



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دکتری
گرایش ریاضی محض

عنوان

مسایل وارون پراکندگی موج

نگارش

مرتضی فتوحی فیروزآباد

استاد راهنما

دکتر محمود حصارکی

دی ۱۳۸۳

به نام خداوند بخشنده مهربان

فهرست

۱ پیش‌گفتار ۱

۱ مقدمه: مسایل وارون

۳	جاذبه	۱-۱
۴	رسانایی	۲-۱
۵	تبدیل رادون	۳-۱
۷	شنیدن شکل طبل	۴-۱
۸	بازشناسی تصویر	۵-۱
۹	مسائل بدرفتار	۶-۱
۱۱	روش‌های منظم‌سازی	۷-۱
۱۳	تجزیه مقادیر تکین	۱-۷-۱
۱۶	منظم‌سازی تیخونوف	۲-۷-۱

۲ مسأله پراکندگی موج

۱۹	امواج صوت	۱-۲
۲۷	وجود و یکتایی	۲-۲
۳۷	امواج الکترومغناطیس	۳-۲

۳ یکتایی در مسایل وارون پراکندگی موج

۴۳ یکتایی در بازتابی مانع نرم - صوت	۱-۳
۴۷ یکتایی در بازتابی مانع سخت - صوت	۲-۳
۴۷ یکتایی در بازتابی مانع به طور موضعی پوشیده شده	۳-۳

۴ پراکندگی موج در محیط ناهمگن

۵۶ مسأله مستقیم پراکندگی موج صوت در محیط ناهمگن	۱-۴
۵۷ مسأله وارون پراکندگی موج صوت در محیط ناهمگن	۲-۴
۵۹ پراکندگی امواج الکترومغناطیس در محیط ناهمگن	۳-۴

۵ روشهای بازتابی

۶۳ روش نیوتن	۱-۵
۶۶ روش منبع نقطه‌ای	۲-۵
۷۳ روش نمونه برداری خطی	۳-۵
۷۴ روش نمونه برداری خطی برای موانع نرم - صوت	۱-۳-۵
۷۸ روش نمونه برداری خطی برای موانع به طور موضعی پوشیده شده	۲-۳-۵
۸۰ روش منابع تکین	۴-۵
۸۰ تخمین منابع نقطه‌ای	۱-۴-۵
۸۴ تکینگی $\Phi^*(z, z)$ روی مرز	۲-۴-۵
۹۴ یکتایی مسأله وارون	۳-۴-۵
۹۵ بازتابی شکل مانع	۴-۴-۵
۹۹ مراجع	

پیش گفتار

مسائل وارون پراکندگی امواج از سالهای دور مورد توجه بوده است. کاربردهای فراوان آن در فناوریهای چون رادارها، ماهواره‌ها، اکتشافات زیر زمینی و عکسبرداریهای پزشکی باعث شده است که این شاخه از ریاضیات به فراموشی سپرده نشود.

در این نوشته در ابتدا برای آشنایی یا ماهیت مسائل وارون چند نمونه از این مسائل معرفی شده‌اند. سپس به مشکل عمومی مسائل وارون که در هنگام کاربرد بروز پیدا می‌کند، پرداخته می‌شود. این مشکل به عدم دقت ابزارهای اندازه‌گیری و ناگزیر بودن از استفاده آنها در محاسبات دقیق ریاضی برمی‌گردد. در این قسمت روشهای منظم‌سازی جواب به عنوان یک راهکار ارائه می‌شود.

در ادامه در فصل ۲ مدل ریاضی پراکندگی امواج صوت و الکترومغناطیس مطرح می‌شود. در مسأله مستقیم پراکندگی موج با شناخت مانع و خواص فیزیکی آن که در شیوه پراکندگی موج تأثیر دارد، سعی در محاسبه میدان امواج پراکنده شده می‌گردد. در این قسمت وجود و یکتایی جواب بررسی می‌شود.

مسأله وارون، پیدا کردن شکل مانع از روی اطلاعات مربوط به میدان پراکنده شده امواج در فواصل بسیار دور است. اولین سؤال در این راستا یکتایی بازیابی مانع می‌باشد، که در فصل ۳ به آن پاسخ داده شده است. همچنین در فصل ۴ مدل ریاضی پراکندگی امواج در محیط‌های ناهمگن و بعضی نتایج به دست آمده در آن حوزه بیان می‌شود.

در پایان چهار الگوریتم بازیابی شکل مانع ارائه می‌گردد. در این میان دو روش نمونه برداری خطی و منابع تکین اخیراً بیش از بقیه مورد توجه قرار گرفته‌اند. دلیل آن برای این است که این روشها به اطلاعات اولیه کمتری نسبت به روشهای دیگر نیاز دارند. به عنوان مثال در دو روش دیگری که ارائه شده است، دانستن خواص فیزیکی مانع لازم است. این مطلب به خصوص در کاربردهای نظامی در شناسایی اشیاء دشمن که اطلاع دقیقی از آنه در دست نیست، پراهمیت ظاهر می‌شود.

مقدمه: مسایل وارون

در این فصل برای آشنایی مسایل وارون چند مثال از این گونه مسایل و کاربردهای آنها ارائه می‌گردد. در پایان نیز به مشکلی که عموم مسایل وارون با آن مواجه هستند، بدرفتاری معادلات، اشاره شده و یکی از راه‌های برخورد با این مشکل مطرح می‌شود.

دو مسأله را وارون یکدیگر گویند، هرگاه صورت‌بندی یکی به اطلاعاتی از مسأله دیگر نیاز داشته باشد. اما همواره یکی از این دو مسأله قبل از دیگری مورد بررسی قرار می‌گیرد و به آن مسأله مستقیم^۱ گفته می‌شود. در مقابل مسأله دیگر را وارون آن می‌گویند. تفاوت عمده این دو مسأله از آنجا ناشی می‌شود که در مورد مسأله مستقیم معمولاً اطلاعات خوبی در دست است. مثلاً جواب هر مسأله به طور یکتا از روی داده‌های اولیه تعیین می‌گردد و این جواب پایدار است. (بدین معنا که اختلال کوچک در داده‌های اولیه تغییر چندانی در جواب مسأله ایجاد نمی‌کند.) این خاصیت جوابها، حداقل انتظاری است که در بررسی مدل‌های فیزیکی از جواب مسأله داریم. بر همین اساس داشتن خواص وجود، یکتایی و پایداری جواب برای یک مسأله به خوش رفتاری آن مسأله تعبیر می‌شود و اگر یکی از این سه خاصیت برقرار نباشد، مسأله را بدرفتار گویند. معمول مسایل وارون که تاکنون پراهمیت ظاهر شده‌اند، بدرفتار می‌باشند، و همین مطلب باعث تقدم بررسی مسایل مستقیم بر مسایل وارون شده است.

