با گراف‌های اجتماعی دارند، بازی قیمت‌گذاری نقطه تعادل دارد و بازی به آن همگرا می‌شود.

مثال ۷.۳.۶. بازای یکنواختی با $n = 8$ گروه را در نظر بگیرید که جمعیت هر گروه ۱ است. برای هر $1 \leq i, j \leq 7$ دو گروه i و j به هم ارتباط دارند. گروه ۸ فقط با گروه ۷ در ارتباط است. فرض کنید $a = 2$ و $b = 1$. دقت کنید که با توجه به تعریف f_g^y مقدار $f_g^8 = \frac{1}{2}((2-1) \times 44 - 0 - 0) = 22$. همچنین برای $y = 7$ داریم که $f_g^7 = \frac{1}{2}((2-1) \times 42 - 1 - 1) = 20$. برای بقیه مقدارهای y داریم $f_g^y = \frac{1}{2}((2-1) \times y(y-1) - 2((7-y)y+1))$. ناحیه‌های فعال در این مثال $\mathcal{R}_A^8$، $\mathcal{R}_A^7$ و $\mathcal{R}_A^0$ هستند. مرز بین ناحیه $\mathcal{R}_A^8$ و ناحیه $\mathcal{R}_A^7$ مقدار $\mathcal{T}_8 = 2$ است. همچنین مرز بین ناحیه $\mathcal{R}_A^7$ و ناحیه $\mathcal{R}_A^0$ مقدار $\mathcal{T}_7 = 20/7$ است. در این مثال $br_A(p_A, 0) = \frac{20}{7}^- \neq \mathcal{T}_8^-$ و در نتیجه بازی قیمت‌گذاری نقطه تعادل نش ندارد.

قضیه ۸.۳.۶. *در بازار یکنواخت که گراف بازار یک گراف منتظم است، بازی نقطه تعادل یکتا خواهد داشت و به آن همگرا می‌شود.*

برهان. فرض کنید یک گراف منتظم از درجه d داریم. این گراف $e = nd/2 = md/2$ یال دارد. در این صورت $f_g^m = 2(a-b)e$. به علت همبند بود گراف، هر زیرگراف با y رأس آن کم‌تر از $yd/2$ یال دارد و در نتیجه $f_g^y < (a-b)yd$. بنابراین $yf_g^m = (a-b)myd > mf_g^y$. با استفاده از لم ۶.۳.۶ نتیجه دلخواه بدست می‌آید. □

قضیه ۹.۳.۶. *در بازار یکنواخت که گراف بازار یک گراف با اتصال ترجیحی است، بازی نقطه تعادل یکتا خواهد داشت و به آن همگرا می‌شود.*

برهان. فرض کنید یک گراف با اتصال ترجیحی داریم با متغیر d داریم. به بیانی دیگر هر رأس هنگام ورود به گراف تعداد d یال به رأس‌های قبلی اضافه می‌کند. بنابراین تعداد یال‌های گراف $e = nd = md$ است. پس $f_g^m = 2(a-b)e = (2(a-b)md$. از طرف دیگر زیرگراف القایی G' با y رأس را در نظر بگیرید. هنگامی که یک رأس جدید j وارد گراف می‌شود، حداکثر به تعداد d یال به G' اضافه می‌کند. به دلیل اینکه گراف هم‌بند است، حتماً یک یال بین G' و $G - G'$ وجود دارد. بنابراین تعداد یال‌های G' از yd کم‌تر است و در نتیجه $f_g^y < 2(a-b)yd$. پس خواهیم داشت $yf_g^m = 2(a-b)ymd > mf_G^y$. با استفاده از لم ۳.۶ .۶ نتیجه دلخواه بدست می‌آید. □

دد

۴.۶ نتیجه‌گیری و کارهای آتی

در این فصل بازاری با قیمت‌گذاری عمومی و افراد عاقل ولی بدون اطلاعات کامل مورد بررسی فرار گرفت. در حقیقت مدلی ارائه کردیم که افراد در هر مرحله به دنبال بیشینه کردن سود خود هستند ولی در تصمیم‌گیری با احتمال کمی دچار اشتباه می‌شوند. در چنین مدلی به بررسی حالت همگرایی بازار پرداختیم و الگوریتم چندجمله‌ای برای پیدا کردن حالت پایدار بازار ارائه کردیم. هم‌چنین تغییر قیمت‌ها در این مدل و هنگامی که دو شرکت با هم رقابت می‌کنند مورد مطالعه قرار گرفت.

در این فصل تلاش شد تا شواهدی ارائه دهیم که بازارهایی که بر روی شبکه‌های اجتماعی ایجاد می‌شوند دارای نقطه تعادل هستند. بررسی دقیق‌تر این موضوع، با استفاده از داده‌های واقعی که از شبکه‌های اجتماعی در دست است، برای ادامه کار پیشنهاد می‌شود. هم‌چنین می‌توان با تحلیل دقیق مدل‌های ریاضی مختلفی که برای ساخت شبکه‌های اجتماعی وجود دارد به این نتیجه رسید.

در این فصل رقابت بین دو شرکت مورد بررسی قرار گرفت. در اغلب تحقیقات اقتصادی مسئله رقابت بین دو یا چند شرکت تفاوت زیادی در نحوه تغییر قیمت‌ها ایجاد نمی‌کند. بررسی مسئله رقابت بین چند شرکت در این مدل بسیار جالب به نظر می‌رسد. البته مشکل اصلی در این حالت این است که نمی‌توانیم با الگوریتم ارائه شده در این فصل به راحتی حالت پایدار بازار را بدست آوریم. در حقیقت باید روش‌های جدیدی برای تحلیل بازار در این حالت ارائه داد.

فصل ۷

بازارهای پیش‌بینی : شرط‌بندی بر روی جایگشت

۱.۷ مقدمه

در دنیای امروز که عوامل متعددی در رخ دادن یک رویداد تأثیر می‌گذارند، پیش‌بینی آینده بسیار مطلوب به نظر می‌رسد. پیش‌بینی این موضوع که در آینده چه اتفاقی می‌افتد در اقتصاد و سیاست بسیار تأثیرگذار است. این موضوع که در انتخابات بعدی ریاست جمهوری در ایران گروه «الف» یا «ب» پیروز می‌شود، مسئله‌ای است که مورد علاقه‌ی بسیاری از سیاست‌مداران است. هم‌چنین این موضوع که قیمت سکه در ماه آینده چقدر خواهد بود، می‌تواند در سرمایه‌گذاری اقتصادی هر فردی تأثیر بگذارد. از این دست، می‌توان مثال‌های بسیار زیادی در سیاست، اقتصاد و دیگر حوزه‌ها بر شمرد:

- رییس جمهور آمریکا در انتخابات بعدی دموکرات خواهد بود یا جمهوری‌خواه؟
- قیمت نفت در بازارهای جهانی در ماه آینده چقدر خواهد بود؟
- نتیجه مسابقه فوتبال بین تیم‌های رئال مادرید و بارسلونا چه خواهد شد؟
- کدام تیم قهرمان لیگ فوتبال ایران خواهد شد؟

همان‌طور که اشاره شد پیش‌بینی وقایع در آینده در سیاست گذاری‌های مختلف در حوزه‌های سیاسی، اقتصادی و ... تأثیر می‌گذارد. اما مسئله اصلی این است که: **چگونه وقوع یک رویداد در آینده را پیش‌بینی کنیم؟**

چندین روش برای پیش‌بینی یک رویداد در آینده وجود دارد. اطمینان به تحلیل آدم‌های خبره و تحلیل‌گر، نظرسنجی و رأی گیری و یا بهره‌مندی از تحلیل‌های آماری از روش‌هایی هستند که برای پیش‌بینی آینده مورد

استفاده قرار می گیرند[۸، ۲۱، ۴۳، ۴۴]. در عمل استفاده و جمع آوری اطلاعاتی که مردم از دنیای واقع دارند، و به طور پراکنده میان مردم پخش شده است، در تخمین وقایع در آینده مؤثر است. به همین جهت اگر بتوانیم اطلاعات مردم را به گونه‌ای مناسب جمع آوری کنیم، می‌توان تحلیل مناسبی از شرایط داشته باشیم. ولی مشکل این‌جاست که چگونه اطلاعات مردم از یک رویداد را بدست آوریم.

برای مثال فرض کنید می‌خواهیم نتیجه انتخابات ریاست جمهوری در ایران را پیش‌بینی کنیم و برای این کار از نظرسنجی کمک می‌گیریم. بیان این موضوع که گروه «الف» یا «ب» در انتخابات بعدی پیروز می‌شوند در حرف بسیار ساده است. به بیانی دیگر هیچ ریسکی برای مدعی نداد واو می‌تواند بدون اینکه سود یا ضرری متوجه او باشد نظری را بیان کند. در حقیقت مردم در نظرسنجی سود یا ضرر خود را نمی‌بینند و به همین دلیل ممکن است دغدغه‌ای نسبت به نتیجه آن هم نداشته باشند و نظر واقعی خود را به هر دلیلی اعلام نکنند و اطلاعات بدست آمده صحت کافی را نداشته باشد.

شرط بندی بر روی یک واقعه یک روش مناسب برای دریافت اطلاعات افراد است. وقتی پای پول در میان است و هر فرد سود یا ضرر خود را وابسته به عملکرد خود می‌بیند، در نحوه تصمیم‌گیری و اظهارنظر دقت می‌کند. وقتی شخصی در بازار سهام، سهامی را خریداری می‌کند در حقیقت حاضر است بر روی این موضوع که قیمت آن سهام در آینده بالا می‌رود شرط بندی کند. در «بازارهای پیش‌بینی» که یکی از منابع بسیار مفید برای جمع‌آوری اطلاعات مردم در مورد وقایع آینده است، افراد بر روی وقایعی که در آینده ممکن است رخ دهد شرط بندی می‌کنند. فرض کنید شخصی ۶۰۰ تومان بر روی این‌که «گروه ب در انتخابات برنده می‌شوند» شرط بندی کرده است. این شخص در صورت برنده شدن ۱۰۰۰ تومان دریافت می‌کند. در حقیقت این شخص ۶۰۰ تومان در صورتی که گروه «الف» در انتخابات پیروز شود از دست می‌دهد و ۴۰۰ تومان در صورتی که گروه «ب» در انتخابات پیروز شود بدست می‌آورد. از یک نگاه دیگر می‌توان گفت در نظر این شخص به احتمال ۰/۶ گروه «ب» در انتخابات پیروز می‌شود.

بازاری را تصور کنید که مردم در آن بر روی وقایع آینده شرط بندی می‌کنند. شرط بندی به این گونه است که شخصی سهامی [۱] به قیمت x هزار تومان می‌خرد و ۱ هزار تومان برنده می‌شود اگر رخدادی که حدس زده است در واقع نیز رخ دهد. سهام در بازارهای پیش‌بینی به معنی رخ دادن واقعه‌ای در آینده است. در حقیقت وقتی شخصی سهامی را خریداری کرده که تیم رئال مادرید قهرمان این فصل باشگاه‌های اسپانیا خواهد شد. در صورت قهرمانی رئال مادرید ۱ هزار تومان بابت خرید سهامش دریافت می‌کند. مسئله بسیار جالب در بازارهای پیش‌بینی این است که قیمت یک سهام در یک بازار در حالت تعادل نشان دهنده‌ی این موضوع است که افکار عمومی چه نظری در مورد احتمال برنده شدن این سهام دارند. به بیان دیگر یکی از منابع مناسب برای پیش‌بین

[۱] Security in the context

آینده استفاده از اطلاعاتی است که در این گونه بازارها بدست می‌آید. در تحقیقات نشان داده شده است که در بسیاری از مواقع دقت اطلاعات جمع آوری شده از این طریق بالاست و پیش‌بینی بر اساس این اطلاعات دقت بیشتری نسبت به دیگر روش‌ها از جمله نظرسنجی و روش‌های آماری و ... دارد [۴۳، ۴۴، ۴۵]. همچنین در حال حاضر و با پیشرفت اینترنت بازارهای پیش‌گویی زیادی به وجود آمده است از این جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد :

- www.intrade.com
- us.newsfutures.com
- www.tradesport.com
- www.bet2give.com

در حال حاضر اکثر بازارهای پیش‌بینی و شرط‌بندی به یک نحوه خاص عمل می‌کنند. تمام سهام‌های مجاز که افراد حق دارند روی آن‌ها شرط‌بندی کنند در لیستی وجود دارد. سهام‌هایی که عرضه می‌شود به طور معمول ساده هستند و افراد در بیان نظرات خود در مورد دنیای واقع محدودیت‌هایی دارند. در حقیقت سهام‌های مجاز در هر لحظه به صورت هوشمند توسط صاحب بازار ارائه می‌شود و صاحب بازار هم به دنبال بیشینه کردن سود خود است. برای مثال اگر برای همگان قطعی باشد که تیم منچستر یونایتد بر تیم آرسنال غلبه خواهد کرد، به طور قطع صاحب بازار سهامی مبنی بر «برنده شدن منچستر یونایتد بر آرسنال» با قیمت پایین را ارائه نمی‌کند. همچنین در بسیاری از موارد صاحب بازار به دنبال فروش سهام‌های جفت خواهد بود. به این معنی که اگر شخص A سهامی به قیمت x هزار تومان مبنی بر «برنده شدن منچستر یونایند بر آرسنال» خریداری و شخص B سهامی به قیمت y هزار تومان مبنی بر«برنده شدن آرسنال بر منچستر تونایتد» خریداری کنند. صاحب بازار با فرض این‌که نتیجه این بازی مساوی نخواهد بود و در صورتی که $x + y > ۱$ باشد، این دو شرط را می‌پذیرد. دقت کنید که صاحب بازار نیز به دنبال سود خود می‌گردد و شرط‌هایی را قبول می‌کند که در نهایت منجر به ضرر خودش نشوند.

همان‌طور که گفته شد در حال حاضر در اکثر بازارهای شرط‌بندی فعلی، صاحب بازار به دنبال پیدا کردن دو سهام جفت است. ولی در بسیاری از سناریوها می‌توان بیش از دو سهام را با هم جفت و جور کرد. برای مثال سه سهام زیر را در نظر بگیرید :

۱. تیم رئال مادرید قهرمان این فصل باشگاه‌های اسپانیا خواهد شد. (فرض کنید شخص A درخواست خرید این سهام به قیمت $x_۱$ هزار تومان را دارد)

۲. تیم بارسلونا قهرمان این فصل باشگاه‌های اسپانیا خواهد شد. (فرض کنید شخص B درخواست خرید این سهام به قیمت $x_۲$ هزار تومان را دارد)

۳. تیم والنسیا قهرمان این فصل باشگاه‌های اسپانیا خواهد شد. (فرض کنید شخص C درخواست خرید این سهام به قیمت $x_۳$ هزار تومان را دارد)

اگر $x_۱ + x_۲ + x_۳ > ۱$ و $x_۱ + x_۲ < ۱$ و $x_۱ + x_۳ < ۱$ و $x_۲ + x_۳ < ۱$ باشند، صاحب بازار می‌تواند هر سه شرط را بپذیرد و سود کند. ولی اگر فقط به جفت کردن دو شرط فکر کند این امکان وجود ندارد.

مشکل در بازارهای پیش‌بینی فعلی این است که دست افراد در شرط‌بندی باز نیست و نمی‌توانند بر روی موضوع مورد علاقه خود شرط بندی کنند. در بعضی از مقالات سال‌های اخیر روش‌هایی مطرح شده که زمینه را برای شرط بندی طبیعی‌تر و آسان‌تر فراهم می‌کند [۱۲، ۲۲]. دقت کنید که صاحب بازار همیشه با این مسئله سر و کار دارد که کدام شرط‌ها را بپذیرد و کدام شرط‌ها را رد کند. در حقیقت باید به نوعی شرط‌های متضاد را با هم قبول کند. در این صورت هر چه دست افراد را در نحوه شرط‌بندی باز بگذاریم، صاحب بازار با مسئله پیچیده‌تری روبرو خواهد شد و از طرف دیگر شرایط بازار طبیعی‌تر خواهد بود و افراد راحت‌تر در شرط‌بندی‌ها شرکت می‌کنند و اطلاعات خود را بیان می‌کنند.