^۱ direct problem

با بیان صورت مسأله مستقیم، مسأله وارون متناظر آن این گونه مطرح می‌شود که از روی جواب مسأله مستقیم یکی از داده‌های اولیه را تعیین کنیم. در کنار بحث یکتایی جواب در هر مسأله وارون، ارایه الگوریتمی که به وسیله آن بتوان به جواب وارون رسید نیز اهمیت به سزایی دارد. در این مثال‌ها فقط به معرفی اجمالی مسایل و بیان صورت مسأله وارون پرداخته شده است. برای اطلاع بیشتر و دستاوردهای کنونی در هر قسمت به مراجع اشاره شده در هر بخش مراجعه شود.

۱-۱ جاذبه

اگر f تابع چگالی جسم Ω باشد، میدان جاذبه تولید شده توسط آن در معادله پواسون^۱ همراه با شرط حدی زیر صدق می‌کند:

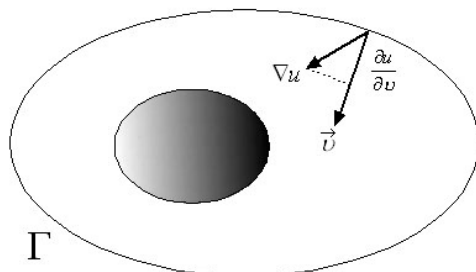
$$-\Delta u = f \quad \text{در } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$$

این شرط حدی از این حقیقت فیزیکی نتیجه شده است که جاذبه در فاصله بسیار دور از جسم صفر است. در اینجا مسأله مستقیم پیدا کردن میدان جاذبه u از تابع چگالی f است. این مسأله برای هر تابع انتگرال‌پذیر f و حتی برای هر تابع توزیع که خارج Ω صفر باشد دارای جواب یکتا است و این جواب پایدار است.

مسأله وارون متناظر، پیدا کردن تابع چگالی f با فرض دانستن نیروی جاذبه ∇u روی رویه Γ می‌باشد، که Γ قسمتی از مرز ناحیه‌ای است که Ω را در بر دارد. کاربرد این مسأله در زمین‌شناسی دارداست و به وسیله آن و با محاسبه نیروی جاذبه می‌توان درون زمین را شناسایی کرد. متأسفانه یکتایی جواب این مسأله وارون برقرار نمی‌باشد و نمی‌توان درون زمین را به طور منحصر به فردی بازیابی کرد. ولی با این حال اگر به دنبال تابع f باشیم که خواص معینی دارد مثلاً این که تابع f هارمونیک باشد، یا این که فقط به یک متغیر وابسته باشد و یا این که از نوع توابع مشخصه $\chi(D)$ باشد که ناحیه D درون Ω قرار دارد، می‌توان آن را به طور یکتا تعیین کرد، [۲۰].

^۱ Poisson



شکل ۱-۱:

علاوه بر تعیین چگالی زمین از روی محاسبه میدان جاذبه، این مسأله در هدایت موشک و هواپیما نیز به کار می‌رود. برای این منظور نیاز به این است که مقدار u در نزدیکی سطح زمین مشخص باشد. به همین منظور میدان جاذبه را به وسیله ماهواره‌ها در دور دست محاسبه کرده و با استفاده از این مسأله وارون تابع f که این میدان را تولید می‌کند، تعیین می‌گردد. با محاسبه f به راحتی می‌توان میدان را در هر نقطه دلخواه خارج سطح زمین محاسبه کرد. برای اطلاعات بیشتر و نتایج به دست آمده به مراجع [۱۸]، [۲۰]، [۲۲] و [۴۵] مراجعه شود.

۲-۱ رسانایی

فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ناحیه‌ای کراندار با مرز هموار باشد و تابع مثبت γ رسانایی Ω را نشان دهد. پتانسیل u در Ω با ولتاژ f روی مرز ناحیه در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) &= 0 & \text{در } \Omega \\ u &= f & \text{روی } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.1)$$

نگاشت Λ_γ تابع ولتاژ روی مرز را به تابع جریان متناظر می‌کند، یا به عبارت دقیق ریاضی نگاشت دیریکله به نیومن است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Lambda_\gamma(f) = \left(\gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \Big|_{\partial\Omega}.$$

در رابطه بالا u جواب معادله (۱.۱) است و ν نشان دهنده بردار عمود خارجی $\partial\Omega$ می‌باشد. با مشخص بودن رسانایی γ می‌توان نگاشت Λ_γ را تعیین کرد که خود یک مسأله مستقیم است. مسأله وارون متناظر بدین صورت بیان می‌شود که با دانستن نگاشت Λ_γ چگونه می‌توان میزان رسانایی γ را تعیین کرد. در بعضی موارد مسأله وارون با اطلاعات کمتری نیز مطرح می‌شود، مثلاً آیا با دانستن تنها یک مقدار تابع ولتاژ f و جریان $\Lambda_\gamma(f)$ می‌توان رسانایی γ را تعیین نمود؟ تفاوت این سؤال با مسأله قبل در این است که در اینجا تنها کافی است یکبار برای یک ولتاژ خاص، جریان را اندازه بگیریم. در مقابل در مسأله قبل باید برای تمام ولتاژها میزان جریان مشخص باشد.

این مسأله در عکسبرداری تومورها به روش امپدانس^۱ کاربرد دارد. به همین منظور الکترودهایی روی سطح بدن قرار می‌گیرد و جریان الکتریسیه از آنها عبور داده شده و ولتاژ را در الکترودها محاسبه می‌کنند. این مسأله کاربردهای دیگری نیز در اکتشاف معدن و منابع زیرزمینی نیز دارد. برای اطلاع بیشتر از دستاوردهای این بخش به کارهای الساندرینی^۲ به عنوان مثال [۲] یا اولمن^۳ [۴۳] مراجعه شود.

۳-۱ تبدیل رادون

اگر f تابعی تعریف شده در \mathbb{R}^n باشد، تبدیل رادون f که با Rf نشان داده می‌شود روی خانواده‌ای از زیرخمینه‌های \mathbb{R}^n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Rf(\gamma) := \int_{\gamma} f d\gamma$$

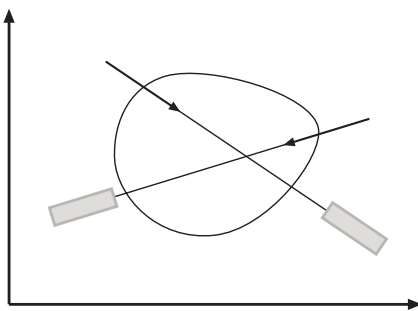
مسأله وارون در اینجا تعیین R^{-1} می‌باشد، بدین معنا که با دانستن مقدار انتگرال یک تابع روی خانواده‌ای از زیرخمینه‌ها، آن تابع را پیدا کنیم. در حالت خاص و معروف این مسأله $\{\gamma\}$ خانواده‌ای از ابرفضاهای \mathbb{R}^n می‌باشند. در [۲۲] یکتایی جواب وارون و پایداری آن در بعدهای دو و سه بررسی شده است.

این مسأله در بُعد دو در حالتی که خانواده زیرخمینه‌های $\{\gamma\}$ خطوط راست صفحه باشند، در

^۱ electrical impedance tomography

^۲ Alessandrini

^۳ Uhlmann



شکل ۱-۲:

عکسبرداری تومورها به وسیله اشعه X کاربرد دارد. در این کاربرد هرانتگرال $Rf(\gamma)$ بیانگر میزان کاهش انرژی اشعه X عبور داده شده از بدن می‌باشد که به وسیله ابزارهای پزشکی قابل محاسبه است. شناسایی تابع f بیانگر وضعیت داخلی بدن است.

همچنین این مسأله کاربرد دیگری در زمین‌شناسی و اکتشاف منابع زیرزمینی به روش لرزه‌ای^۱ دارد. در این روش مسیر موجی که به زمین داده می‌شود بین دو نقطه x و y ، منطبق بر ژئودزیک‌ها $\gamma(x, y)$ است که از متریک ریمانی $|dx|^2 a(x)$ به دست می‌آیند. تابع a معکوس تابع چگالی درون زمین است. با این فرض زمان عبور موج از نقطه x به y برابر است با

$$\tau(x, y) = \int_{\gamma(x, y)} d\gamma$$

این زمان به وسیله ابزارهای زمین‌شناسی قابل محاسبه است. مسأله وارون پیدا کردن تابع چگالی a با اطلاعات $\tau(x, y)$ برای مقادیر $x, y \in \Gamma$ می‌باشد که Γ قسمتی از سطح زمین است. برای مطالعه بیشتر به

[۵]، [۳۱]، [۳۲] و [۳۴] مراجعه شود.

۴-۱ شنیدن شکل طبل

این مسأله این گونه مطرح شده است که آیا می‌توان با شنیدن صدای طبل و هارمونیک‌های آن شکل آن را تعیین کرد؟ صورت ریاضی این مسأله بدین صورت است که اگر D پوسته طبل باشد و به ارتعاش درآید، جابجایی آن در زمان t که با $F(x, y, t)$ نشان داده می‌شود در معادله موج

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= c^2 \Delta F \\ F(x, y, t) &= 0 \quad (x, y) \in \partial D \end{aligned} \quad (2.1)$$

صدق می‌کند که c مقداری ثابت است. جوابهای به صورت $F(x, y, t) = u(x, y)e^{i\omega t}$ بیانگر همان تُن‌های خاصی است که پوسته می‌تواند ایجاد کند و مدهای طبیعی آن نامیده می‌شوند. با قرار دادن رابطه بالا در معادله (۲.۱) معادله زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u &= 0 \quad D \text{ در} \\ u &= 0 \quad \partial D \text{ روی} \end{aligned}$$

مقدار ثابت λ را که معادله بالا برای آن جواب دارد، مقدار ویژه دیریکله در ناحیه D می‌نامند. ثابت شده است که این مقادیر دنباله گسسته $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ را ایجاد می‌کنند که $\lambda_n \rightarrow \infty$ ، و این مقادیر بیانگر همان مدهای طبیعی طبل هستند. مسأله شنیدن شکل طبل که مسأله وارون مقادیر ویژه است، این گونه بیان می‌شود که چگونه با دانستن مقادیر ویژه $\{\lambda_n\}$ شکل D را تعیین کنیم. ثابت شده است که مقادیر ویژه D ، برخی ویژگی‌های ناحیه مانند مساحت، محیط و تعداد مؤلفه‌های همبندی را تعیین می‌کند، [۲۴]. با وجود این، یکتایی مسأله وارون برقرار نمی‌باشد. در [۱۰] دو ناحیه متمایز با مرز قطعه قطعه هموار مثال زده شده‌اند که مقادیر ویژه آنها برابر است. ولی همچنان سؤال یکتایی مسأله وارون برای نواحی با مرز هموار، مسأله‌ای باز است. برای مطالعات بیشتر در زمینه مسایل وارون مقادیر ویژه به [۲۵] مراجعه شود.

۵-۱ بازشناسی تصویر

هر تصویر در ناحیه D را به وسیله تابع $u : D \rightarrow [0, 1]$ می‌توان نشان داد که $u(x)$ بیانگر میزان روشنایی نقطه x است. به عنوان مثال $u(x) = 0$ ، یعنی رنگ نقطه x کاملاً سفید است و $u(x) = 1$ ، یعنی کاملاً سیاه. دقت هر دستگاه عکسبرداری محدود است و میزان رنگ نقطه x را به صورت ترکیبی از رنگ نقاط اطراف آن نقطه بیان می‌کند. مدل ریاضی این پدیده را می‌توان با یک عملگر انتگرالی بیان کرد. اگر تصویر به دست آمده از دستگاه عکسبرداری Au باشد، آنگاه Au به صورت زیر به دست آمده است:

$$(Au)(x) = \int_D K(x-y)u(y) dy$$

تابع K خارج گوی به شعاع r صفر است. در این صورت میزان رنگ نقطه x در تصویر به دست آمده ترکیبی از رنگ نقاط در r - همسایگی آن نقطه است. مسأله وارون در اینجا پیدا کردن تصویر واقعی u از تصویر به دست آمده $Au = v$ است. اهمیت این مسأله واضح است و کاربرد فراوانی در بازشناسی عکس‌های به دست آمده از ماهواره‌ها دارد. در بعضی موارد دستگاه عکسبرداری مقداری اختلال^۱ نیز در تصویر ایجاد می‌کند، به خصوص در تصاویر ماهواره‌ای که همراه با مقداری اختلال تصاویر ارسال می‌شوند. در این صورت u ، تصویر واقعی و v ، تصویر به دست آمده رابطه زیر را با هم دارند، که η اختلال وارده در تصویر است.

$$Au + \eta = v$$

در این حالت نیز باید با دانستن v بتوان u را محاسبه کرد. به عنوان نمونه در [۴]، [۲۳] و مراجع اشاره شده در آنها روشهایی برای بازشناسی تصویر آمده است.