در این رساله تمرکز خود را بر روی بازارهای پیش‌بینی قرار می‌دهیم که افراد در آن در مورد رتبه‌بندی نماینده‌های مختلف در مسابقات شرط‌بندی می‌کنند. شرط‌هایی مانند اینکه«تیم A در مسابقات اول می‌شود» یا «تیم B رتبه‌اش از تیم C بهتر می‌شود». این مسئله به *شرط‌بندی روی جایگشت*[۲] معروف است [۱۲]. دلیل این نام‌گذاری نیز واضح است. در حقیقت می‌توان نتیجه یک مسابقه را مانند یک جایگشت نگاه کرد. در این نوع بازارهای شرط‌بندی، شرط‌های مجاز از قبل لیست نشده است. بلکه افراد می‌توانند به صورت ضمنی بر روی خاصیتی از رتبه‌بندی نهایی اظهار نظر کنند. البته در صورتی که افراد بتوانند هر گونه در مورد جایگشت خروجی نظر بدهند و محدودیتی نداشته باشند، مسئله جفت کردن شرط‌های متضاد بسیار پیچیده و در عمل غیر قابل حل خواهد شد. به همین دلیل لازم است محدودیت‌هایی را در چگونگی شرط‌ها اعمال کنیم. به این منظور زبان‌هایی برای شرط‌بندی تعریف می‌شود. هر زبان شرط‌بندی در حقیقت بیان کننده‌ی قواعدی است که افراد می‌توانند طبق آن شرط‌بندی کنند. در حقیقت زبان شرط‌بندی نوع سهام‌هایی که در بازار عرضه می‌شود را تعیین می‌کند.

با توجه به مطالب گفته شده یکی از مسائل مهم در شرط‌بندی روی جایگشت تعیین زبان شرط‌بندی است. در تعیین زبان شرط‌بندی تقابلی بین قدرتمندی زبان در بیان نظرات افراد و میزان سختی مسئله جفت کردن شرط‌ها توسط صاحب بازار وجود دارد. زبان شرط‌بندی مناسب است که صاحب بازار بتواند مسئله جفت کردن

[۲] Betting On Permutation

شرط‌ها را در زمان مناسب انجام دهد و از طرفی دیگر تا جای ممکن قدرتمندتر باشد. در این زمینه کارهای مختلفی انجام شده است و زبان‌ها مختلف مطرح گردیده است [۱۲، ۲۲]. قسمتی از تحقیقات در این رساله نیز در همین راستا می‌باشد.

ساختار این فصل به صورت زیر خواهد بود. ابتدا در بخش ۱.۱.۷ مسئله را به صورت دقیق‌تر تعریف می‌کنیم و زبان‌های مختلف شرط‌بندی را معرفی می‌کنیم. سپس در بخش ۳.۱.۷ تحقیقاتی که در زمینه شرط‌بندی روی جایگشت انجام شده است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش ۲.۱.۷ کارهای جدید انجام شده در این رساله به صورت کلی آورده شده است و در بخش‌های ۲.۷ و ۳.۷ به صورت دقیق‌تر بررسی خواهند شد. هم‌چنین ایده‌هایی برای تعریف زبان‌های بهتر و قوی‌تر وجود دارد که موضوع تحقیقات بعدی در این رساله خواهد بود. در بخش ۴.۷ ایده‌هایی که برای ادامه تحقیقات در مسئله شرط‌بندی روی جایگشت جالب به نظر می‌رسند را مرور خواهیم کرد.

۱.۱.۷ شرط‌بندی روی جایگشت: ورودی به مسئله

در این بخش به طور دقیق بازارهای شرط‌بندی روی جایگشت را تعریف می‌کنیم. سپس زبان‌های مختلف را که در این بازارها مورد استفاده قرار می‌گیرند، به طور دقیق‌تر تعریف خواهیم کرد.

بازارهای شرط‌بندی روی جایگشت: این بازارها، بازارهایی هستند که روی چگونگی دنبال هم قرار گرفتن n نماینده شرط‌بندی می‌کنند. برای مثال نماینده‌ها می‌توانند تیم‌های فوتبال در یک مسابقه باشند و روی چگونگی قرار گرفتن تیم‌ها در جدول مسابقات شرط‌بندی شود. در این گونه بازارها افراد می‌توانند روی خواص مختلف از جایگشت نهایی شرط‌بندی کنند. برای مثال یک شرط می‌تواند این باشد: «تیم A در مسابقات یا اول یا سوم می‌شود».

صاحب بازار مجموعه‌ای از شرط‌هایی که افراد مختلف بسته‌اند را دریافت می‌کند و می‌تواند هر کدام از شرط‌ها را قبول یا رد کند. هر شرط i شامل یک ارزش b و یک سهام ϕ است. اگر شرط توسط صاحب بازار پذیرفته شود، فرد به میزان b تومان قبل از رخ دادن هیچ اتفاقی پرداخت می‌کند. بعد از معلوم شدن نتیجه مسابقات فرد میزان ۱ تومان دریافت می‌کند اگر سهام ϕ رخ داده باشد. پس می‌توان سود فرد صاحب بازار را به این صورت تعیین کرد: اگر صاحب بازار یک شرطی با ارزش b و سهام ϕ را قبول کند و رویداد ϕ اتفاق بیافتد، سود صاحب بازار از قبول کردن این شرط $b - ۱$ تومان است. اگر رویداد ϕ رخ ندهد سود صاحب بازار از قبول این شرط b تومان است. کل سود صاحب بازار برابر جمع سودی است که از تمام شرط‌های پذیرفته شده بدست می‌آورد.

برای مثال فرض کنید یک شخص شرطی به ارزش ۰/۷ تومان روی سهام «تیم A در مکان دوم جدول قرار

می‌گیرد» بسته است و شخص دیگری شرطی به ارزش ۰/۶ تومان روی سهام «تیم B در مکان دوم جدول قرار می‌گیرد» بسته است. در این مثال اگر صاحب بازار هر دو شرط را قبول کند ۱/۳ = ۰/۶ + ۰/۷ تومان پول از افراد می‌گیرد و در بدترین حالت مجبور به پرداخت ۱ تومان است. چون تیم‌های A و B نمی‌توانند همزمان در مکان دوم جدول قرار گیرند.

در صورتی که صاحب بازار محتاط باشد نمی‌خواهد هیچ ریسکی را قبول کند. در این شرایط صاحب بازار به دنبال قبول کردن شرطهایی است که در صورت هر گونه اتفاقی سود تضمین شده‌اش بیشینه شود. *سود تضمین شده*[۳] به میزان سودی گفته می‌شود که در صورت رخ دادن هر گونه اتفاقی آن مقدار سود شامل حال صاحب بازار بشود. در بسیاری از مسائل این فصل فرض بر این است که صاحب بازار محتاط است و به دنبال قبول کردن شرطهایی است که سود تضمین شده را بیشینه کند. در ادامه، به این مسئله جفت کردن گوییم. در زیربخش ۷.۳.۴ فرض می‌کنیم صاحب بازار به دنبال سود با احتمال زیاد است. به عبارت دیگر می‌خواهیم بدانیم که آیا زیرمجموعه از شرطها وجود دارد که صاحب بازار با قبول آن با احتمال خوبی میزان سودش از مقدار داده شده x بیشتر شود. یا این‌که با قبول کدام زیرمجموعه از شرطها متوسط سود صاحب بازار بیشینه می‌شود.

در ادامه زبان‌های مختلف شرطبندی که در مقالات مختلف استفاده شده است را معرفی می‌کنیم.

- شرطبندی زیرمجموعه‌ای[۴] : در این زبان افراد می‌توانند روی دو نوع رویداد شرطبندی کنند :

  ۱. زیرمجموعه‌ای از رتبه‌ها که ممکن است یک نماینده خاص در آن قرار گیرد.

  ۲. زیرمجموعه‌ای از نماینده‌ها که ممکن است در یک رتبه خاص قرار گیرند.

  به طور رسمی‌تر در اینجا مجموعه‌ای از شرطها مثل I وجود دارد. شرط $i \in I$ از نوع اول با سه تایی (b_i, x_i, Y_i) نشان داده می‌شود که b_i ارزش شرط است، x_i نماینده مورد نظر است و Y_i زیرمجموعه‌ای از رتبه‌هاست. شخصی که شرط را بسته ۱ تومان دریافت می‌کند اگر نماینده x_i در یکی از رتبه‌های مشخص شده توسط Y_i قرار گیرد و در غیر این صورت پولی دریافت نمی‌کند. شرط $j \in I$ از نوع دوم با سه تایی (b_j, X_j, y_j) نشان داده می‌شود که b_j ارزش شرط است، X_j زیرمجموعه‌ای از نماینده‌هاست و y_j یک رتبه است. شخصی که شرط را بسته ۱ تومان دریافت می‌کند اگر یک از نماینده‌های عضو X_j در نهایت در مکان y_j قرار گیرند و در غیر این صورت پولی دریافت نمی‌کند.

- شرطبندی جفتی[۵] : این زبان شرطبندی اجازه می‌دهد که افراد روی چگونگی قرار گرفتن دو نماینده نسبت به یکدیگر اظهار نظر کنند. برای مثال «تیم منچستر یونایتد مکان بهتری از لیورپول در لیگ

[۳] Guaranteed Revenue

[۴] Subset Betting

[۵] Pair Betting

انگلیس خواهد داشت». به طور رسمی یک شرط i در این زبان با سه تایی $(b_i, x_{i,1}, x_{i,2})$ مشخص می‌شود که b_i ارزش شرط است و $x_{i,1}$ و $x_{i,2}$ دو نماینده مورد نظر هستند. شخص که شرط را بسته ۱ تومان دریافت می‌کند اگر در رتبه‌بندی نهایی نماینده $x_{i,1}$ رتبه بهتری از تیم $x_{i,2}$ داشته باشد و در غیر این صورت پولی دریافت نمی‌کند.

- شرط‌بندی یگانه[۶] : در این زبان شرط‌بندی افراد روی رتبه یک نماینده اظهار نظر می‌کنند. یک شرط i با سه تایی (b_i, x_i, y_i) نمایش داده می‌شود که b_i ارزش شرط است و x_i یک نماینده و y_i یک رتبه خاص است. شخصی که شرط را بسته ۱ تومان دریافت می‌کند اگر در نهایت نماینده x_i در مکان y_i قرار گیرد و در غیر این صورت پولی دریافت نمی‌کند. بدیهی است که این زبان زیرمجموعه‌ای از زبان شرط‌بندی زیرمجموعه‌ای است.

۲.۱.۷ نتایج بدست آمده

در این بخش نتایج جدیدی را بیان می‌کنیم که در تحقیقات انجام شده بدست آورده‌ایم. در ابتدا در بخش ۷.۲ ثابت می‌کنیم که هیچ الگوریتم تقریبی برای مسئله جفت کردن در زبان شرط‌بندی زیرمجموعه‌ای و در حالتی که شرط‌ها قابل قسمت نیستند، نمی‌توان ارائه کرد مگر آن‌که $P = NP$.

با توجه به مشکلات زبان‌هایی که در مقالات قبلی مورد استفاده قرار گرفته‌اند، زبانی جدید برای شرط‌بندی تعریف کرده‌ایم. در بخش ۳.۷ این زبان به تفصیل توضیح داده خواهد شد. در بخش ۱.۳.۷ الگوریتمی خطی ارائه می‌دهیم که تشخیص می‌دهد که آیا می‌توان بعضی از شرط‌ها را طوری قبول کرد که سود تضمین شده بیش‌تر از ۰ باشد یا نه. همچنین در بخش ۲.۳.۷ الگوریتم چند جمله‌ای با استفاده از برنامه‌ریزی خطی برای مسئله جفت کردن ارائه می‌کنیم. این مسئله در حالتی که صاحب بازار دارای اطلاعاتی اضافی در مورد جایگشت نهایی است در بخش ۳.۳.۷ مورد بررسی قرار گرفته شده است.

در بخش ۴.۳.۷ نیز مسئله را در حالت احتمالی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این حالت صاحب بازار به دنبال سود تضمین شده نمی‌باشد. بلکه می‌خواهد در انتها سودش به احتمال بالایی زیاد باشد.

۳.۱.۷ کارهای انجام شده توسط دیگران

بازارهای «شرط‌بندی روی جایگشت» اولین بار در مقاله [۱۲] مطرح گردید. در این مقاله دو زبان برای این مسئله تعریف گردید: زبان‌های «شرط‌بندی زیرمجموعه‌ای» و «شرط‌بندی جفتی». همچنین در این مقاله دو

[۶] Singleton Betting

گونه از مسائل مورد بررسی قرار داده شده است: قابل قسمت[۷] و غیر قابل قسمت[۸]. در مسئله‌های قابل قسمت صاحب بازار می‌تواند از هر شرط درصدی از آن را قبول کند. به این معنی که اگر شرطی به ارزش b روی سهام ϕ بسته شده است. صاحب بازار می‌تواند مقدار q از این شرط را قبول کند (q عددی بین ۰ و ۱ است). در این صورت فردی که شرط را بسته در ابتدا $q \times b$ تومان پول می‌دهد و در نهایت در صورت رخ دادن سهام ϕ مقدار q تومان پول دریافت می‌کند. در حقیقت در این مسئله‌ها صاحب بازار می‌تواند قسمتی از یک شرط را قبول کند. ولی در مسئله‌های غیرقابل قسمت صاحب بازار هر شرط را یا به طور کامل قبول می‌کند و یا به طور کامل رد می‌کند (q برابر ۰ یا ۱ خواهد بود و مقدار بین ۰ و ۱ قبول نمی‌کند).

در حالت قابل قسمت در مقاله [۱۲] نشان داده شده است که مسئله پیدا کردن سود تضمین شده‌ی بیشینه برای صاحب بازار در زبان شرط‌بندی زیرمجموعه‌ای در زمان چند جمله‌ای قابل حل است، و در زبان شرط‌بندی جفتی *NP*-Complete است. همچنین در همان مقاله مسئله در حالت غیر قابل قسمت نیز بررسی شده است. این موضوع که آیا برای زبان شرط‌بندی زیرمجموعه‌ای الگوریتمی تقریبی می‌توان پیدا کرد یا خیر به عنوان یک سؤال باز در این مقاله مطرح شده است که در این رساله به آن پاسخ خواهیم داد و نشان می‌دهیم هیچ الگوریتم تقریبی برای این مسئله نمی‌توان ارائه داد مگر آن‌که $P=NP$. البته بعدها با صحبت با نویسندگان مقاله [۲۳] متوجه شدیم که در نسخه‌ی مجله‌ای مقاله [۱۲] همین مطلب ثابت شده است که با اثبات ما در [۲۳] به طور کامل تفاوت دارد. بیان این نکته ضروری است که هنگام چاپ مقاله ما نسخه‌ی مجله‌ای مقاله [۱۲] موجود نبود.

قبل از بازارهای شرط‌بندی روی جایگشت، بازارهای شرط‌بندی روی فرم-منطقی[۹] در [۲۱، ۲۲] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در این بازارها افراد می‌توانند روی ۲^n حالت مقداردهی n متغیر منطقی شرط‌بندی کنند. در این بازار هر سهام در حقیقت یک فرمول منطقی است. در عمل اگر فرمول منطقی ارائه شده مقدار درست بگیرد آن سهام برنده می‌شود. برای مثال می‌تواند یک سهام این‌گونه بیان شود: «اگر منچستریونایند قهرمان نشود آن‌گاه لیورپول قهرمان می‌شود» و یا «در انتخابات امریکا دموکرات ها پیروز می‌شوند یا در انتخابات ایران اصول‌گرایان». نویسندگان این مقاله نشان داده‌اند که مسئله جفت کردن شرط‌ها برای این مسئله در حالت قابل قسمت *co-NP*-Complete و در حالت غیر قابل قسمت Σ_2^P-Complete است.

---

[۷] Divisible

[۸] Indivisible

[۹] boolean-style betting market

۲.۷ زبان شرط‌بندی زیرمجموعه‌ای با شرط‌های غیر قابل قسمت

در این بخش مسئله جفت کردن شرط‌ها در زبان شرط‌بندی زیرمجموعه‌ای و در حالتی که شرط‌ها قابل قسمت نباشند را بررسی می‌کنیم. نشان خواهیم داد که ارائه الگوریتم تقریبی با هر ضریب تقریبی برای پیدا کردن بیشینه سود تضمین شده برای این مسئله *NP*-Hard است.