noise^۱

۶-۱ مسائل بدرفتار

همه مثال‌های قبل به نوعی عملگر پیوسته‌ای مانند $A : X \rightarrow Y$ را نشان می‌دادند، که در هر مسئله فضاها X و Y متناسب آن مسئله تعریف می‌شوند. در هر قسمت مسئله وارون پیدا کردن جواب معادله

$$Ax = y \quad (۳.۱)$$

برای مقدار مشخص $y \in Y$ است. بنابراین قبل از هر چیز وجود جواب و یکتایی آن اهمیت خود را نشان می‌دهند. ولی مطلب مهم دیگری که بیش از همه در آزمایش‌های فیزیکی اهمیت خود را نشان می‌دهد، پایداری جواب است. در اندازه‌گیری‌های فیزیکی هیچ موقع مطمئن نخواهیم شد که اندازه محاسبه شده میزان واقعی کمیت مورد نظر است. لذا اگر میزان واقعی کمیت مورد نظر در معادله (۳.۱) را y بنامیم و کمیت اندازه‌گیری شده را y^δ قرار دهیم، تنها اطلاعی که از میزان واقعی y داریم، این است که ابزار فیزیکی ما با تقریب مثلاً δ ، کمیت مطلوب را محاسبه می‌کند، یعنی

$$\|y^\delta - y\|_Y < \delta.$$

لذا در عمل به جای حل معادله (۳.۱) و پیدا کردن x به جواب x^δ می‌رسیم که جواب آن معادله برای مقدار y^δ می‌باشد، یعنی $Ax^\delta = y^\delta$. شرط پایداری تضمین می‌کند که جواب به دست آمده x^δ نزدیک به جواب واقعی x می‌باشد. در واقع یعنی $\|x^\delta - x\| \rightarrow 0$ هرگاه $\|y^\delta - y\| \rightarrow 0$. بر همین اساس هادامارد^۱ مفهوم خوش رفتاری^۲ معادله $Ax = y$ را این گونه تعریف نمود که سه خاصیت وجود جواب، یگانگی جواب و پایداری جواب برای آن برقرار باشد، یا به عبارت دیگر عملگر $A^{-1} : Y \rightarrow X$ خوش تعریف و پیوسته باشد. در غیر این صورت اگر معادله $Ax = y$ یکی از این سه خاصیت را نداشته باشد بدرفتار^۳ می‌نامند.

مثال ۱.۱ تابع $u(x, t)$ درجه حرارت یک میله را در زمان t نشان می‌دهد که در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \quad \text{در } (0, 1) \times (0, T)$$

^۱ Hadamard

^۲ well-posedness

^۳ ill-posed

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad t \in (0, T)$$

$$u(x, 0) = u_0 \quad x \in (0, 1)$$

عملگر $A : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ مقدار حرارت میله را در زمان T برحسب مقدار آن در زمان صفر نشان می دهد یعنی

$$Au_0 = u_T$$

که $u_T(x) = u(x, T)$. در این صورت معادله $Au_0 = u_T$ بدرفتار است. زیرا که اگر $a_k(x) = \sin(\pi kx)$ آنگاه

$$(Aa_k)(x) = e^{-\pi^2 k^2 t} \sin(\pi kx)$$

در این صورت $\|Aa_k\|_{L^2} \rightarrow 0$ در حالی که $\|a_k\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Δ

مثال ۲.۱ هر عملگر فشرده $K : X \rightarrow Y$ که بعد فضای X نامتناهی باشد، بدرفتار است. زیرا در غیر این صورت K^{-1} پیوسته است و از آنجا که ترکیب دو عملگر فشرده و پیوسته، فشرده خواهد شد، نتیجه می شود که $I = K^{-1}K : X \rightarrow X$ فشرده است و این مطلب با فرض بعد نامتناهی X تناقض دارد. نمونه خوبی از عملگرهای فشرده، عملگرهای انتگرالی

$$(Af)(x) = \int_{\Omega} K(x, y)f(y) dy$$

می باشند که در مسایل وارون مختلفی ظاهر می شوند، مانند مثال ۱.۱ یا مسایل مطرح شده در بخش های ۱-۱ و ۵-۱. Δ

از آنجا که عموم مسایل وارون بدرفتار می شوند لذا بررسی مسایل بدرفتار اهمیت به سزایی دارد. هر چند با انتخاب فضاهای مناسب می توان مشکل وجود و یکتایی آن را برطرف کرد، ولی از آنجا که اهمیت مسایل وارون در کاربردهای فیزیکی آنها و حل عددی می باشد، لذا بحث پایداری همچنان پراهمیت ظاهر می شود.

یکی از راه‌های برخورد با این مشکل این است که نُرم فضاهای X و Y را تغییر دهیم تا عملگر A^{-1} پیوسته شود. اما این روش برای بسیاری از مسایل مناسب نمی‌باشد، چرا که محدودیت‌های فیزیکی مسأله فضاهای X ، Y و نُرم‌های آنها را تعیین می‌کنند. راه دیگر، روش‌های منظم‌سازی^۱ است که در بخش بعد مطرح خواهد شد.

۷-۱ روش‌های منظم‌سازی

به وسیله روش‌های منظم‌سازی می‌توان تقریبی از جواب هر معادله بدرفتار به دست آورد که پایدار نیز باشد. فرض کنید $A : X \rightarrow Y$ عملگر خطی و یک به یک باشد. همان طور که در بخش قبل نیز اشاره شد، شرط یک به یکی را با انتخاب مناسب فضای X می‌توان برقرار کرد. قرار است که معادله $Ax = y$ با دانستن تقریب y^δ از y حل شود که

$$\|y^\delta - y\| \leq \delta.$$

وقتی $y \in \text{Im } A$ ، معادله $Ax = y$ جواب یکتا دارد. اما برای مقدار مختل شده y^δ دیگر لزومی برای برقراری شرط $y^\delta \in \text{Im } A$ و وجود جواب مسأله نیست. روش‌های منظم‌سازی برای مقدار y^δ ، مقدار x^δ را متناظر می‌کند که علاوه بر این که تقریبی از جواب $Ax = y$ می‌باشند پایدار نیز هستند. یعنی اگر δ به صفر میل کند، آنگاه x^δ نزدیک x خواهد شد. در حالتی که عملگر A پایدار نباشد، $\text{Im } A \rightarrow X : A^{-1}$ بیکران است. در روش‌های منظم‌سازی برای پیدا کردن جواب پایدار معادله تقریبی از عملگر A^{-1} ارائه می‌گردد.

تعریف ۳.۱ X و Y فضاهای نرم‌دار بوده و $A : X \rightarrow Y$ عملگری خطی و یک به یک است. خانواده عملگرهای خطی $R_\alpha : Y \rightarrow X$ ، $\alpha > 0$ ، را طرح منظم‌سازی عملگر A گویند، هرگاه برای هر $x \in X$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha Ax = x.$$

پارامتر α را پارامتر منظم‌سازی می‌نامند.

از این تعریف به راحتی نتیجه می‌شود که برای هر $y \in \text{Im } A$ ، $R_\alpha y \rightarrow A^{-1}y$ وقتی $\alpha \rightarrow 0$. قضیه زیر نشان می‌دهد در حالتی که عملگر A فشرده باشد، همگرایی خانواده R_α نمی‌تواند یکنواخت باشد.

قضیه ۴.۱ X و Y فضاهای نرم‌دار و $A : X \rightarrow Y$ عملگری خطی و فشرده است و $\dim X = \infty$. در این صورت اگر خانواده عملگرهای $\{R_\alpha\}$ ، طرح منظم‌سازی عملگر A باشند، آنگاه:

(۱) عملگرهای $\{R_\alpha\}$ به طور یکنواخت کراندار نیستند، یعنی زیردنباله $\{\alpha_j\}$ وجود دارد که $\|R_{\alpha_j}\| \rightarrow \infty$ وقتی $\alpha_j \rightarrow 0$.

(۲) دنباله عملگرهای $\{R_\alpha A\}$ وقتی $\alpha \rightarrow 0$ به طور یکنواخت همگرا نمی‌باشد.

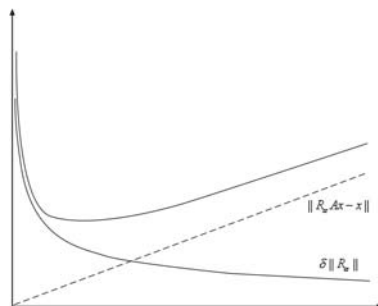
برهان. قضیه ۴-۴ مرجع [۱۴]. □

به وسیله طرح منظم‌سازی R_α جواب x از معادله $Ax = y$ به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$x_\alpha^\delta := R_\alpha y^\delta.$$

خطای تقریب به دست آمده عبارتست از:

$$\begin{aligned} \|x_\alpha^\delta - x\| &= \|R_\alpha y^\delta - R_\alpha y + R_\alpha Ax - x\| \leq \|R_\alpha\| \|y^\delta - y\| + \|R_\alpha Ax - x\| \\ &\leq \delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha Ax - x\| \end{aligned}$$



شکل ۱-۳:

اگر α ثابت بماند و $\delta \rightarrow 0$ ، جمله اول به صفر میل می‌کند ولی مقدار جمله دوم ثابت است و میزان خطا به اندازه دلخواه کوچک نمی‌شود. همچنین اگر δ را ثابت نگه داریم و $\alpha \rightarrow 0$ ، جمله دوم به صفر میل می‌کند، اما بنا بر قضیه قبل جمله اول بزرگ می‌شود. برای رسیدن به یک جواب پایدار هر طرح منظم‌سازی شامل روشی برای انتخاب $\alpha = \alpha(\delta)$ بر حسب δ است، تا میزان خطای کل به اندازه قابل قبولی کوچک بشود.

تعریف ۵.۱ طرح منظم‌سازی R_α همراه با انتخاب $\alpha = \alpha(\delta)$ را قابل قبول گویند هرگاه برای هر $x \in X$

$$\|y^\delta - Ax\| \leq \delta$$

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \|R_{\alpha(\delta)}y^\delta - x\| \rightarrow 0$$

وقتی $\delta \rightarrow 0$.

در زیر چند نمونه از طرح‌های منظم‌سازی، به همراه انتخاب قابل قبول پارامتر منظم‌سازی ذکر می‌شود.

کتابهای [۱۴]، [۲۲]، [۲۵] و [۴۴] مراجع مناسبی در این زمینه می‌باشند.

۱-۷-۱ تجزیه مقادیر تکین

X و Y فضاهاى هیلبرت بوده و عملگر خطی $A : X \rightarrow Y$ فشرده می‌باشد. در این صورت عملگر الحاقی A که با $A^* : Y \rightarrow X$ نشان داده می‌شود، نیز فشرده است. عملگر فشرده، خودالحاق و نامنفی

$$A^*A : X \rightarrow X$$

دارای مقادیر ویژه

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots > 0$$

می‌باشد. دنباله متعامد یکه $\{u_n\}$ در X موجود است که

$$A^*A u_n = \lambda_n u_n.$$

با قرار دادن $\mu_n = \lambda_n^{1/2}$ و $v_n = \frac{1}{\mu_n} A u_n$ ، دنباله $\{v_n\}$ متعامد یکه خواهد شد و

$$A u_n = \mu_n v_n, \quad A^* v_n = \mu_n u_n.$$

دنباله (μ_n, u_n, v_n) را دستگاه تکین^۱ عملگر A می‌نامند. اگر عملگر A یک به یک باشد، دنباله $\{u_n\}$ پایه متعامد یکه برای X خواهد بود. در این صورت هر مقدار $x \in X$ ، تجزیه‌ای به صورت زیر دارد:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n) u_n.$$

همچنین رابطه زیر برقرار است:

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (x, u_n) v_n.$$

در صورتی که $y \in N(A^*)^\perp$ ، جواب معادله $Ax = y$ بدین شکل قابل محاسبه است:

$$x = A^{-1}y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y, v_n)}{\mu_n} u_n.$$

این رابطه طبیعت بدرفتاری معادله $Ax = y$ را به خوبی نمایش می‌دهد. چرا که اگر $y^\delta = y + \delta v_n$ آنگاه

$$x^\delta = x + \frac{\delta v_n}{\mu_n}$$

از عبارتست از

$$\|x^\delta - x\| = \frac{\|y^\delta - y\|}{\mu_n}.$$

یعنی با مقادیر مختلف y^δ که در تقریب $\delta = \|y^\delta - y\|$ صدق می‌کنند، میزان خطای جواب معادله به اندازه کافی می‌تواند بزرگ باشد، چرا که $\mu_n \rightarrow 0$. بر همین اساس نرخ صفر شدن مقادیر تکین μ_n ، معیاری برای میزان بدرفتاری معادله $Ax = y$ ارائه می‌کند.

برای از بین بردن بدرفتاری معادله می‌توان تأثیر عامل $\frac{1}{\mu_n}$ را با قرار دادن فیلتر مناسبی کم کرد و منظم

سازی R_α را به صورت زیر تعریف نمود:

$$R_\alpha y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_\alpha(\mu_n)}{\mu_n} (y, v_n) u_n.$$

توابع $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ باید دارای خواص زیر باشند:

(۱) برای هر α ، ω_α کراندار است. این شرط همگرایی سری فوق را تضمین می‌کند.