تعریف ۱.۲.۷. یک الگوریتم برای پیدا کردن سود بیشینه را c-تقریبی[۱۰] گوییم اگر و تنها اگر در زمان چندجمله‌ای اجرا شود و برای هر ورودی که سود بیشینه‌ی آن x است جوابی دهد که سود آن از میزان cx کمتر نباشد.

در این‌جا ثابت می‌کنیم مسئله مورد نظر قابل تقریب زدن با هیچ ضریبی نیست. نمونه‌ای از مسئله را ارائه می‌کنیم که تمام شرط‌های آن در زبان شرط‌بندی زیرمجموعه‌ای از نوع دوم بوده و برای تمام آن‌ها y_j برابر ۱ است. نشان می‌دهیم ارائه الگوریتم تقریبی حتی برای این نمونه خاص هم غیر ممکن است. کلیت اثبات به این گونه است که ثابت می‌کنیم در این نمونه تشخیص این‌که آیا بیشینه سود تضمین شده‌ی صاحب بازار بیش از ۰ است کار ساده‌ای نیست. نتیجه این خواهد شد که هیچ الگوریتم تقریبی برای مسئله نمی‌توان یافت. برای اثبات این مدعی فرض کنید یک اگوریتم c-تقریبی برای مسئله پیدا شود. این الگوریتم بین ورودی‌هایی که بیشینه سود تضمین شده‌ی آن‌ها(x) بیش از ۰ است و آن‌هایی که بیشینه سود تضمین شده‌ی آن‌ها ۰ است فرق خواهد گذاشت و از روی خروجی آن می‌توان تشخیص داد که آیا بیشینه سود تضمین شده برای ورودی مسئله بیش از ۰ است یا خیر.

پس کافی است در ادامه نشان دهیم که تشخیص این‌که آیا بیشینه سود تضمین شده برای مسئله مورد نظر بیش از ۰ است یا نه، *NP*-Hard است. برای این منظور ابتدا ثابت می‌کنیم پیدا کردن مجموعه مستقل حتی در حالتی که فقط دنبال مجموعه مستقل از اندازه بزرگ باشیم *NP*-Complete است. این موضوع را در لم ۳.۲.۷ ثابت می‌کنیم. در نهایت با استفاده از این موضوع قضیه اصلی این زیر بخش را ثابت می‌کنیم.

تعریف ۲.۲.۷. مسئله مجموعه‌ی مستقل بزرگ[۱۱] : در مسئله مجموعه مستقل بزرگ به عنوان ورودی گراف G با n رأس داده شده است. می‌دانیم گراف G رأس تنها (رأس با درجه ۰) ندارد. هم‌چنین عدد $k > \frac{n}{2}$ داده شده است. هدف این است که در خروجی «بله» چاپ کنیم اگر گراف یک مجموعه‌ی مستقل از اندازه‌ی k داشته باشد و در غیر این‌صورت در خروجی «خیر» چاپ کنیم.

لم ۳.۲.۷. *مسئله مجموعه مستقل بزرگ* NP-*Complete است.*

---

[۱۰] c-approximation

[۱۱] Big Independent Set Problem

برهان. با استفاده از این موضوع که خود مسئله مجموعه مستقل[۱۲] *NP*-Complete است این لم را ثابت می‌کنیم. در مسئله مجموعه مستقل، گراف G و عدد k در ورودی داده شده است و هدف این است که تشخیص دهیم آیا مجموعه مستقل از اندازه k در گراف G یافت می‌شود یا خیر. بدون لطمه به کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که گراف G رأس تنها ندارد. در ادامه، مسئله مجموعه مستقل را با استفاده از مسئله مجموعه مستقل بزرگ حل می‌کنیم. فرض کنید تعداد رأس‌ها و یال‌های گراف G به ترتیب n و e باشد. همچنین فرض کنید اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل در G برابر x باشد. به گراف G به تعداد n الگوی $P_۳$ (مسیر با ۳ رأس و ۲ یال) اضافه می‌کنیم. گراف جدید را G' می‌نامیم. گراف G' دارای $n + ۳n = ۴n$ رأس و $e + ۲n$ یال است. بدیهی است که اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل در گراف G' برابر $x + ۲n$ است که از $\frac{۴n}{۲}$ بزرگ‌تر است. از طرفی اگر الگوریتمی مسئله مجموعه‌ی مستقل بزرگ را در زمان چند جمله‌ای قابل حل کند، با چند با اجرای همان الگوریتم (به ازای مقادیر مختلف k) می‌توان اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل در گراف G' را بدست آورد. به عبارت دیگر می‌توان در زمان چندجمله‌ای مقادیر $x + ۲n$ و در نتیجه x را بدست آورد. بنابر این مسئله مجموعه مستقل بزرگ *NP*-Complete است. □

در انتها نتیجه نهایی این بخش را ثابت می‌کنیم و در قضیه ۴.۲.۷ نشان می‌دهیم الگوریتم تقریبی برای مسئله پیدا کردن بیشینه سود تضمین شده برای زبان شرط‌بندی زیرمجموعه‌ای با شرط‌های غیر قابل قسمت وجود ندارد.

قضیه ۴.۲.۷. *برای هیچ $c > ۰$ الگوریتم c-تقریبی برای مسئله پیدا کردن سود بیشینه برای زبان شرط‌بندی زیرمجموعه‌ای با شرط‌های غیر قابل قسمت وجود ندارد.*

برهان. فرض کنید (G, k) نمونه‌ای از مسئله مجموعه مستقل بزرگ باشد. یک نمونه از مسئله شرط‌بندی به این صورت می‌سازیم : برای هر یال G که بین دو رأس u و v قرار دارد، یک نماینده به نام $c_{u,v}$ در مسئله شرط‌بندی قرار می‌دهیم. دقت کنید که $c_{u,v} = c_{v,u}$. فرض کنید ϵ یک عدد مثبت باشد که $(k - ۱)\epsilon < ۱ < k\epsilon$ و $n\epsilon < ۲$. با توجه به این‌که $k > \frac{n}{۲}$ وجود چنین ϵ تضمین می‌شود. برای هر رأس v در G یک فرد در بازار شرط بندی خود قرار می‌دهیم که این شخص شرطی به صورت $(\epsilon, X_v, ۱)$ می‌بندد که $X_v = \{c_{v,u} | (v, u) \in E(G)\}$.

در ادامه نشان می‌دهیم برای این‌که سود تضمین شده بیش از ۰ باشد، صاحب بازار نباید دو شرط متعلق به افراد v و u را با فرض این‌که u و v در گراف G همسایه‌اند بپذیرد. اگر صاحب بازار شرط هر دو فرد u و v را قبول کند. در این صورت اگر نماینده $c_{u,v}$ در رتبه اول قرار گیرد، صاحب بازار باید ۱ تومان به فرد u و ۱ تومان به فرد v پرداخت کند. ولی از طرف دیگر حداکثر می‌تواند از هر فرد ϵ تومان دریافت کند که در مجموع

Independent Set Problem[۱۲]

می‌شود $n\epsilon$ تومان . ولی با توجه به این‌که ۲ $> n\epsilon$ پس می‌تواند حالتی را متصور بود که صاحب بازار سود نمی‌کند. در نتیجه سود تضمین شده‌اش با قبول شرط‌های هر دو فرد u و v نمی‌تواند بیش از ۰ باشد. در نتیجه نشان دادیم که صاحب بازار برای این‌که سود تضمین شده است بیش از ۰ باشد نباید شرط هیچ دو نفری که در گراف G همسایه‌اند قبول کند. پس افرادی که شرط‌های آن‌ها توسط صاحب بازار پذیرفته می‌شود تشکیل یک مجموعه مستقل در گراف G می‌دهند.

در این صورت در هر اتفاقی که در نهایت بیافتد و رتبه‌بندی نهایی هرچه باشد صاحب بازار حداکثر باید ۱ تومان پرداخت کند (در صورت قبول کردن حداقل یک شرط می‌توان رتبه‌بندی پیدا کرد که صاحب بازار مجبور باشد ۱ تومان را پرداخت کند). پس برای این‌که سود تضمین شده مثبت شود باید حداقل $\lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$ تا شرط را قبول کنیم. به عبارت دیگر برای این‌که سود تضمین شده بیش از ۰ باشد باید حداقل $k = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$ شرط را که تشکیل یک مجموع مستقل در G می‌دهند را قبول کنیم. بنابراین این نمونه از مسئله شرط‌بندی جواب مثبت دارد اگر و تنها اگر گراف G مجموعه مستقل از اندازه k داشته باشد. در لم ۳.۲.۷ ثابت کردیم مسئله مجموعه مستقل بزرگ *NP*-Complete است. در نتیجه این موضوع که آیا سود تضمین شده بیش از ۰ است یا نه در زمان چند جمله‌ای قابل انجام نیست مگر آن‌که $P = NP$. در نتیجه هیچ الگوریتم c-تقریبی برای پیدا کردن بیشینه سود تضمین شده در زبان شرط‌بندی زیر مجموعه‌ای با شرط‌های غیر قابل قسمت وجود ندارد مگر این‌که $P = NP$. □

۳.۷ زبان شرط‌بندی یگانه

با توجه به این‌که صاحب بازار در زبان شرط بندی زیرمجموعه‌ای در حالتی که شرط‌ها قابل قسمت نباشند با مسئله‌ای بسیار سخت روبرو است که حتی الگوریتم تقریبی هم برای آن یافت نمی‌شود و هم‌چنین با توجه به دشوار بودن مسئله‌ی جفت کردن در زبان شرط‌بندی جفتی بر این برآمدیم که زبان شرط بندی ساده‌تری تعریف کنیم که مسئله جفت کردن در آن زبان در زمان چند جمله‌ای قابل حل باشد. به این منظور در این رساله به بررسی زبان شرط‌بندی یگانه بر آمدیم.

در این بخش ابتدا مسئله را به صورت دقیق‌تر صورت‌بندی می‌کنیم. سپس یک الگوریتم خطی ارائه می‌دهیم که مثبت بودن سود تضمین شده را در زبان شرط‌بندی یگانه تشخیص دهد. سپس مسئله پیدا کردن سود تضمین شده بیشینه را با کمک برنامه‌ریزی خطی حل می‌کنیم. در نهایت نشان می‌دهیم در صورتی که صاحب بازار دارای اطلاعاتی از بازار باشد باز هم می‌تواند سود تضمین شده بیشینه را در زمان چندجمله‌ای بدست آورد.

زبان شرط‌بندی یگانه را در بخش ۱.۱.۷ تعریف نمودیم. این زبان حالت خاصی از زبان شرط‌بندی مجموعه‌ای است و هر فرد در حقیقت بر روی این‌که یک نماینده خاص دقیقاً در چه رتبه‌ای شرط‌بندی می‌کند.

یک مسابقه با n نماینده را در نظر بگیرید. در این رویداد تعداد $n!$ رتبه‌بندی متفاوت برای این نماینده‌ها می‌توان متصور بود. در مسئله شرط‌بندی یگانه فرض کنید مجموعه‌ی I به عنوان شرط‌های اولیه به صاحب بازار ارسال شده است. هر شرط $i \in I$ به‌را با سه‌تایی (b_i, x_i, y_i) نشان می‌دهیم که b_i ارزش شرط است، x_i یک نماینده خاص و y_i یک رتبه خاص است. صاحب بازار می‌تواند هر شرط $i \in I$ را قبول یا رد کند. هدف صاحب بازار پیدا کردن زیر مجموعه‌ای از شرط‌ها است که با قبول آن‌ها سود تضمین شده است بیشینه گردد. در همین راستا ما دو مسئله زیر را در نظر گرفته‌ایم:

- مسئله وجود سود[۱۳]: در این مسئله هدف صاحب بازار پیدا کردن زیرمجموعه‌ای از شرط‌های بدون ریسک است. در حقیقت هدف پیدا کردن زیرمجموعه‌ای از شرط‌ها است که با قبول آن‌ها در صورت هر اتفاقی سود کند.

- مسئله بیشینه کردن سود[۱۴]: در این مسئله هدف صاحب بازار پیدا کردن زیر مجموعه‌ای از شرط‌ها است که با قبول آن سود تضمین شده‌اش بیشینه گردد. سود تضمین شده برابر کمینه میزان سود در صورت بروز $n!$ اتفاق ممکن است. در حقیقت سود تضمین شده میزان سودی است که در صورت بروز هر اتفاقی آن مقدار سود را خواهیم داشت.

با توجه به تعاریف ارائه شده بدیهی است که مسئله وجود سود حالت خاصی از مسئله بیشینه کردن سود است. در حالت کلی می‌توان مسئله را به این ترتیب تعمیم داد که هر فرد حق دارد بیش از یک واحد بر روی یک سهام شرط‌بندی کند و در این صورت صاحب بازار حق دارد هر تعدادی از این شرط‌ها را قبول کند. تمام نتایجی که در ادامه خواهد آمد برای این تعمیم از مسئله هم به راحتی قابل گسترش است.

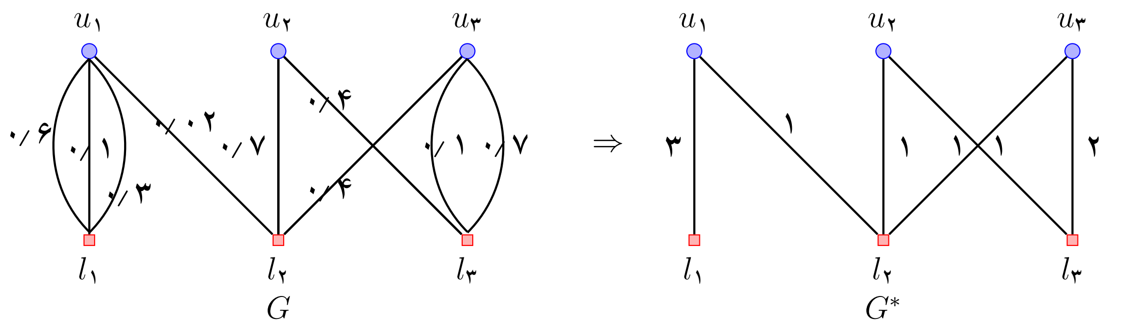
قبل از این‌که الگوریتم‌های مورد نظر را بیان کنیم چند مفهوم که در ادامه کاربرد زیادی دارند را تعریف می‌کنیم.

گراف دوبخشی متناظر با شرط‌بندی: از روی یک نمونه شرط‌بندی I در زبان شرط‌بندی یگانه گراف دو بخشی G_I را به این صورت می‌سازیم که برای هر نماینده یک رأس در قسمت بالایی گراف G_I و برای هر رتبه یک رأس در قسمت پایینی گراف G_I قرار می‌دهیم. مجموعه رأس‌های قسمت بالایی گراف را U^G و مجموعه رأس‌های قسمت پایینی را L^G می‌نامیم. هم‌چنین i-امین رأس قسمت بالایی را با u_i و j امین رأس قسمت پایینی را با l_j نمایش می‌دهیم. در نهایت برای هر شرط $(b_i, x_i, y_i) \in I$ یک یال بین u_{x_i} و l_{y_i} و با وزن b_i قرار می‌دهیم. دقت کنید که امکان دارد که گراف دارای یال چندگانه باشد و بین دو رأس بیش از یک یال داشته باشیم.

---

[۱۳] Existence Problem

[۱۴] Revenue Maximization Problem



شکل ۱.۷: گراف G^*

در یک گراف ساده وزن‌دار دوبخشی مانند $G(U^G, L^G, E)$ وزن بین دو رأس $u_i \in U^G$ و $l_j \in L^G$ را با $w_{i,j}^G$ نمایش می‌دهیم.

از روی گراف وزن‌دار با یال چندگانه $G(V, E)$ گراف ساده وزن‌دار $G^*(V^*, E^*)$ با وزن یال‌های w^* را به این صورت تعریف می‌کنیم که مجموعه رأس‌ها G^* با مجموعه رأس‌های G برابر است $(V^* = V)$. همچنین $w_{i,j}^{G^*}$ ، وزن یال بین $i, j \in V^*$ در G^*، برابر تعداد یال‌های بین رأس‌های بین i و j در G است. یک مثال در شکل ۱.۷ نشان داده شده است.