(۲) برای هر α ، $\sup_{0 < s} \left| \frac{\omega_\alpha(s)}{s} \right| < \infty$. در این صورت R_α پیوسته خواهد بود و $\|R_\alpha\| \leq \sup_{0 < s} \left| \frac{\omega_\alpha(s)}{s} \right|$.

(۳) برای هر مقدار $s > 0$ ، $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \omega_\alpha(s) = 1$. از این شرط، نتیجه می‌شود که، $R_\alpha Ax \rightarrow x$.

مثال ۶.۱ با قرار دادن $\omega_\alpha(s) = \begin{cases} 1, & s > \alpha \\ 0, & s \leq \alpha \end{cases}$ طرح منظم‌سازی R_α به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R_\alpha y = \sum_{\mu_n > \alpha} \frac{1}{\mu_n} (y, v_n) u_n,$$

$$\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

در R_α سری $A^{-1}y$ از یک جا به بعد بریده شده است. با انتخاب کوچک α این سری به $A^{-1}y$ نزدیکتر می‌شود و دقت جواب بیشتر خواهد بود. از طرف دیگر برای به دست آوردن پایداری نیاز است که α بزرگ باشد. با انتخاب $\alpha(\delta) = \delta^p$ ، $0 < p < 1$ ، می‌توان تعادلی بین دقت و پایداری برقرار کرد. در این صورت میزان خطا عبارتست از:

$$\delta^{1-p} + \|R_{\alpha(\delta)} Ax - x\|,$$

که می‌تواند با انتخاب مناسب δ به اندازه کافی کوچک شود. Δ

مثال ۷.۱ (منظم‌سازی تیخونوف^۱). طرح منظم‌سازی به دست آمده از توابع $\omega_\alpha(s) = \frac{s^2}{s^2 + \alpha}$ را تیخونوف نامند و

$$\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

می‌توان پارامتر منظم‌سازی را با انتخاب $\alpha(\delta) = \delta^p$ ، $0 < p < 2$ ، قابل قبول کرد. Δ

۲-۷-۱ منظم‌سازی تیخونوف

عملگر خطی و پیوسته $A: X \rightarrow Y$ بین فضاهاى هیلبرت X و Y مفروض است. در این صورت بهترین جواب معادله $Ax = y$ در حالتی که $y \notin \text{Im } A$ ، پیدا کردن مقدار $\hat{x} \in X$ است که

$$\|A\hat{x} - y\| = \min_{x \in X} \|Ax - y\|.$$

مقدار $\hat{x} \in X$ در رابطه بالا صدق می‌کند اگر و تنها اگر $A^*A\hat{x} = A^*y$. این معادله همچنان بدرفتار است و برای حل این مشکل جمله $\alpha J(x)$ را به می‌نیمم‌ساز اضافه می‌کنیم. تابع جریمه J^1 ، تابعی نیم‌پیوسته پایینی و مثبت می‌باشد. در این صورت طرح منظم‌سازی R_α را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$R_\alpha(y) = \underset{x \in X}{\operatorname{argmin}} \{ \|Ax - y\|^2 + \alpha J(x) \}.$$

تابع argmin مقداری را نسبت می‌دهد که از آن می‌نیمم به دست می‌آید.

اگر $J(x) = \|x\|^2$ ، طرح منظم‌سازی R_α را تیخونوف نامند و $x_\alpha = R_\alpha y$ در معادله زیر صدق می‌کند:

$$(\alpha I + A^*A)x_\alpha = A^*y.$$

در حالتی که A فشرده باشد، عملگر $\alpha I + A^*A$ دوسویی است و وارون پیوسته دارد و طرح منظم‌سازی R_α عبارتست از:

$$R_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1} A^*.$$

برای اثبات این مطلب که R_α طرح منظم‌سازی است به قضایای ۴-۱۳ و ۴-۱۴ در [۱۴] مراجعه شود. به راحتی می‌توان دید که R_α همان طرح منظم‌سازی مثال ۷.۱ است.

در [۴۴] نمونه‌های مختلفی از توابع جریمه معرفی شده است. انتخاب مناسب تابع جریمه می‌تواند در به دست آوردن نتایج مطلوب مفید واقع شود. به عنوان نمونه به [۴] مراجعه شود که مسأله بازشناسی تصویر را بررسی می‌کند. در آنجا تابع جریمه به گونه‌ای تعیین می‌شود که جواب مسأله مرز شکل‌های مختلف را حفظ کند.

در اینجا برای انتخاب قابل قبول α روش دیگری ارائه می‌شود که به اصل اختلاف^۱ معروف است.

قضیه ۸.۱ اگر عملگر $A : X \rightarrow Y$ خطی، فشرده و یک به یک باشد که تصویرش در Y چگال است.

برای مقدار $y \in Y$ و $0 < \delta < \|y\|$ ، می‌توان پارامتر α را به طور یکتا تعیین کرد که

$$\|AR_\alpha y - y\| = \delta.$$

برهان. قضیه ۴-۱۵ کتاب [۱۴]. □

از طرف دیگر با توجه به رابطه

$$x_\alpha = R_\alpha y^\delta = \arg \min_{u \in X} (\|Au - y^\delta\|^2 + \alpha \|u\|^2)$$

اگر x جواب واقعی معادله $Ax = y$ باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \|Ax_\alpha - y^\delta\|^2 + \alpha \|x_\alpha\|^2 &\leq \|Ax - y^\delta\|^2 + \alpha \|x\|^2 = \|y - y^\delta\|^2 + \alpha \|x\|^2 \\ &= \delta^2 + \alpha \|x\|^2 \end{aligned}$$

با توجه به انتخاب α از قضیه ۸.۱ نتیجه می‌شود که $\|x_\alpha\| \leq \|x\|$. از طرف دیگر وقتی $\delta \rightarrow 0$ ، همگرایی

ضعیف $x_\alpha \rightarrow x$ برقرار است. برای بررسی نشان دادن این مطلب کافی است برای هر $z \in Y$ عبارت زیر به

صفر میل کند، زیرا که تصویر A^* چگال است ($\overline{\text{Im } A^*} = N(A)^\perp$).

$$\begin{aligned} |(x_\alpha - x, A^*z)| &= |(Ax_\alpha - Ax, z)| = |(AR_\alpha y^\delta - y^\delta + y^\delta - y, z)| \\ &\leq (\|AR_\alpha y^\delta - y^\delta\| + \|y^\delta - y\|)\|z\| \leq 2\delta\|z\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