هر شرط یک یال متناظردر گراف G_I دارد. بنابراین هنگامی که صاحب بازار یک شرط را قبول کند می‌توان گفت که صاحب بازار یال متناظر آن شرط در گراف G_I را قبول کرده است. برای مثال بازار شرط‌بندی یگانه در شکل ۱.۷ را در نظر بگیرید. در این بازار ۹ شرط وجود دارد که متناظر با هر شرط یک یال در گراف دیده می‌شود. بنابراین مجموعه شرطها عبارت‌اند از :

$$(۰/۶, ۱, ۱), (۰/۱, ۱, ۱), (۰/۳, ۱, ۱), (۰/۰۲, ۱, ۲), ..., (۰/۱, ۳, ۳), (۰/۷, ۳, ۳)$$

در این مثال اگر صاحب بازار تمام شرطها را قبول کند در ابتدا ۳/۳۲ تومان از افراد دریافت می‌کند. در این صورت اگر نماینده‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب در رتبه ۱، ۲ و ۳ قرار گیرند صاحب بازار باید $۶ = ۲ + ۱ + ۳$ تومان به افراد بپردازد.

گراف پذیرفته شده[۱۵] **:** اگر صاحب بازار زیرمجموعه‌ای از شرطهای I را قبول کند می‌توان زیرگرافی از گراف G_I که یال‌های آن توسط صاحب بازار پذیرفته شده است را جدا کرد. به این زیرگراف، *گراف پذیرفته شده* گوییم. می‌گوییم صاحب بازار با توجه به گراف پذیرفته شده‌ی H *برنده* می‌شود، اگر پذیرفتن شرطهای متناظر با یال‌های گراف H باعث شود سود تضمین شده‌ی صاحب بازار بیش از ۰ شود.

چند نکته در نظریه گراف‌ها : در هر گراف G اندازه تطابق بیشینه وزن‌دار[۱۶] را با M_G نشان می‌دهیم.

[۱۵] Accepted Graph

[۱۶] Maximum Weighted Matching

بردار $\alpha = (\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_{|V(G)|})$ یک *پوشش رأسی*[۱۷] وزن‌دار گراف G است اگر برای هر یال $e = (i, j)$ داشته باشیم : $w^G_{i,j} \leq \alpha_i + \alpha_j$. *پوشش رأسی کمینه*، پوشش رأسی است که مقدار $\sum_{i \in V(G)} \alpha_i$ در آن کمینه می‌شود.

چند نکته در برنامه‌ریزی خطی : یک مسئله برنامه‌ریزی خطی[۱۸] را در نظر بگیرید و فرض کنید میزان بهینه تابع هدف در آن $f_۱$ باشد. همان مسئله را در نظر بگیرید و این محدودیت را نیز اضافه کنید که تمام متغیرها باید مقدار صحیح بگیرند. به این مسئله برنامه‌ریزی خطی صحیح[۱۹] گویند. فرض کنید میزان بهینه تابع هدف در این حالت برابر $f_۲$ باشد. در این صورت گوییم مسئله برنامه‌ریز خطی دارای شکاف صحیح [۲۰] $\frac{f_۲}{f_۱}$ است. دقت کنید که اگر شکاف صحیح یک مسئله برنامه‌ریزی خطی ۱ باشد به این معنی است که جواب بهینه‌ای برای مسئله وجود دارد که در آن تمام متغیرها مقدار صحیح دارند.

یک ماتریس را unimodular گوییم اگر دترمینان[۲۱] هر زیر ماتریس آن برابر ۰، ۱ یا ۱− شود. دقت کنید که در یک برنامه ریزی خطی اگر تمام ضرایب محدودیت‌ها صحیح باشند و ماتریس ضرایب unimodular باشد در این صورت شکاف صحیح آن ۱ خواهد بود [۴۱، ۵۰] .

۱.۳.۷ بررسی مسئله وجود سود

در این بخش شرط لازم و کافی برای این‌که بازار شرط‌بندی دارای سود تضمین شده بیش از ۰ باشد را ارائه می‌کنیم. نکته جالب این‌جاست که می‌توان در زمان خطی بررسی کرد که آیا ورودی مسئله خاصیت مورد نظر را دارد یا خیر.

قضیه ۱.۳.۷. *فرض کنید مجموعه‌ی I به عنوان شرط‌های ورودی در بازار شرط‌بندی یگانه داده شده است. در این صورت جواب مسئله وجود سود «بله» است اگر و تنها اگر رأسی مانند $i \in V(G_I)$ و مجموعه‌ای از یال‌ها مانند A وجود داشته باشند که :*

- *تمام یال‌های موجود در A مجاور رأس i باشند و تمام یال‌های موجود در A دقیقاً یک انتهای مشترک داشته باشند که همان رأس i است (در حقیقت دیگر انتهای آن‌ها باید متفاوت باشند).*
- *مجموع وزن یال‌های موجود در A از ۱ بیش‌تر شود یا به بیانی دیگر $\sum_{e \in A} w^{G_I}_e > ۱$.*

[۱۷] Vertex Cover

[۱۸] Linear Programming

[۱۹] Integer Linear Programming

[۲۰] Integrality Gap

[۲۱] Determinant

برهان. اثبات کافی بودن : فرض کنید رأسی مانند i و مجموعه یالی مثل A وجود دارند که خاصیت مورد نظر را دارد. بدون لطمه به کلیت فرض کنید i در بخش بالای گراف G_I است. اگر صاحب بازار شرط‌های متناظر با یال‌های موجود در A را قبول و بقیه شرط‌ها را رد کند، میزان پولی که بدست می آورد بیش از ۱ تومان است. از طرفی در این حالت صاحب بازار در بدترین حالت باید ۱ تومان بپردازد. چون تمام شرط‌هایی که قبول کرده است در نماینده i مشترک هستند و و رتبه‌های متفاوتی (عنصر سوم در سه‌تایی شرط‌بندی) دارند، بنابراین در هر حالتی نماینده i در یک رتبه خاص قرار می‌گیرد و صاحب بازار باید به حداکثر یک نفر ۱ تومان پرداخت کند. پس سود تضمین شده صاحب بازار در این حالت برابر $\sum_{e\in A} w_e^{G_I} - ۱ > ۰$ است.

اثبات لازم بودن : فرض کنید هیچ رأسی خواص گفته شده در صورت قضیه را ندارد و با این وجود زیرگرافی مانند H از G_I وجود دارد که صاحب بازار با قبول شرط‌های متناظر با یال‌های H برنده خواهد شد. ابتدا ثابت می‌کنیم زیرگرافی مانند $\hat{H}$ از G_I وجود دارد که صاحب بازار با قبول شرط‌های متناظر با یال‌های $\hat{H}$ برنده خواهد شد و برای تمام i و j ها داریم : $w_{i,j}^{\hat{H}*} \leq ۱$. به بیانی دیگر بین هر دو رأس $u_i \in U^{\hat{H}}$ و $l_j \in L^{\hat{H}}$ حداکثر یک یال در $\hat{H}$ وجود دارد. پس از اثبات وجود زیرگراف $\hat{H}$، ثابت می‌کنیم اگر چنین زیرگرافی پیدا شود به تناقض خواهیم رسید.

برای اثبات وجود زیرگراف $\hat{H}$ ابتدا لازم است لم زیر را ثابت کنیم.

لم ۲.۳.۷. *گراف G یک گراف دوبخشی ساده وزن‌دار با وزن‌های صحیح است. اگر اندازه تطابق بیشینه وزن‌دار (M_G) در گراف G بیش‌تر مساوی ۱ باشد، رأسی مانند i وجود دارد که خاصیت زیر را دارد :*

- *اگر وزن تمام یال‌های متصل به i را یک واحد کاهش دهیم، اندازه تطابق بیشینه وزن‌دار در گراف باقی‌مانده برابر $M_G - ۱$ خواهد شد.*

برهان. دوگان مسئله تطابق بیشینه وزن‌دار در گراف دو بخشی G این مسئله است : اعداد α_i و β_j را به رأس‌های G (α_i به رأس $u_i \in U^G$ و β_j به رأس $l_j \in L^G$) طوری اختصاص بده که برای هر یال $e = (u_i, l_j)$ داشته باشیم : $\alpha_i + \beta_j \geq w_{i,j}^G$. هم‌چنین می‌خواهیم تابع هدف $\sum_{u_i\in U^G} \alpha_i + \sum_{l_j\in L^G} \beta_j$ کمینه مقدار خود را داشته باشد.

با توجه به قضیه دوگانی می‌دانیم که کمینه مقدار ممکن $\sum_{u_i\in U^G} \alpha_i + \sum_{l_j\in L^G} \beta_j$ برابر مقدار M_G در G است. مقدار بهینه α_i و β_j برای رأس‌های $u_i \in U^G$ و $l_j \in L^G$ در نظر بگیرید. دقت کنید که وزن تمام یال‌های در گراف G صحیح است. به همین دلیل جواب بهینه‌ای وجود دارد که مقدار α_i ها و β_j ها در آن صحیح است. دلیل این مطلب این است که دوگان مسئله تطابق وزن‌دار totally unimodular است و در نتیجه شکاف صحیح آن ۱ است [۴۹].

با توجه به این‌که می‌دانیم $\sum_{u_i\in U^G} \alpha_i + \sum_{l_j\in L^G} \beta_j = M_G \geq ۱$ پس حداقل یکی از α_i ها یا β_j ها

بیش‌تر از ۰ هستند. بدون لطمه به کلیت فرض کنید ۰ $< \alpha_k$ است. چون α_k صحیح است نتیجه می‌گیریم که ۱ $\geq \alpha_k$. ادعا می‌کنیم u_k رأس مورد نظر در صورت لم است. وزن تمام یال‌های متصل به u_k را یک واحد کاهش می‌دهیم و گراف جدید را G' می‌نامیم. بدیهی است که مقادیر $\beta'_j = \beta_j$ (برای تمام $l_j \in L^G$) و $\alpha'_i = \alpha_i$ (برای تمام $u_i \in U^G$ به جز u_k) و $\alpha'_k = \alpha_k -$ ۱ یک جواب ممکن برای دوگان مسئله تطابق بیشینه در گراف G' با مقدار $\sum_{u_i \in U^G} \alpha'_i + \sum_{l_j \in L^G} \beta'_j = M_G -$ ۱ است. بنابراین با توجه به قضیه دوگانی، هر تطابق وزن‌داری در G' مقداری بیش‌تر از $M_G -$ ۱ ندارد. از طرفی دیگر تطابق بیشینه در گراف G با مقدار M_G را در نظر بگیرید. بدیهی است که اندازه همین تطابق در G' برابر $M_G -$ ۱ است. بنابراین اندازه تطابق بیشینه در گراف G' برابر $M_G -$ ۱ است. □

دوباره به اثبات قضیه ۱.۳.۷ بر می‌گردیم. گراف H که صاحب بازار با قبول شرط‌های متناظر با یال‌های آن برنده خواهد شد، را در نظر بگیرید. فرض کنید اندازه تطابق بیشینه وزن‌دار در گراف H^* برابر M_{H^*} باشد. بدیهی است که جایگشتی وجود دارد که در آن صورت وقوع آن صاحب بازار باید مقدار M_{H^*} بپردازد. از طرفی دیگر در ابتدا صاحب بازار میزان $\sum_{e \in H} w_e^H$ پول از افراد گرفته است. از آن‌جایی که فرض کردیم که صاحب بازار با قبول شرط‌های متناظر با یال‌های H برنده خواهد شد، می‌توان نتیجه گرفت که :

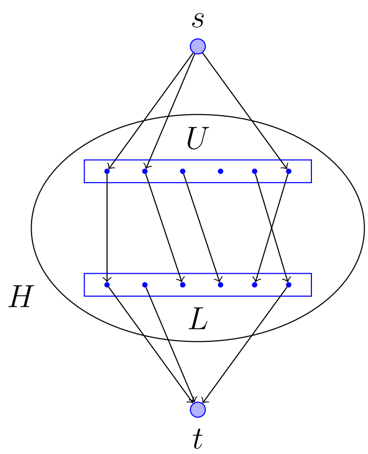
$$M_{H^*} < \sum_{e \in H} w_e^H \tag{۱.۷}$$

اگر H^* یالی مانند $e = (u_i, l_j)$ با وزن بیش‌تر از ۱ داشته باشد به این معنی است که در گراف H حداقل دو یال بین رأس‌های u_i و l_j وجود دارد. در این صورت به طور متوالی گراف H را به صورتی که در پایین گفته می‌شود تغییر می‌دهیم تا زمانی که H^* یال با وزن بیش از ۱ نداشته باشد.

- نحوه تغییر H : می‌دانیم رأسی مانند i در گراف H^* وجود دارد که خاصیت مورد نظر در لم ۲.۳.۷ را دارد. برای هر رأس j اگر یالی بین i و j وجود داشت، یکی از یال‌های بین رأس i و j در H را حذف کنید. گراف باقی‌مانده را $\dot{H}$ بنامید. با توجه به لم ۲.۳.۷ اگر وزن تمام یال‌های متصل به i در H^* را ۱ واحد کاهش دهیم، اندازه تطابق بیشینه وزن‌دار در H^* دقیقاً ۱ واحد کاهش می‌یابد. در نتیجه خواهیم داشت : $M_{\dot{H}^*} = M_{H^*} -$ ۱. از طرفی دیگر می‌دانیم رأسی وجود ندارد که خواص گفته شده در صورت قضیه را داشته باشد. بنابراین جمع وزن یال‌هایی که از H حذف کرده‌ایم تا $\dot{H}$ ساخته شود از ۱ بیش‌تر نیست و در نتیجه $\sum_{e \in \dot{H}} w_e^{\dot{H}} \geq \sum_{e \in H} w_e^H -$ ۱. با استفاده از نامساوی ۱.۷ داریم :

$$M_{\dot{H}^*} = M_{H*} - ۱ < \sum_{e \in H} w_e^H - ۱ \leq \sum_{e \in \dot{H}} w_e^{\dot{H}} \tag{۲.۷}$$

در حقیقت ثابت کردیم اگر صاحب بازار شرط‌های متناظر با گراف $\dot{H}$ را قبول کند باز هم برنده خواهد شد. پس در ادامه گراف H را با $\dot{H}$ جایگزین می‌کنیم و همین روند را تکرار می‌کنیم تا گراف H^* یالی با وزن بیش‌تر از ۱ نداشته باشد.



شکل ۲.۷: ساختن شبکه شار F از روی گراف H

پس تا به اینجا ثابت کردیم گرافی مانند H وجود دارد که صاحب بازار با پذیرفتن شرط‌های متناظر با یال‌های H برنده خواهد شد و هم‌چنین بین هیچ دو رأسی بیش از یک یال در گراف H وجود ندارد. در ادامه شبکه شار[۲۲] F را از روی H به صورت زیر می‌سازیم : (شکل ۲.۷)

۱. دو رأس s و t را به H اضافه می‌کنیم. s مبدا شبکه شار و t مقصد شبکه شار خواهد بود.

۲. یالی با گنجایش ۱ بین s و تمام رأس‌های u_i در قسمت بالایی H قرار می‌دهیم.

۳. یالی با گنجایش ۱ بین تمام رأس‌های l_j در قسمت پایینی H و t قرار می‌دهیم.

۴. یالی با گنجایش $w^H_{i,j}$ بین رأس u_i در قسمت بالایی H و رأس l_j در قسمت پایینی H قرار می‌دهیم.