بنابراین از همگرایی ضعیف $x_\alpha \rightarrow x$ و رابطه $\|x_\alpha\| \leq \|x\|$ نتیجه می‌شود که میزان خطای جواب وقتی

$\delta \rightarrow 0$ ، به صفر میل خواهد کرد:

$$\|x_\alpha - x\|^2 = \|x_\alpha\|^2 - 2\text{Re}\langle x_\alpha, x \rangle + \|x\|^2 \leq 2\|x\|^2 - 2\text{Re}\langle x_\alpha, x \rangle \rightarrow 0.$$

مسأله پراکندگی موج

فرایند پراکندگی موج در اثر قرار گرفتن مانعی بر سر راه میدان امواج صوت یا الکترومغناطیس پدید می آید. بسته به خواص فیزیکی مانع فرآیند پراکندگی به صورتهای مختلف مدل می شود. حالت اول پراکندگی موج صوت یا الکترومغناطیس توسط اشیاء نفوذناپذیر است. یعنی امواج نمی توانند به درون مانع نفوذ کنند. در این حالت وابسته به شرایط مرزی مانع نوع مسأله متفاوت است که در جای خود توضیح داده خواهد شد. حالت دیگر پراکندگی موج به وسیله موانع نفوذپذیر است که موج به درون مانع نفوذ می کند.

در همین جا باید اشاره کرد که دو رویکرد در مدل کردن فرآیند پراکندگی موج وجود دارد. رویکرد اول تابع موج را به طور معمول تابع وابسته به زمان $U(x, t)$ ، در نظر می گیرد که در معادله موج صدق می کند. در رویکرد دوم موج را به صورت نوسانی و هارمونیک زمانی در نظر می گیرد، یعنی $U(x, t) = \text{Re}\{u(x)e^{-i\omega t}\}$ که $\omega > 0$ ، فرکانس موج است و بدین ترتیب به معادله مستقل از زمان می رسد. در این رساله رویکرد دوم دنبال شده است.

در این فصل ضمن بیان صورت فیزیکی مسأله پراکندگی موج، بیان ریاضی مسأله مستقیم در انواع مختلف خود بیان خواهد شد.

۱-۲ امواج صوت

امواج صوت مانند سیالی در فضا در نظر گرفته می‌شود. $v(x, t)$ نشان دهنده بردار سرعت ذره در نقطه $x \in \mathbb{R}^3$ در زمان t می‌باشد. همچنین $p(x, t)$ ، $\rho(x, t)$ و $S(x, t)$ را به ترتیب فشار، چگالی و آنتروپی خاص^۱ جریان در نظر می‌گیریم. با فرض اینکه هیچ نیروی خارجی بر جریان اثر ندارد، حرکت ذرات فضا را به وسیله معادلات زیر می‌توان بیان کرد:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v + \gamma v + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad \text{معادله اویلر:} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0 \quad \text{معادله پیوستگی:} \quad (2.2)$$

$$f(\rho, S) = p \quad \text{معادله حالت:} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \cdot \nabla S = 0 \quad \text{فرض آدیباتیک:} \quad (4.2)$$

تابع f وابسته به جریان تعیین می‌شود و γ ضریب میرایی^۲ می‌باشد. فرض کنید سیستم فوق در حالت ایستا، $v_0 = 0$ ، با توابع مستقل از زمان $\rho = \rho_0(x)$ و $S = S_0(x)$ توصیف شود، که در ضمن فشار p_0 ثابت است. با روش خطی‌سازی می‌توان دستگاه غیرخطی فوق را ساده‌تر کرد، برای این منظور قرار می‌دهیم:

$$v(x, t) = \varepsilon v_1(x, t) + o(\varepsilon^2)$$

$$p(x, t) = p_0 + \varepsilon p_1(x, t) + o(\varepsilon^2)$$

$$\rho(x, t) = \rho_0(x) + \varepsilon \rho_1(x, t) + o(\varepsilon^2)$$

$$S(x, t) = S_0(x) + \varepsilon S_1(x, t) + o(\varepsilon^2)$$

با جایگذاری این روابط در معادلات (۱.۲)–(۴.۲) و حذف جمله $o(\varepsilon^2)$ به معادلات زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \gamma v_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 v_1) = 0 \quad (6.2)$$

^۱ specific entropy

^۲ damping coefficient

$$\frac{\partial f(\rho_o, S_o)}{\partial \rho} \rho_1 + \frac{\partial f(\rho_o, S_o)}{\partial S} S_1 = p_1 \quad (۷.۲)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla S_o = 0 \quad (۸.۲)$$

با توجه به رابطه (۳.۲) و ثابت بودن فشار، نتیجه می‌شود:

$$0 = \nabla f(\rho_o(x), S_o(x)) = \frac{\partial f(\rho_o, S_o)}{\partial \rho} \nabla \rho_o + \frac{\partial f(\rho_o, S_o)}{\partial S} \nabla S_o.$$

از این رابطه و رابطه (۸.۲) و مشتق رابطه (۷.۲) نسبت به زمان نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = c(x)^2 \left[\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla \rho_o \right]. \quad (۹.۲)$$

در این رابطه c سرعت صوت را نشان می‌دهد که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$c(x)^2 := \frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho_o(x), S_o(x)).$$

می‌توان در رابطه (۹.۲)، ρ_1 و v_1 را حذف کرد و بدین ترتیب به معادله موج زیر رسید:

$$\frac{\partial^2 p_1(x, t)}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} = c(x)^2 \rho_o(x) \operatorname{div} \left[\frac{1}{\rho_o(x)} \nabla p_1(x, t) \right].$$

فرض کنید p_1 موج هارمونیک زمانی است، یعنی به صورت

$$p_1(x, t) = \operatorname{Re}\{u(x)e^{-i\omega t}\},$$

می‌باشد، که $\omega > 0$ فرکانس موج است و u تابع مختلط وابسته به مکان است. با جایگذاری آن در معادلات بالا و فرض این که جملات شامل $\nabla \rho_o$ بسیار کوچک هستند نتیجه می‌شود که u در معادله هلمولتز صدق می‌کند:

$$\Delta u(x) + \frac{\omega^2}{c(x)^2} (1 + i\frac{\gamma}{\omega}) u = 0.$$

اگر در فضای خالی سرعت موج برابر $c = c_o$ ثابت باشد و $\gamma = 0$ ، عدد موج و شاخص شکست^۱ به صورت

زیر تعریف می‌شوند:

$$k := \frac{\omega}{c_o} > 0, \quad n(x) := \frac{c_o^2}{c(x)^2} (1 + i\frac{\gamma}{\omega}).$$

^۱ Index of refraction

با این تعاریف معادله هلمولتز به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\Delta u + k^2 n u = 0 .$$

فرض می‌کنیم که در خارج از ناحیه D ، رفتار موج مانند فضای خالی باشد یعنی $c(x) = c_0$ و $\gamma = 0$. در این صورت $n(x) = 1$ برای $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ و

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{در } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \quad (10.2)$$

ناحیه $\{x | n(x) \neq 1\}$ بیانگر ناحیه‌ای ناهمگن است. در فصل ۴ راجع به نواحی ناهمگن صحبت خواهد شد.