می‌دانیم که هیچ رأسی با خواص گفته شده در صورت قضیه وجود ندارد. بنابراین برای هر رأس i، مجموع وزن یال‌های متصل به i در H از ۱ بیش‌تر نیست. در نتیجه یک شار با مقدار $\sum_{e\in H} w^H_e$ در شبکه شار F وجود دارد و بدیهی است که این یک شار بیشینه در شبکه است. شبکه شار جدید F' را از روی F به این صورت می‌سازیم که گنجایش تمام یال‌های موجود در F را به بالا گرد می‌کنیم. چون گنجایش هیچ یالی را کاهش نداده‌ایم، نتیجه می‌شود که بیشینه شار شبکه F' از بیشنه شار شبکه F کمتر نیست. از طرفی بیشینه شار شبکه F' برابر اندازه بیشینه تطابق وزن‌دار در گراف H^* است. در حقیقت بیشینه شار شبکه F' برابر M^{H^*} است.
اگر بیشنه شار در F را با $flow_F$ و بیشینه شار در F' را با $flow_{F'}$ نشان دهیم، خواهیم داشت :

$$M_{H^*} = flow_{F'} \geq flow_F \geq \sum_{e\in H} w^H_e \qquad (۳.۷)$$

[۲۲] Network Flow

با توجه به معادله‌ی ۱.۷ و ۳.۷ به تناقض می‌خوریم. پس اگر رأسی با خواص گفته شده در صورت قضیه پیدا نشود، نمی‌توان زیرگرافی مانند H پیدا کرد که با پذیرفتن شرط‌های متناظر با یال‌های آن برنده شویم. □

بررسی شرط لازم و کافی ارائه شده در قضیه ۱.۳.۷ برای تمام رأس‌های گراف G_I در زمان $O(|I|+m+n)$ قابل انجام است (n و m به ترتیب تعداد نماینده‌ها و تعداد رتبه‌ها هستند). در نتیجه با استفاده از قضیه ۳.۷. ۱ می‌توان به راحتی یک الگوریتم خطی برای مسئله وجود سود طراحی نمود.

در آخر نیز مسئله را در حالت عمومی بررسی می‌کنیم. در حالت عمومی افراد می‌توانند بر روی یک سهام بیش از یک بار شرط‌بندی کنند. در حقیقت هر فرد هنگام شرط‌بندی اعلام می‌کرد که حاضر است بر روی هر سهم به طور مثال C بار شرط‌بندی کند و صاحب بازار می‌تواند تعداد دلخواه $0 \leq C' \leq C$ از این شرط‌ها را قبول کند. در مسئله وجود سود ما می‌خواهیم جمع وزن یال‌های متصل به یک رأس خاص i را بررسی کنیم که انتهای مشترک دیگری غیر از i ندارند. فرض کنید شخصی C بار بر روی یک سهام شرط بسته است. این C شرط در حقیقت C یال موازی[۲۳] در گراف G_I خواهند بود. چون تمام این یال‌ها در دو سر خود مشترک هستند کافی است تنها یکی از آن‌ها را در محاسبات خود در قضیه ۱.۳.۷ لحاظ کنیم. در نتیجه مسئله در حالت عمومی از نظر پیچیدگی محاسباتی هیچ تغییری نمی‌کند و مسئله وجود سود در زمان خطی قابل حل است.

۲.۳.۷ بررسی مسئله بیشینه کردن سود

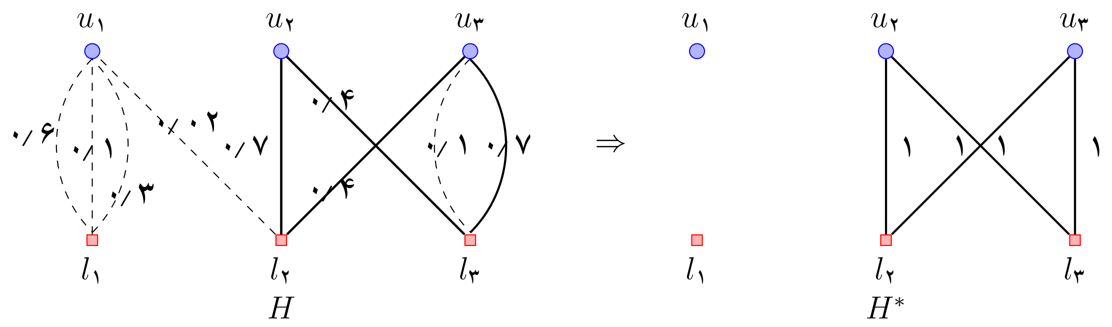
در این بخش الگوریتمی چندجمله‌ای ارائه می‌کنیم که در یک بازار شرط‌بندی با زبان شرط‌بندی یگانه، زیرمجموعه‌ای از شرط‌ها را پیدا کند که با قبول آن‌ها سود تضمین شده‌ی صاحب بازار بیشینه شود. اساس کار استفاده از برنامه ریزی خطی (LP) است. ابتدا یک LP مشخص می‌کنیم که بهترین جواب صحیح آن برابر جواب مسئله است. سپس ثابت می‌کنیم هر جواب بهینه LP مشخص شده را می‌توان در زمان چند جمله‌ای به یک جواب صحیح بهینه تبدیل کرد.

دقت کنید که در مسئله بیشینه کردن سود با یک گراف دوبخشی وزن‌دار با یال چندگانه مانند G سر و کار داریم که هر یال آن نشان دهنده‌ی یک شرط است. هدف پیدا کردن زیرگراف H از G است که مقدار زیر را بیشینه می‌کند:

$$\sum_{e\in H} w_e^H - M_{H^*} \tag{۴.۷}$$

در حقیقت اگر صاحب بازار شرط‌های متناظر با یال‌های زیرگراف H را قبول کند، در ابتدا $\sum_{e\in H} w_e^H$ تومان پول دریافت می‌کند و در بدترین حالت باید مقدار M_{H^*} تومان پول پرداخت کند. برای مثال بازار شرط‌بندی

[۲۳] Parallel Edge



شکل ۳.۷: جوابی با سود تضمین شده ۰٫۲

یگانه که در شکل ۱.۷ نشان داده شده است را در نظر بگیرید. اگر صاحب بازار شرط‌های $(۲, ۲, ۰٫۷)$، $(۳, ۲, ۰٫۴)$، $(۲, ۳, ۰٫۴)$ و $(۳, ۳, , ۰٫۷)$ را بپذیرد، گراف پذیرفته شده‌ی H را خواهیم داشت که در شکل ۳.۷ نشان داده شده است. دقت کنید که در این مثال $\sum_{e\in H} w_e^H$ برابر ۲٫۲ و اندازه تطابق وزن‌دار بیشینه در گراف H^* برابر ۲ است. بنابراین سود تضمین شده در این حالت برابر $۰٫۲ = ۲ - ۲٫۲$ است.

در ادامه ساختار جواب بهینه را بیش‌تر مورد بررسی قرار خواهیم داد. فرض کنید $H \subseteq G$ جواب بهینه برای مسئله باشد. پوشش رأسی وزن‌دار کمینه گراف H^* را در نظر بگیرید و فرض کنید در این پوشش رأسی وزن‌دار بهینه مقدار α_i به رأس $u_i \in U^{H^*}$ و مقدار β_j به رأس $l_j \in L^{H^*}$ اختصاص داده شده است. در این صورت لم زیر را در مورد ساختار گراف H^* خواهیم داشت.

لم ۳.۳.۷. *در گراف پذیرفته شده‌ی بهینه H، برای هر دو رأس $u_i \in U^H$ و $l_j \in L^H$ مقدار $w_{i,j}^{H^*}$ برابر $\min(w_{i,j}^{G^*}, \alpha_i + \beta_j)$ است.*

برهان. می‌دانیم که H یک زیرگراف از G است، بنابراین بدیهی است که $w_{i,j}^{H^*}$ از $w_{i,j}^{G^*}$ بیش‌تر نیست. از طرفی دیگر بردارهای $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{|V(U^H)|})$ و $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{|V(L^H)|})$ یک پوشش رأسی وزن‌دار برای گراف H^* هستند و در نتیجه $w_{i,j}^{H^*} \leq \alpha_i + \beta_j$.

فرض کنید برای یک مقدار خاص i و j اندازه یال $w_{i,j}^{H^*}$ برابر $\min(w_{i,j}^{G^*}, \alpha_i + \beta_j)$ نباشد. در نتیجه $w_{i,j}^{H^*} < w_{i,j}^{G^*}$ و $w_{i,j}^{H^*} < \alpha_i + \beta_j$. با توجه به این‌که $w_{i,j}^{H^*} < w_{i,j}^{G^*}$ حداقل یک یال در G بین i و j وجود دارد که در H نیست. این یال را به گراف H اضافه کنید. در نتیجه مقدار $w_{i,j}^{H^*}$ یک واحد افزایش پیدا می‌کند. از طرفی می‌دانیم $w_{i',j'}^{H^*}$ برای هر i' و j' مقداری صحیح دارد که نتیجه می‌دهد تمام مقادیر در بردارهای α و β نیز صحیح هستند. با توجه به صحیح بودن مقادیر $w_{i,j}^{H^*}$، α_i و β_j و نامساوی $w_{i,j}^{H^*} < \alpha_i + \beta_j$ می‌توان گفت $w_{i,j}^{H^*} + ۱ \leq \alpha_i + \beta_j$. در نتیجه همان بردارهای α و β برای گراف جدید H^* که تنها وزن یال بین i و j در آن یک واحد افزایش پیدا کرده یک پوشش رأسی وزن‌دار می‌سازند. با استفاده از این موضوع که اندازه تطابق وزن‌دار بیشینه برابر پوشش رأسی وزن‌دار کمینه است می‌توان نتیجه گرفت که اندازه تطابق وزن‌دار بیشینه در

گراف H^* تغییر نکرده است. بنابراین با اضافه کردن یال $e = (u_i, l_j) \in G - H$ به زیرگراف بهینه پذیرفته شده‌ی H مقدار $\sum_{e \in H} w_e^H - M_{H^*}$ افزایش پیدا می‌کند. این موضوع با این فرض که H زیرگراف پذیرفته شده‌ی بهینه است در تناقض است. $\square$

نتیجه عملی لم ۳.۳.۷ این است که با معلوم شدن بردارهای α و β، براحتی می‌توانیم مقدار $w_{i,j}^{H^*}$ را تعیین کنیم ($w_{i,j}^{H^*}$ را برابر $\min(w_{i,j}^{G^*}, \alpha_i + \beta_j)$ قرار می‌دهیم). در ادامه یک برنامه‌ریزی خطی صحیح (ILP) می‌نویسیم که جواب بهینه‌ی آن جواب بهینه مسئله بیشینه کردن سود در زبان شرط‌بندی یگانه را تعیین می‌کند. در این ILP هدفمان معلوم کردن بردارهای α و β و تعیین یال‌هایی است که باید به گراف H اضافه کنیم. برای راحتی کار فرض کنید $w_{i,j,t}^G$ برابر وزن t-امین یال بین رأس‌های i و j در گراف G است. بدون لطمه به کلیت مسئله فرض کنید یال‌های بین رأس‌های i و j به ترتیب نزولی مرتب شده‌اند به طوری که $w_{i,j,t}^G \geq w_{i,j,t+۱}^G$. برنامه ریزی خطی صحیح زیر ما را در پیدا کردن جواب مسئله کمک خواهد کرد.

$$\max \ \left(\sum w_{i,j,t}^G y_{i,j,t} - \sum x_i - \sum x'_j\right) \tag{۵.۷}$$
$$\sum_{t=۱}^{w_{i,j}^{G^*}} y_{i,j,t} = Y_{i,j} \quad \forall i \in U, j \in L$$
$$Y_{i,j} \leq x_i + x'_j \quad \forall i \in U, j \in L$$
$$x_i, x'_j \geq ۰ \quad \forall i \in U, j \in L$$
$$y_{i,j,t} \in \{۰, ۱\} \quad \forall i \in U, j \in L, ۱ \leq t \leq w_{ij}^{G^*}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید x_i، x'_j، $y_{i,j,t}$ و $Y_{i,j}$ متغیرهای ILP هستند و مقادیر زیر را در مسئله شرط‌بندی تعیین می‌کنند:

- x_i برابر مقدار α_i در پوشش رأسی وزن‌دار کمینه در گراف H^* است.
- x'_j برابر مقدار β_j در پوشش رأسی وزن‌دار کمینه در گراف H^* است.
- $Y_{i,j}$ برابر مقدار $w_{i,j}^{H^*}$ در گراف H^* است. در حقیقت $Y_{i,j}$ برابر تعداد یال‌های بین دو رأس $u_i \in U^H$ و $l_j \in L^H$ در گراف H است.
- $y_{i,j,t}$ برابر ۱ است اگر t-امین یال بین $u_i \in U^G$ و $l_j \in L^G$ در H باشد و در غیر این صورت برابر ۰ است.

با استفاده از قضیه دوگانی قوی می‌توان گفت اندازه تطابق وزن‌دار بیشینه برابر اندازه پوشش رأسی وزن‌دار کمینه است. از طرفی می‌دانیم متغیرهای x و x' متناظر با مقادیر پوشش رأسی وزن‌دار کمینه در گراف H^*

هستند. بنابراین مقدار $\sum x_i + \sum x'_j$ در تابع هدف ILP در حقیقت برابر M_{H^*} است. در نتیجه جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی صحیح ۵.۷ مقدار بیشینه سود تضمین‌شده در مسئله شرط‌بندی را معین می‌کند. برای حل برنامه‌ریزی خطی صحیح ۵.۷ محدودیت‌های صحیح بودن را از روی متغیرها برمی‌داریم. در نتیجه برنامه‌ریزی خطی زیر را خواهیم داشت :

$$\max \ \left(\sum w^G_{i,j,t} y_{i,j,t} - \sum x_i - \sum x'_j\right) \tag{۶.۷}$$

$$\sum_{t=۱}^{w^{G^*}_{i,j}} y_{i,j,t} = Y_{i,j} \ \ \forall i \in U, j \in L$$

$$Y_{i,j} \leq x_i + x'_j \ \ \forall i \in U, j \in L$$

$$x_i, x'_j \geq ۰ \ \ \forall i \in U, j \in L$$

$$۰ \leq y_{i,j,t} \leq ۱ \ \ \forall i \in U, j \in L, ۱ \leq t \leq w^{G^*}_{ij}$$

تعداد نامعادلات و متغیرها در برنامه‌ریزی خطی ۶.۷ چندجمله‌ای است و می‌توان آن را در زمان چندجمله‌ای حل نمود. مشکل این‌جاست که چگونه از روی جواب بهینه برنامه ریزی خطی ۶.۷ جواب برنامه‌ریزی خطی صحیح ۵.۷ را بدست آوریم. در لم ۴.۳.۷ نشان می‌دهیم که شکاف صحیح برنامه‌ریزی خطی ۶.۷ برابر ۱ است و هر جواب آن را می‌توان در زمان چندجمله‌ای به یک جواب برای برنامه‌ریزی خطی صحیح ۵.۷ تبدیل کرد. در این تبدیل مقدار تابع هدف ثابت می‌ماند. در لم ۴.۳.۷ نشان می‌دهیم ماتریس ضرایب برنامه‌ریزی خطی ۶.۷ totally unimodular است.

لم ۴.۳.۷. *شکاف صحیح در برنامه‌ریزی خطی ۶.۷ برابر ۱ است و جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی صحیح ۵.۷ در زمان چندجمله‌ای از روی جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی ۶.۷ بدست می‌آید.*

برهان. در این لم ثابت می‌کنیم که برنامه‌ریزی خطی ۶.۷ totally unimodular است. در برنامه‌ریزی خطی ۶.۷ چهار نوع متغیر وجود دارد. این چهار نوع عبارتند از: $y_{i,j,t}$، $Y_{i,j}$، x_i و x'_j. فرض کنید v یک بردار است و تمام متغیرهای برنامه‌ریزی خطی ۶.۷ را دارد. در این‌صورت می‌توان برنامه ریزی خطی را به صورت $Av \leq b$ نمایش داد که A و b به صورت مقابل تعریف می‌شوند: A یک ماتریس است که تعداد سطرهای آن برابر تعداد محدودیت‌ها و تعداد ستون‌های آن برابر تعداد متغیرهای برنامه‌ریزی خطی ۶.۷ است. همچنین b یک بردار است که هر سطر آن مقدار سمت راست یک محدودیت از برنامه‌ریزی خطی ۶.۷ را نشان می‌دهد.

در برنامه‌ریزی خطی ۶.۷ بعضی از محدودیت‌ها به صورت تساوی است. می‌توان این محدودیت‌ها را با قرار دادن یک متغیر اضافی به صورت نامساوی نشان داد. در نتیجه می‌توان برنامه‌ریزی خطی ۶.۷ را به صورت $Av \leq b$ نشان داد. دقت کنید که اضافه کردن این متغیرهای اضافی، تغییری در totally unimodular بودن

برنامه‌ریزی خطی ۶.۷ ایجاد نمی‌کند. در ادامه برای این‌که ثابت کنیم شکاف صحیح برنامه‌ریزی خطی ۶.۷ برابر ۱ است، کافی است نشان دهیم که ماتریس A یک ماتریس totally unimodular است [۴۱، ۵۰].

فرض کنید که A یک ماتریس totally unimodular نباشد. بنابراین A یک زیرماتریس دارد که دترمینان آن ۰، ۱ یا ۱− نیست. فرض کنید K کوچک‌ترین زیرماتریس A با این خاصیت باشد. فرض کنید یک سطر یا ستون K دقیقاً یک مقدار غیر صفر مثل a داشته باشد. چون فرض کرده‌ایم K کوچک‌ترین زیرماتریس با دترمینان مخالف ۰، ۱ و ۱− است، پس مقدار a برابر ۱ یا ۱− است. ماتریس K' از روی K با حذف سطر و ستون شامل مقدار a بدست می‌آید. در این‌صورت قدرمطلق دترمینان ماتریس K' با K برابر است. بنابراین دترمینان K' نیز برابر ۰، ۱ یا ۱− است که با فرض کوچک‌ترین بودن K در تناقض است. بنابراین هر سطر یا ستون K حداقل دو مقدار غیر صفر دارد.

با توجه به این موضوع که هر سطر یا ستون K حداقل دو مقدار غیر صفر دارد، پس محدودیت‌های به صورت $y_{i,j,t} \leq ۱$ و $y_{i,j,t} \geq ۰$ در ماتریس K ظاهر نمی‌شوند. بنابراین بدون لطمه به کلیت مسئله می‌توان این سطرها را از ماتریس A حذف کرد و فرض کرد که K زیرماتریس، ماتریس باقیمانده است. از طرفی دیگر می‌دانیم هر ستون K نیز حداقل دو مقدار غیر صفر دارد. هم‌چنین ستون مربوط به متغیر $y_{i,j,t}$ دقیقاً یک مقدار غیر صفر دارد. بنابراین ستون‌های مربوط به متغیرهای $y_{i,j,t}$ در ماتریس K وجود ندارند. به طور مشابه می‌توان این ستون‌ها را نیز از ماتریس A حذف کرد و فرض کرد که K زیرماتریس، ماتریس باقیمانده است.

حال به محدودیت‌های به صورت $\sum y_{i,j,t} = Y_{i,j}$ دقت کنید. با توجه به این‌که ستون‌های مربوط به متغیرهای $y_{i,j,t}$ از ماتریس A حذف شده‌اند، پس سطر مربوط به این محدودیت فقط یک مقدار غیر صفر دارد. بنابراین به طور مشابه می‌توان این سطرها را از ماتریس A حذف کرد. در ماتریس باقیمانده هر ستون مربوط به متغیر $Y_{i,j}$ یک مقدار غیر صفر دارد و در نتیجه می‌توان این ستون‌ها را حذف کرد.

ماتریس باقیمانده تنها دارای محدودیت به صورت $Y_{i,j} \leq x_i + x'_j$ است و تنها ستون‌های مربوط به متغیرهای x_i و x'_j را دارد. دقت کنید که هر سطر ماتریس باقیمانده، دقیقاً دو مقدار غیر صفر با علامت یکسان دارد. ستون‌های ماتریس باقیمانده را به دو مجموعه ستون $B = \{x_۱, x_۲, \cdots, x_n\}$ و $C = \{x'_۱, x'_۲, \cdots, x'_n\}$ تبدیل کنید. در این صورت در هر سطر یک مقدار غیر صفر به مجموعه ستون B و یک مقدار به مجموعه ستون C تعلق دارد. بنابراین با توجه به [۲۷]، می‌توان نتیجه گرفت که دترمینان هر زیرماتریس از ماتریس باقیمانده برابر ۰، ۱ یا ۱− است. در نتیجه دترمینان K نیز ۰، ۱ یا ۱− است. این نتیجه با فرضی که در مورد K کردیم در تناقض است. بنابراین ماتریس A یک ماتریس totally unimodular است. $\square$

در نهایت حالت عمومی مسئله را در نظر بگیرید که هر فرد می‌تواند بر روی یک سهام بیش از یک بار شرط‌بندی کند. تنها تغییری که لازم است ایجاد کنیم این است که در برنامه‌ریزی خطی صحیح ۵.۷ باید

محدودیت $yi, j, t \in \{۰, ۱\}$ را با محدودیت $y_{i,j,t} \in \{۰, ۱, ..., C\}$ عوض کنیم که C برابر تعداد بارهایی است که فرد مورد نظر شرط‌بندی کرده است. بدیهی است که شکاف صحیح برنامه‌ریزی خطی ۶.۷ هنوز ۱ است.

با استفاده از برنامه‌ریزی خطی صحیح ۵.۷ و نتیجه لم ۴.۳.۷ به راحتی نتیجه می‌شود که مسئله بیشنه کردن سود تضمین‌شده برای صاحب بازار در زبان شرط‌بندی یگانه در زمان چندجمله‌ای قابل حل است. این زیربخش را با قضیه زیر جمع‌بندی می‌کنیم.

قضیه ۵.۳.۷. *مسئله بیشنه کردن سود صاحب بازار در زبان شرط‌بندی یگانه در زمان چندجمله‌ای قابل حل است.*

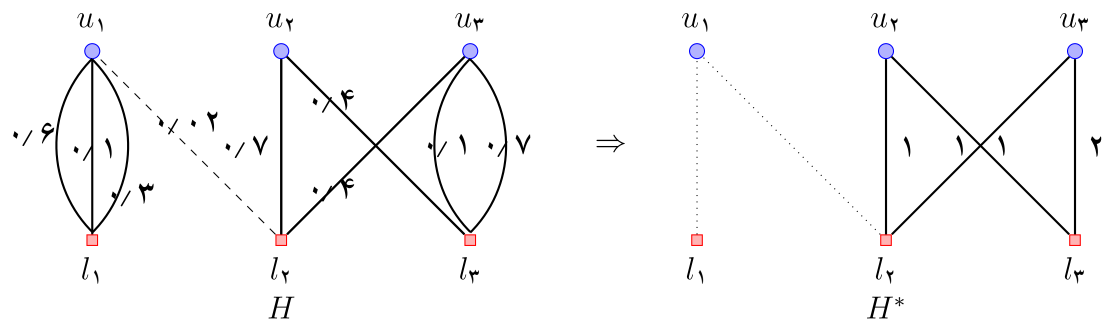
دقت کنید که اندازه‌ی برنامه‌ریزی خطی ۶.۷ کوچک و چندجمله‌ای است و در عمل به راحتی در زمان چندجمله‌ای قابل حل است. این برنامه‌ریزی خطی با برنامه‌ریزی خطی با اندازه نمایی که در [۱۲] برای زبان شرط‌بندی زیرمجموعه‌ای با شرط‌های قابل‌قسمت ارائه شده است متفاوت است.

۳.۳.۷ مسئله بیشینه کردن سود با اطلاعات اضافی

در این بخش مسئله بیشینه کردن سود در بازار شرط‌بندی با زبان شرط‌بندی یگانه را در حالتی که اطلاعاتی از رتبه‌بندی نهایی نماینده‌ها در دست داریم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. هر اطلاعات اضافی را با یک جفت ممنوع[۲۴] مانند (x, y) نشان می‌دهیم. جفت ممنوع (x, y) به این معنی است که نماینده x در هیچ صورتی در مکان y قرار نمی‌گیرید. صاحب بازار می‌تواند این اطلاعات را از منبع‌های گوناگونی بدست آورد. هم‌چنین با بررسی بازار می‌تواند جفت‌های ممنوعی را پیش‌بینی کند که با اطمینان خوبی نسبت به عدم رخ دادن آن‌ها مطمئن باشد. دقت کنید که این نوع اطلاعات می‌تواند مواردی که به طور مثال صاحب بازار مطمئن است نماینده x در مکان y قرار می‌گیرد را نیز در برگیرد، به این صورت که تمام جفت‌های (x, y') که $y' \neq y$ را به عنوان جفت ممنوع تعریف کند.

فرض کنید F مجموعه جفت‌های ممنوع باشد. در صورتی که جفت‌های ممنوع مشخص شده باشد، رخ دادن یک جایگشت ممکن است اگر شامل هیچ یک از جفت‌های ممنوع نباشد. اگر از دیدگاه گرافی نگاه کنیم، هر رتبه‌بندی را می‌تواند با یک تطابق در گراف دوبخشی متناظر با شرط‌بندی نشان داد و هر جفت ممنوع را می‌توان با یک یال نشان داد. در این صورت رخ دادن یک تطابق در گراف ممکن است اگر و تنها اگر شامل هیچ یال ممنوعی نباشد. در این صورت صاحب بازار می‌تواند از این اطلاعات استفاده کند و مسئله بیشنه کرد

[۲۴] Forbidden Pair



شکل ۴.۷: مسئله بیشنیه کردن سود با اطلاعات اضافی

سود را به صورت بهینه‌تری حل کند. در این زیربخش نشان خواهیم داد که الگوریتم مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی که در زیربخش قبل معرفی کردیم قابل تعمیم برای حل مسئله در این حالت است.

قبل از بیان الگوریتم مسئله را با یک مثال بررسی می‌کنیم. بازار شرط‌بندی یگانه در شکل ۱.۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید می‌دانیم در صورت هر اتفاقی نماینده ۱ و ۲ در رتبه‌ی ۱ قرار نخواهند گرفت (به شکل ۴.۷ دقت کنید). به بیانی دیگر جفت‌های $(۱, ۱)$ و $(۲, ۱)$ جفت‌های ممنوع هستند. با استفاده از این اطلاعات اضافی می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که نماینده‌ی ۳ به طور قطع در رتبه‌ی ۱ قرار می‌گیرد. بنابراین صاحب بازار با پذیرفتن تمام شرط‌ها به غیر از شرط $(۲, ۱, ۲ ۰ ۰/۰)$ سود تضمین شده‌ی خود را بیشینه می‌کند. در این صورت صاحب بازار ۳/۳ تومان پول دریافت می‌کند و در بدترین حالت ۱ تومان پرداخت می‌کند.

در ابتدا نشان می‌دهیم در صورتی که گراف پذیرفته شده‌ی H را داشته باشیم، چگونه می‌توانیم بدترین حالت خروجی را که صاحب بازار مجبور به پرداخت بیش‌ترین میزان پول است محاسبه کنیم. سپس یک روش مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی ارائه می‌کنیم که گرافی را بپذیرد که سود تضمین شده آن بیشینه شود. دقت کنید یک رویداد ممکن را می‌توان با یک تطابق کامل M بین نماینده‌ها و رتبه‌ها نشان داد که از جفت‌های ممنوع استفاده نکرده است. مجموع وزن یال‌هایی که هم در M وجود دارند هم در H^* میزان پولی است که صاحب بازار باید در صورت رخ داد M بپردازد. بنابراین برای پیدا کردن بدترین حالتی که صاحب بازار مجبور به پرداخت بیش‌ترین پول است باید تطابق کامل وزن‌دار بیشینه‌ی که از یال‌های ممنوع استفاده نکرده است را در گراف H^* پیدا

کنیم. این مسئله با پیدا کردن جواب‌های صحیح LP زیر قابل حل است :

$$\max\ (\sum w_{i,j}^{H^*} x_{i,j}) \tag{۷.۷}$$
$$\sum_{j=۱}^{n} x_{i,j} = ۱\ \ \forall i \in U$$
$$\sum_{i=۱}^{n} x_{i,j} = ۱\ \ \forall j \in L$$
$$x_{i,j} = ۰\ \ \forall (i,j) \in F$$
$$x_{i,j} \geq ۰\ \ \forall i \in U, j \in L$$

دوگان LP بالا برنامه‌ریزی خطی زیر خواهد بود :

$$\min\ (\sum \alpha_i + \sum \beta_j) \tag{۸.۷}$$
$$\alpha_i + \beta_j \geq w_{i,j}^{H^*}\ \ \forall (i,j) \notin F$$
$$\alpha_i + \beta_j + \delta_{i,j} \geq w_{i,j}^{H^*}\ \ \forall (i,j) \in F$$

در LP بالا α_i متغیری متناظر با محدودیت‌های نماینده $u_i \in U^G$، β_j متغیری متناظر با محدودیت‌های مکان $l_j \in L^G$ و $\delta_{i,j}$ متغیری متناظر با یال ممنوع (u_i, l_j) است. دقت کنید که تمام متغیرها از جمله $\delta_{i,j}$ می‌توانند هر مقدار بزرگ مثبت یا منفی را قبول کنند. از طرفی متغیر $\delta_{i,j}$ در تابع هدف هیچ نقشی ندارد. بنابراین با قرار دادن $\delta_{i,j} = +\infty$ می‌توان محدودیت‌های به شکل $\alpha_i + \beta_j + \delta_{i,j} \geq w_{i,j}^{H^*}$ را از برنامه‌ریزی خطی ۷.۸ حذف کنیم. در این صورت LP زیر را خواهیم داشت :

$$\min\ (\sum \alpha_i + \sum \beta_j) \tag{۹.۷}$$
$$\alpha_i + \beta_j \geq w_{i,j}^{H^*}\ \ \forall (i,j) \notin F$$

(۱۰.۷)

این برنامه‌ریزی خطی مقادیر α_i و β_j را طوری پیدا می‌کند که برای هر یال مجاز (غیر ممنوع) داشته باشیم : $\alpha_i + \beta_j \geq w_{i,j}^{H^*}$. با توجه به این‌که برنامه‌ریزی خطی ۷.۷ شبیه برنامه‌ریزی خطی برای مسئله پیدا کردن تطابق وزن‌دار بیشینه در گراف است، بنابراین شکاف صحیح آن برابر ۱ است[۵۰]. در نتیجه بهترین جواب برنامه‌ریزی خطی دوگان ۹.۷ برابر بهترین جواب صحیح برنامه‌ریزی خطی ۷.۷ است.

در ادامه الگوریتمی ارائه می‌دهیم که گراف پذیرفته شده بهینه را برای مسئله بیشنیه کردن سود با وجود اطلاعات اضافی را پیدا کند. مانند آن‌چه در لم ۳.۳.۷ ثابت کردیم در این‌جا نیز می‌توان از مقدارهای α_i و β_j برای تعیین $w_{i,j}^{H^*}$ استفاده کرد. در حقیقت می‌توان $w_{i,j}^{H^*}$ را برابر $\min(w_{i,j}^{G^*}, \alpha_i + \beta_j)$ قرار داد. با توجه به

این موضوع می‌توان یک برنامه‌ریزی خطی صحیح نوشت که جواب بهینه‌ی آن گراف پذیرفته شده بهینه را در مسئله شرط‌بندی با اطلاعات اضافی مشخص می‌کند. این ILP بسیار شبیه ۵.۷ ILP است. در این برنامه‌ریزی خطی صحیح نیز می‌خواهیم مقادیر α_i و β_j و یال‌هایی که باید به گراف H اضافه شوند را به طور همزمان تعیین کنیم. ILP زیر برای محاسبه جواب مسئله با وجود اطلاعات مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\max \ (\sum w^G_{i,j,t} y_{i,j,t} - \sum x_i - \sum x'_j) \tag{۱۱.۷}$$

$$\sum_{t=1}^{w^{G*}_{i,j}} y_{i,j,t} = Y_{i,j} \quad \forall i \in U, j \in L$$

$$Y_{i,j} \leq x_i + x'_j \quad \forall (i,j) \notin F$$

$$y_{i,j,t} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in U, j \in L, 1 \leq t \leq k_{ij}$$

در نهایت در قضیه بعدی ثابت می‌کنیم شکاف صحیح برنامه‌ریزی خطی صحیح ۱۱.۷ برابر ۱ است و در نتیجه با حذف محدودیت صحیح بودن متغیرها می‌توان آن را در زمان چندجمله‌ای حل نمود.

قضیه ۶.۳.۷. *مسئله بیشینه کردن سود با اطلاعات اضافی در بازارهای شرط‌بندی با زبان شرط‌بندی یگانه در زمان چندجمله‌ای قابل حل است.*

برهان. مانند اثبات لم ۴.۳.۷ نشان می‌دهیم که ماتریس ضرایب ۱۱.۷ ILP یک ماتریس totally unimodular است. بنابراین اگر محدودیت $y_{i,j,t} \in \{0, 1\}$ را با محدودیت $0 \leq y_{i,j,t} \leq 1$ جایگزین کنیم، یک برنامه‌ریزی خطی داریم که در زمان چندجمله‌ای قابل حل است. در نهایت با توجه به totally unimodular بودن ماتریس ضرایب ۱۱.۷ ILP می‌توان جواب بهینه برنامه ریزی خطی (بدون محدودیت صحیح بودن متغیرها) را به یک جواب بهینه برای برنامه‌ریزی خطی صحیح تبدیل کرد بدون این‌که تابع هدف تغییر کند. از طرفی نیز می‌دانیم جواب بهینه ۱۱.۷ ILP گراف پذیرفته شده بهینه برای مسئله شرط‌بندی را مشخص می‌کند. □

۴.۳.۷ بررسی مسئله در حالت احتمالی

در این بخش مسئله شرط‌بندی روی جایگشت در حالت احتمالی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در این مسئله صاحب بازار یک توزیع احتمالی q در مورد چگونگی رخدادها در دنیای واقعی در اختیار دارد به طوری‌که $\sum_\sigma q(\sigma) = 1$ (جمع بر روی تمام جایگشت‌های ممکن σ بسته شده است). فرض کنید صاحب بازار توزیع احتمالی q را می‌داند. در این صورت حل دو مسئله زیر برای صاحب بازار بسیار جذاب خواهد بود:

- فرض کنید مجموعه I از شرط‌ها داده شده است. هدف این است که زیرمجموعه‌ای از شرط‌ها را پیدا کنیم که امید ریاضی سود صاحب بازار با قبول این زیرمجموعه بیشینه سود.

- فرض کنید مجموعه I از شرط‌ها، یک احتمال مطلوب p و یک سود مورد نظر x داده شده است. هدف این است که زیرمجموعه‌ای از شرط‌ها را پیدا کنیم که با قبول آن‌ها سود صاحب بازار به احتمال p کمتر از x نشود.

در ادامه نشان می‌دهیم که مسئله اول به سادگی قابل حل است ولی مسئله دوم $\#P - Complete$ است.

ابتدا مسئله بیشینه کردن امید ریاضی سود را حل خواهیم نمود. برای هر زیرمجموعه $S \subseteq I$، $E(S)$ را برابر امید ریاضی سود با قبول شرط‌های S در نظر بگیرید. هم‌چنین برای هر شرط $i \in I$، $E(i)$ را برای امید ریاضی سود هنگامی که فقط شرط i را قبول کنیم در نظر بگیرید. با توجه به خطی بودن امید ریاضی داریم : $E(S) = E(\cup_{i \in S_i}) = \sum_{i \in S} E(i)$. در نتیجه برای بیشینه کردن $E(S)$ باید تمام شرط‌هایی مثل i را قبول کنیم اگر و تنها اگر $E(i) > ۰$. پس باید به طریقی $E(i)$ را برای هر شرط محاسبه کنیم. فرض کنید p_i احتمال این باشد که شرط i برنده شود. با توجه به این‌که توزیع احتمالی q داده شده است به راحتی می‌توان p_i را با نمونه‌گیری محاسبه کرد. با توجه به این‌که $E(i) = b_i - p_i$ در نتیجه به راحتی می‌توان تقریبی مناسب از $E(i)$ بدست آورد و شرط‌هایی که $E(i) > ۰$ را قبول کرد. دقت کنید به راه حلی که در بالا ارائه شد برای تمام زبان‌های شرط‌بندی زیرمجموعه‌ای، جفتی و یگانه به درستی عمل می‌کند.

ولی مسئله دوم به این سادگی نیست. در قضیه بعدی ثابت می‌کنیم این مسئله حتی در زبان شرط‌بندی یگانه $\#P - Complete$ است.

قضیه ۷.۳.۷. *توزیع احتمالی q، مجموعه I از شرط‌ها، یک احتمال مطلوب p و یک سود مورد نظر x داده شده است. در این صورت مسئله مقابل $\#P - Complete$ است: «آیا زیرمجموعه‌ای از شرط‌ها در زبان شرط‌بندی یگانه وجود دارد که با قبول آن‌ها سود صاحب بازار به احتمال p کمتر از x نشود؟»*

برهان. برای اثبات سختی این مسئله، از تبدیل مسئله‌ی شمارش تعداد تطابق‌های کامل در گراف دوبخشی به مسئله موردنظر کمک خواهیم گرفت. فرض کنید گراف دوبخشی G و عدد k داده شده است و مسئله این است: «آیا گراف G حداقل k تا تطابق کامل دارد؟» در ادامه این مسئله را با کمک مسئله شرط‌بندی حل می‌کنیم. فرض کنید هر یال G بین دو مجموعه X و Y قرار دارد که $|X| = |Y| = n$. برای هر رأس $x_i \in X$ یک نماینده a_i در مسئله شرط‌بندی در نظر بگیرید. برای هر یال $(x_i, y_j) \in G$ یک شرط به صورت $(۲, a_i, j)$ به مسئله شرط‌بندی اضافه می‌کنیم. در حقیقت یک فرد برای این شرط ۲ تومان می‌پردازد و در صورتی که نماینده a_i در مکان j-ام قرار بگیرد ۱ تومان دریافت می‌کند. مقدار x را برابر $۲E - n + ۱$ قرار می‌دهیم، که E تعداد یال‌های گراف G است. هم‌چنین مقدار p رابرابر $۱ - \frac{k-۱}{n!}$ تعریف می‌کنیم. بدیهی است که در جواب بهینه تمام شرط‌ها را می‌پذیریم و در ابتدا $۲E$ تومان پول دریافت می‌کنیم. مسئله در این حالت این است که آیا سود به احتمال $۱ - \frac{k-۱}{n!}$ بیشتر یا مساوی $۲E - n + ۱$ می‌شود. این مسئله معادل این است که آیا گراف G تعداد

k تطابق کامل دارد. بنابراین با حل مسئله شرط‌بندی، می‌توان تعداد تطابق‌های کامل یک گراف دوبخشی را شمرد. از طرفی می‌دانیم مسئله شمارش تعداد تطابق‌های کامل یک گراف دوبخشی کامل $\#P-Complete$ است [۴۰]. $\square$

۴.۷ کارهای آتی

در این فصل مسئله بیشینه کردن سود صاحب بازار در بازارهای شرط‌بندی با زبان شرط‌بندی یگانه و زیرمجموعه‌ای را بررسی کردیم. هم‌چنین بازار با زمان شرط‌بندی یگانه را زمانی که صاحب بازار اطلاعاتی اضافه در اختیار دارد را مورد مطالعه قرار دادیم. در حقیقت نشان داده شد که صاحب بازار چگونه می‌تواند از اطلاعات خود برای بیشینه کردن سود بهره ببرد. به بیانی دقیق‌تر، ثابت کردیم ارائه الگوریتم تقریبی برای بیشینه کردن سود در بازار با زبان شرط‌بندی زیرمجموعه‌ای غیر ممکن است. از طرفی دیگر، الگوریتمی چندجمله‌ای بر پایه برنامه‌ریزی خطی ارائه کردیم که مسئله را با زبان شرط‌بندی یگانه و حتی با وجود اطلاعات اضافی حل می‌کند.

استفاده از بازارهای پیش‌بینی برای تخمین وقایع در آینده بسیار مفید است. در حقیقت در این بازارها بیان نظرات افراد به سود و زیان آن‌ها بستگی دارد. به همین دلیل افراد در ارائه نظرات خود دقت می‌کنند و اطلاعاتی که از این طریق بدست می‌آید قابل اعتمادتر از اطلاعاتی است که برای مثال از یک نظرسنجی به دست می‌آید. از طرفی این بازارها محیطی را فراهم می‌کنند که افراد مختلف بتوانند در بازار مشارکت داشته باشند و در نتیجه داده‌های گوناگونی که نزد افراد مختلف وجود دارد در این بازارها وجود دارند و تحلیل آن‌ها برای پیش‌بینی آینده بسیار مفید است.

بازارهای شرط‌بندی بر روی جایگشت یک نوع از بازارهای پیش‌بینی است که افراد در آن بر روی رتبه‌بندی یک سری نماینده شرط‌بندی می‌کنند. همان‌طور که دیدیم زبان شرط‌بندی که بیان شرط‌بندی‌های مجاز است در کیفیت و چگونگی بازارهای شرط‌بندی بر روی جایگشت تأثیرگذار است. در حقیقت زبان شرط‌بندی است که تعیین می‌کنند افراد چگونه با توجه به اطلاعات خصوصی خود در شرط‌بندی شرکت کنند و محدودیت‌هایی برای افراد در بیان نظرات اعمال می‌کند. هر چه دست افراد در بیان نظرات خود بازتر باشد و زبان محدودیت‌های کمتری به وجود آورد مسئله جفت کردن شرط‌ها که صاحب بازار با آن مواجه است مشکل‌تر خواهد شد. در حقیقت زبان شرط‌بندی از طرفی باید قدرتمند و کم‌محدودیت باشد که افراد بتوانند نظرات خود را در آن بیان کنند و از طرفی باید مسئله جفت‌کردن در آن قابل حل باشد.

در کارهای قبلی زبان‌های شرط‌بندی زیرمجموعه‌ای و جفتی مطرح گردید و نتایجی در آن‌ها ثابت گردید. در اغلب موارد نشان داده شده که مسئله جفت کردن در این زبان‌ها قابل حل در زمان چند جمله‌ای نمی‌باشد. در این رساله زبان شرط‌بندی یگانه را مطرح کردیم و نشان دادیم مسئله جفت کردن در حالت‌ها مختلف در

زمان چند جمله‌ای قابل حل است. یک مسئله جالب که در ادامه رساله به آن خواهیم پرداخت پیدا کردن بررسی زبان‌های شرط‌بندی جدید است که هم در عمل قابل استفاده باشد و هم این‌که هم‌چنان مسئله جفت‌کردن در آن در زمان چندجمله‌ای قابل حل باشد. زبان‌های شرط‌بندی که در زیر بیان می‌کنیم برای بررسی بسیار مناسب به نظر می‌رسند و در عمل هم استفاده از این زبان‌ها در بازارهای شرط‌بندی روی جایگشت معقول به نظر می‌رسد. این زبان‌های عبارت‌اند از :

۱. زبانی را متصور شود که افراد می‌توانند در آن بیان کنند رتبه یک نماینده از یک رتبه خاص بهتر خواهد شد. برای مثال می‌توان گفت : «رتبه تیم رئال مادرید در لیگ فوتبال اسپانیا بهتر از سوم می‌شود». به بیانی دقیق‌تر هر شرط i در این زبان با سه تایی (b_i, x_i, y_i) نمایش داده می‌شود که b_i ارزش شرط است و x_i یک نماینده و y_i یک رتبه خاص است. شخصی که شرط را بسته ۱ تومان دریافت می‌کند اگر در نهایت نماینده x_i در مکان y_i یا بهتر قرار گیرد و در غیر این صورت پولی دریافت نمی‌کند.

۲. این زبان حالت کلی‌تر زبانی است که در بالا مطرح گردید. در این زبان هر شخص می‌توانند به دو صورت شرط‌بندی کند :

- رتبه یک نماینده از یک رتبه خاص بهتر می‌شود. به عبارت دیگر هر شرط i با سه تایی (b_i, x_i, y_i) نمایش داده می‌شود که b_i ارزش شرط است و x_i یک نماینده و y_i یک رتبه خاص است. شخصی که شرط را بسته ۱ تومان دریافت می‌کند اگر در نهایت نماینده x_i در مکان y_i یا بهتر قرار گیرد و در غیر این صورت پولی دریافت نمی‌کند.
- رتبه یک نماینده از یک رتبه خاص بدتر می‌شود. به عبارت دیگر هر شرط i با سه تایی (b_i, x_i, y_i) نمایش داده می‌شود که b_i ارزش شرط است و x_i یک نماینده و y_i یک رتبه خاص است. شخصی که شرط را بسته ۱ تومان دریافت می‌کند اگر در نهایت نماینده x_i در مکان y_i یا بدتر قرار گیرد و در غیر این صورت پولی دریافت نمی‌کند.

دقت کنید که در این زبان هر دو نوع شرط وجود دارد و افراد می‌توانند بر روی این‌که رتبه یک نماینده از یک رتبه خاص بهتر یا بدتر می‌شود شرط‌بندی کنند.

۳. این زبان که می‌توان آن را زبان شرط‌بندی بازه‌ای نامید به این صورت است که هر فرد می‌تواند بر روی این‌که رتبه یک نماینده در بازه‌ی خاص قرار گیرد شرط‌بندی کند. دقت کنید که این زبان حالت کلی‌تر دو زبان بالایی است. هر شرط i با چهارتایی $(b_i, x_i, y_{i,۱}, y_{i,۲})$ بیان می‌شود که b_i ارزش شرط است و x_i یک نماینده و $y_{i,۱}$ و $y_{i,۲}$ دو رتبه خاص است. شخصی که شرط را بسته ۱ تومان دریافت می‌کند اگر در نهایت رتبه نماینده x_i در بازه‌ی $[y_{i,۱}, y_{i,۲}]$ قرار گیرد و در غیر این صورت پولی دریافت نمی‌کند.

مسئله دیگری که بررسی آن در بازارهای شرط‌بندی روی جایگشت جالب به نظر می‌رسد این است که افراد چگونه سود خود را در این بازارها به صورت هوشمند بیشتر کنند. به بیان دیگر آیا افراد با توجه به شرایط بازار و اطلاع از نوع تصمیم‌گیری صاحب بازار می‌توانند به صورت هوشمندانه در بازار شرط‌بندی شرکت کنند به طوری که سود خود را بیشینه کنند. فرض کنید که یک شخص می‌خواهد در بازار شرط‌بندی شرکت کند و می‌داند که صاحب بازار به دنبال بیشینه کردن سود خود است. در حقیقت می‌داند که صاحب بازار در صورتی که محتاط باشد شرط‌هایی را قبول می‌کند که سود تضمین شده‌اش بیشینه شود. در این صورت ممکن است فرد بتواند در این شرایط و با تحلیل هوشمندانه بازار طوری شرط‌بندی کند که شرط‌ها بر خلاف نظر شخصی خودش باشد ولی با این وجود سودش بیشینه شود. بررسی این مسئله نیز در ادامه‌ی کارهای این رساله جالب به نظر می‌رسد.

فصل ۸

مقاله‌های حاصل از این تحقیق

در این فصل لیست مقاله‌های حاصل از تحقیقات انجام شده در این رساله آمده است. ابتدا مقاله‌های چاپ شده در کنفرانس‌ها و مجله‌ها را معرفی می‌کنیم. سپس لیست مقاله‌های فرستاده شده به مجله‌ها آمده است. در نهایت لیست مقاله‌های مرتبط به این رساله که در متن رساله نیامده‌اند، مشاهده می‌شود.

۱.۸ مقاله‌های چاپ شده

- M. Ghodsi, H. Mahini, V. S. Mirrokni,M. Zadimoghaddam. *Permutation betting market : Singleton betting with extra information*. In the Proceedings of Ninth ACM Conference on Electronic Commerce, 2008.
- M. Ghodsi, H. Mahini, V. S. Mirrokni, M. Zadimoghaddam. *Permutation betting market : Singleton betting with extra information*. Algorithmica, December, 2009.
- N. A. Anari, S. Ehsani, M. Ghodsi, N. Haghpanah, N. Immorlica, H. Mahini, V. S. Mirrokni. *Equilibrium Pricing with Positive Externalities*. The Workshop on Algorithmic Game Theory: Dynamics and Convergence in Distributed Systems, Bordeaux, 2010. In the Proceedings of sixth Workshop on Internet and Network Economics (WINE), Stanford, USA, 2010.
- H. Akhlaghpour, M. Ghodsi, N. Haghpanah, H. Mahini, V. S. Mirrokni, A. Nikzad. *Iterative Pricing with Positive Network Externalities* The fifth Workshop on Ad Auc-

tions, Stanford, 2009. In the Proceedings of sixth Workshop on Internet and Network Economics (WINE), Stanford, USA, 2010.

۲.۸ مقاله‌های ارسال شده

- N. A. Anari, S. Ehsani, M. Ghodsi, N. Haghpanah, N. Immorlica, H. Mahini, V. S. Mirrokni. *Equilibrium Pricing with Positive Externalities*. Submitted to Game and Economic Behavior Journal, 2010.
- H. Akhlaghpour, M. Ghodsi, N. Haghpanah, H. Mahini, V. S. Mirrokni, A. Nikzad. *Iterative Pricing with Positive Network Externalities* Submitted to Algorithmica Journal, 2010.
- S. Ehsani, M. Ghodsi, A. Khajenejad, H. Mahini, A. Nikzad. *Optimal Online Pricing with Network Externalities*. Submitted to Information Processing Letters, 2010.
- H. Ghasemie, M. Ghodsi, H. Mahini, M. A. Safari. *Pricing in Population Games with Semi-Rational Agents*. Submitted to Theoretical Computer Science Journal, 2010.

۳.۸ مقاله‌های مرتبط

- E. Demaine, M.T. Hajiaghayi, H. Mahini, M. Zadimoghadam. *The Price of Anarchy in Network Creation Games*. In proceedings of the 26th Annual ACM SIGACT-SIGOPS Symposium on Principles of Distributed Computing (PODC), Portland, OR, August 12-15, 2007.
- E. Demaine, M.T. Hajiaghayi, H. Mahini, M. Zadimoghadam. *The Price of Anarchy in Cooperative Network Creation Games*. In proceedings of the 26th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS), pages 301-312, 2009.

- E. Demaine, M.T. Hajiaghayi, H. Mahini, M. Zadimoghadam. *The Price of Anarchy in Network Creation Games*. To appear in ACM Transactions on Algorithms.

- E. Demaine, M.T. Hajiaghayi, H. Mahini, M. Zadimoghadam. *The Price of Anarchy in Cooperative Network Creation Games*. ACM SIGecom Exchanges, volume 8, number 2, December, 2009.

مراجع

[۱] احمد خواجه‌نژاد. *قیمت‌گذاری در شبکه‌های اجتماعی*. پایان‌نامه کارشناسی، دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه صنعتی شریف، شهریور ۱۳۸۹.

[۲] حامد قاسمیه. *مطالعه شبکه‌های پیچیده و انتشار تأثیرات*. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف، دی ۱۳۸۹.

[3] S. Albers, S. Eilts, E. Even-Dar, Y. Mansour, L. Roditty. *On Nash equilibria for a network creation game*. In Proceedings of the 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pages 89-98, Miami, Florida, 2006.

[4] A. Barabasi, R. Albert. *Emergence of scaling in random networks*. Science, Vol. 286, No. 509, 1999.

[5] H. Akhlaghpour, M. Ghodsi, N. Haghpanah, H. Mahini, V. S. Mirrokni, A. Nikzad. *Iterative Pricing with Positive Network Externalities* The fifth Workshop on Ad Auctions, Stanford, 2009. In the Proceedings of sixth Workshop on Internet and Network Economics (WINE), Stanford, USA, 2010.

[6] N. A. Anari, S. Ehsani, M. Ghodsi, N. Haghpanah, N. Immorlica, H. Mahini, V. S. Mirrokni. *Equilibrium Pricing with Positive Externalities*. The Workshop on Algorithmic Game Theory: Dynamics and Convergence in Distributed Systems, Bordeaux, 2010. In the Proceedings of sixth Workshop on Internet and Network Economics (WINE), Stanford, USA, 2010.

[7] B. Bensaid, J.P. Lesne.*Dynamic monopoly pricing with network externalities* . International Journal of Industrial Organization, Vol 14, No. 6, pp. 837–855, October 1996.

[8] J. E. Berg, R. Forsythe, F. D. Nelson, T. A.Rietz. *Results from a dozen years of election futures markets research*. In C. A. Plott V. Smith, editors, Handbook of Experimental Economic Results (forthcoming), 2001.

[9] A. Borodin, R. El-Yaniv. *Online computation and competitive analysis*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1998.

[10] L. Cabral, D. Salant, G Woroch. *Monopoly pricing with network externalities*. Industrial Organization 9411003, EconWPA, November 1994.

[11] O. Candogan, K. Bimpikis, A. Ozdaglar. *Optimal pricing in the presence of local network effects*. In the Proceeding of Sixth Workshop on Internet and Network Economics, 2010.

[12] Y. Chen, L. Fortnow, E. Nikolova, D. Pennock. *Betting on permutations*. In the Proceedings of Eighth ACM Conference on Electronic Commerce, 2007.

[13] W. Chen, P. Lu, X. Sun, Y. Wang, Z. A. Zhu. *Pricing in social networks: Equilibrium and revenue maximization*. CoRR, abs/1007.1501, 2010

[14] E. Demaine, M.T. Hajiaghayi, H. Mahini, M. Zadimoghadam. *The Price of Anarchy in Network Creation Games*. In proceedings of the 26th Annual ACM SIGACT-SIGOPS Symposium on Principles of Distributed Computing (PODC), Portland, OR, August 12-15, 2007.

[15] E. Demaine, M.T. Hajiaghayi, H. Mahini, M. Zadimoghadam. *The Price of Anarchy in Cooperative Network Creation Games*. In proceedings of the 26th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS), pages 301-312, 2009.

[16] E. Demaine, M.T. Hajiaghayi, H. Mahini, M. Zadimoghadam. *The Price of Anarchy in Network Creation Games*. To appear in ACM Transactions on Algorithms.

[17] E. Demaine, M.T. Hajiaghayi, H. Mahini, M. Zadimoghadam. *The Price of Anarchy in Cooperative Network Creation Games*. ACM SIGecom Exchanges, volume 8, number 2, December, 2009.

[18] P. Domingos, M. Richardson. *Mining the network value of customers*. In the Proceedings of the seventh ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining, pp. 57-66, New York, NY, USA, 2001.

[19] A. Fabrikant, A. Luthra, E. Maneva, C. H. Papadimitriou, S. Shenker. *On a network creation game*. In Proceedings of the 22nd Annual Symposium on Principles of Distributed Computing, pages 347-351, Boston, Massachusetts, 2003.

[20] J. Farrell, G. Saloner. *Standardization, compatibility, and innovation*. RAND Journal of Economics, Vol. 16, No. 1, pp. 70–83, Spring 1985.

[21] R. Forsythe, T. A. Rietz, T. W. Ross. *Wishes, expectations, and actions: A survey on price formation in election stock markets*. Journal of Economic Behavior and Organization, Vol. 39, pp. 83-110, 1999.

[22] L. Fortnow, J. Kilian, D. Pennock, M. P. Wellman. *Betting boolean-style: A framework for trading in securities based on logical formulas*. Decision Support Systems, Vol. 39, No. 1, pp. 87-104, 2004.

[23] M. Ghodsi, H. Mahini, V. S. Mirrokni, M. Zadimoghaddam. *Permutation betting market : Singleton betting with extra information*. In the Proceedings of Ninth ACM Conference on Electronic Commerce, 2008.

[24] M. Ghodsi, H. Mahini, V. S. Mirrokni, M. Zadimoghaddam. *Permutation betting market : Singleton betting with extra information*. Algorithmica, December, 2009.

[25] G. Ellison. *Learning, Local Interaction, and Coordination*. Econometrica, Vol. 61, No. 5, pp. 1047-1071, September 1993.

[26] J. Hartline, V. S. Mirrokni, M. Sundararajan. *Optimal marketing strategies over social networks*. In the Proceeding of Seventeenth World Wide Web Conference, pp. 189–198, 2008.

[27] I. Heller, C. B. Tompkins. *An extension of a theorem of Dantzig's*. In Linear Inequalities and Related Systems (H.W. Kuhn, A.W. Tucker Eds.), Princeton University Press, pp. 247-254, 1956.

[28] M. R. Garey, D. S. Johnson. *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1990.

[29] N. Immorlica, J. Kleinberg, M. Mahdian, T. Wexler. *The role of compatibility in the diffusion of technologies through social networks*. In the Proceedings of eighth ACM Conference on Electronic Commerce, 2007.

[30] S. Kakutani, *A generalization of brouwers fixed point theorem*. Duke Mathematical Journal, Vol. 8, pp. 457-459, 1941.

[31] M. Kandori, G. J. Mailath, R. Rob. *Learning, Mutation, and Long Run Equilibria in Games* Econometrica, Vol. 61, No. 1, pp. 29-56, January 1993.

[32] D. Kempe, J. Kleinberg, E. Tardos. *Maximizing the spread of influence through a social network*. In the Proceedings of the ninth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining, 2003.

[33] J. Kleinberg. *Cascading behavior in networks: algorithmic and economic issues*. Cambridge University Press, 2007.

[34] A. Mas-Colell, *On a theorem of schmeidler*. Journal of Mathematical Economics, Vol. 13, pp. 201-206, 1984.

[35] J. Meattle. *Weblog:* http://blog.compete.com/2007/01/25/top-20-websites-ranked-by-time-spent/.

[36] A. Montanari, A. Saberi. *Convergence to Equilibrium in Local Interaction Games*, In the Proceeding of 50th Foundation of Computer Science, pp. 303-312, 2009.

[37] E. Mossel, S. Roch. *On the submodularity of influence in social networks*. In STOC '07, pp. 128–134, New York, NY, USA, 2007.

[38] R. L. Oliver, M. Shor. *Digital redemption of coupons: Satisfying and dissatisfying eects of promotion codes*. Journal of Product and Brand Management, Vol. 12, pp. 121–134, 2003.

[39] E. Oswald. *Betanews article:* http://www.betanews.com/article/GoogleBuyMySpaceAdsfor900m/1155050350.

[40] C. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994.

[41] C. Papadimitriou, K. Steiglitz. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. N.Y. : Dover Publications, Inc., 1998.

[42] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, 3rd ed.* McGraw-Hill, 1991.

[43] D. M. Pennock, S. Lawrence, C. L. Giles, F. A. Nielsen. *The real power of artificial markets*. Science, Vol. 291, pp. 987-988, February 2002.

[44] C. Plott, S. Sunder. *Rational expectations and the aggregation of diverse information in laboratory security markets*. Econometrica, Vol. 56, pp. 1085-1118, 1988.

[45] C. Plott, S. Sunder. *Efficiency of experimental security markets with insider information: An application of rational expectations models*. Journal of Political Economy, Vol. 90, pp. 663-698, 1982.

[46] P. Saaskilahti. *Monopoly pricing of social goods*. MPRA Paper 3526, University Library of Munich, Germany, 2007.

[47] W. H. Sandholm, *Large population games*. Journal of Economic Theory, Vol. 144, No. 4, pp. 1710-1725, 2009.

[48] W. H. Sandholm, *Population games and Evolutionary Dynamics*. The MIT Press, 2011.

[49] A. Schrijver. *Total dual integrality of matching forest constraints*. Combinatorica, Vol. 20, pp. 575-588, 2000.

[50] A. Schrijver. *Combinatorial Optimization - Polyhedra and Efficiency*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[51] T. Weber. *BBC News article:* `http://news.bbc.co.uk/1/hi/business/6305957.stm?lsf`.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Approximation Algorithm .... الگوریتم تقریبی
Best Response .... بهترین پاسخ
Deterministic Algroithm .... الگوریتم قطعی
Dominant Strategy .... استراتژی غالب
Dynamic Programming .... برنامه‌ریزی پویا
Equilibrium .... تعادل
Fixed Point .... نقطه ثابت
Game Theory .... نظریه‌ی بازی‌ها
Independent Cascade Model .... مدل انتشار مستقل
Independent Set .... مجموعه مستقل
Influence Model .... مدل اثرگذاری
Influence Model .... مدل اثرگذاری
Integrality Gap .... شکاف صحیح
Linear Programming .... برنامه‌ریزی خطی
Linear Threshold Model .... مدل حد آستانه‌ی خطی
Markov Chain .... زنجیره مارکوف
Mixed Strategy .... استراتژی ترکیبی
Monotone .... یکنوا
Monotone Hazard Rate .... یکنوا بودن میزان مخاطره
Myopic .... نزدیک‌بین
Nash Equilibrium .... تعادل نش
Network Flow .... شبکه شار
Population Game .... بازی جمعیتی
Potential Game .... بازی پتانسیلی
Prediction Markets .... بازارهای پیش‌بینی
Preferential Attachment .... اتصال ترجیحی
Pricing .... قیمت‌گذاری
Profit .... سود
Pure Strategy .... استراتژی خالص
Randomized Algroithm .... الگوریتم تصادفی
Rectangular Covering .... پوشش مستطیلی
Sampling .... نمونه‌برداری
Social Networks .... شبکه‌های اجتماعی
Social Welfare .... رفاه اجتماعی
Stationary State .... حالت ایستا
Submodular .... زیرپیمانه‌ای
Uniform .... یکنواخت

بازاریابی شفاهی .... Viral Marketing
تطابق وزن‌دار .... Weighted Matching

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اتصال ترجیحی .... Preferential Attachment
استراتژی ترکیبی .... Mixed Strategy
استراتژی خالص .... Pure Strategy
استراتژی غالب .... Dominant Strategy
الگوریتم تصادفی .... Randomized Algroithm
الگوریتم تقریبی .... Approximation Algorithm
الگوریتم قطعی .... Deterministic Algroithm
بازارهای پیش‌بینی .... Prediction Markets
بازاریابی شفاهی .... Viral Marketing
بازی پتانسیلی .... Potential Game
بازی جمعیتی .... Population Game
برنامه‌ریزی پویا .... Dynamic Programming
برنامه‌ریزی خطی .... Linear Programming
بهترین پاسخ .... Best Response
پوشش مستطیلی .... Rectangular Covering
تطابق وزن‌دار .... Weighted Matching
تعادل .... Equilibrium
تعادل نش .... Nash Equilibrium
توابع مجموعه‌ای .... Set Functions
حالت ایستا .... Stationary State
رفاه اجتماعی .... Social Welfare
زنجیره مارکوف .... Markov Chain
زیرپیمانه‌ای .... Submodular
سود .... Profit
شبکه شار .... Network Flow
شبکه‌های اجتماعی .... Social Networks
شکاف صحیح .... Integrality Gap
قیمت‌گذاری .... Pricing
مجموعه مستقل .... Independent Set
مدل اثرگذاری .... Influence Model
مدل انتشار مستقل .... Independent Cascade Model
مدل حد آستانه‌ی خطی .... Linear Threshold Model
نزدیک‌بین .... Myopic
نظریه‌ی بازی‌ها .... Game Theory
نمونه‌برداری .... Sampling
نقطه ثابت .... Fixed Point
یکنوا .... Monotone

یکنوا بودن میزان مخاطره .... Monotone Hazard Rate
یکنواخت .... Uniform

Abstract

This thesis focuses on design of various strategies to maximize sellers' profits in different social markets where agents' behaviors and decisions are greatly influenced by their network friends. We introduce different social networks with various properties and present models to analyze the agents' behaviors. We also study different pricing strategies for each model and design algorithms for sellers in order to maximize their profits.

Furthermore, we study the prediction markets where agents with different points of views participate in the market. Each agent invests in the market with respect to her information. We propose a model for these markets which are both predictable and applicable. In order to maximize the market maker's profit, we present algorithms for her to find best agents for negotiation.

In summary, this thesis studies the profit maximization problem in: 1) Markets with public price and myopic buyers, 2) Markets when buyers arrive online and seller should offer each buyer a price, 3) Markets with public price and strategic buyers, 4) Markets with public price and semi-strategic buyers; In this market buyers do not have complete information about the market and may made a noisy decision, and 5) Prediction markets with a simple language for investing in the market.

Keywords: *Algorithm, Game Theory, Profit Maximization, Market, Social Networks, Optimization*

Sharif University of Technology
Computer Engineering Department

PhD Thesis

Software Engineering

Topic

Seller's Profit Maximization in Social Markets

By

Hamid Mahini

Supervisor

Mohammad Ghodsi

February 2011