اکنون فرض کنید D مانعی بر سر راه موج باشد که در یک محیط همگن قرار گرفته است. در این صورت اگر موج u^i منتشر شود و در اثر برخورد آن با D ، موج u^s پراکنده شود، میدان $u = u^i + u^s$ در بیرون ناحیه D تشکیل خواهد شد که در معادله هلمولتز (۱۰.۲) صدق می‌کند. اگر D یک مانع نرم - صوت^۱ باشد، فشار موج روی مرز آن صفر است یعنی شرط مرزی دیریکله $u = 0$ روی ∂D برقرار است. اگر D ، مانع سخت - صوت^۲ باشد، مؤلفه عمودی موج روی مرز صفر است و به شرط مرزی نیومن $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ روی ∂D می‌رسیم. در حالت کلی تر روی مرز D مؤلفه عمودی سرعت می‌تواند متناسب با فشار روی مرز باشد. در این حالت شرط مرزی را آمپدانس^۳ گویند:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda u = 0 \quad \text{روی } \partial D$$

حالت $\lambda = 0$ به شرط مرزی نیومن، سخت - صوت، منجر می‌شود و حالت $\lambda = \infty$ همان شرط مرزی دیریکله، نرم - صوت است. در ساده‌ترین مدل فرض بر این است که λ ضریب ثابت است یعنی شرایط فیزیکی مانع در عبور موج همگن است ولی در بعضی از مدل‌ها این ضریب وابسته به مکان تغییر می‌کند، [۱]. مدل دیگری نیز برای مسایل پراکندگی موج وجود دارد که ترکیبی از حالات، شرط مرزی دیریکله و

sound-soft^۱

sound-hard^۲

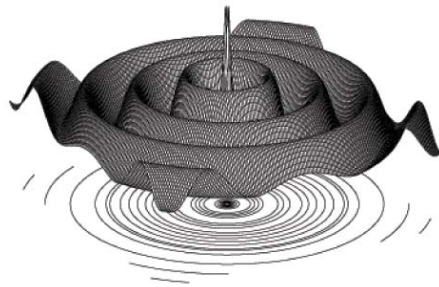
impedance^۳

امپدانس است. این موانع به موانع به طور موضعی پوشیده شده معروف هستند. در این مدل مرز ∂D به صورت $\partial D = \Gamma_D \cup \Pi \cup \Gamma_I$ تجزیه می شود که Γ_D و Γ_I زیرمجموعه های باز و جدا از هم ∂D می باشند و Π مرز مشترک Γ_D و Γ_I است. بر روی Γ_D شرط مرزی دیریکله حاکم است و بر روی Γ_I شرط امپدانس یعنی

$$u = 0 \quad \text{روی } \Gamma_D$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda u = 0 \quad \text{روی } \Gamma_I$$

در معمول مسایل، موج منتشر شده u^i یا موج تخت، $u^i(x, d) := e^{ikx \cdot d}$ است که در راستای d منتشر شده است یا موج کروی $\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$ است که از منبع موج y منتشر شده است و به منبع نقطه ای^۱ معروف است. قابل ذکر است که $\Phi(x, y)$ جواب اساسی معادله هلمهولتز (۱۰.۲) می باشد. میدان امواج



شکل ۱-۲:

پراکنده شده آنها را به ترتیب با $u^s(x, d)$ و $\Phi^s(x, y)$ نشان می دهند. انتظاری که در هر کدام از مدل های بالا داریم این است که بعد از منتشر شدن موج دلخواه u^i موج پراکنده شده u^s در فاصله بسیار دور شبیه یک موج کروی رفتار کند. این خاصیت با رابطه زیر که به رابطه تشعشی زامرفلد^۲ معروف است بیان می شود:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0, \quad r = |x|. \quad (11.2)$$

این شرط یکتایی جواب معادله (۱۰.۲) را تضمین می کند. هر جواب این معادله که در رابطه (۱۱.۲)

^۱ point source

^۲ Sommerfeld radiation condition

صدق کند را، جواب تشعشی معادله (۱۰.۲) می نامند. این جواب را می توان بر حسب مقادیر مرزی روی ∂D تعیین کرد.

قضیه ۱.۲ اگر u^s جواب تشعشی معادله هلموتز

$$\Delta u^s + k^2 u^s = 0 \quad \text{در } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

باشد، فرمول گرین برای آن برقرار است:

$$u^s(x) = \int_{\partial D} u^s(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) ds(y)$$

برهان. قضیه ۲-۴ در کتاب [۱۴]. □

نتیجه ۲.۲ هر جواب تشعشی معادله هلموتز که در سرتاسر \mathbb{R}^3 تعریف شده باشد، برابر صفر است.

برهان. با توجه به قضیه قبل و رابطه گرین نتیجه می شود که برای ناحیه دلخواه D که $x \notin D$:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial D} u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) ds(y) = \int_D (u \Delta_y \Phi - \Delta u \Phi) dy \\ &= \int_D (u(-k^2 \Phi) - (-k^2 u) \Phi) dy = 0 \end{aligned}$$

□
قضیه زیر نشان می دهد که چگونه رابطه (۱۱.۲) باعث می شود که رفتار مجانبی جواب تشعشی در فاصله بسیار دور مانند موج کروی باشد. این قضیه تعریف الگوی میدان دور^۱ را ارائه می کند که در بحث مسایل وارون پراکندگی موج بسیار اساسی است.

قضیه ۳.۲ هر جواب تشعشی معادله هلموتز در رابطه زیر صدق می کند

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ u^\infty(\hat{x}) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (12.2)$$

^۱ far field pattern

در این رابطه $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ است و

$$u^\infty(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left\{ u^s(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y} \right\} ds(y). \quad (13.2)$$

□ برهان. قضیه ۲-۵ در کتاب [۱۴].

الگوی میدان دور میدان پراکنده شده امواج تخت $u^i(x, d)$ با $u^\infty(\hat{x}, d)$ و میدان پراکنده شده منبع نقطه‌ای $\Phi(x, y)$ با $\Phi^\infty(\hat{x}, y)$ نشان داده می‌شوند. با شناخت D و ماهیت فیزیکی آن که تعیین کننده شرط مرزی D می‌باشد، تابع $u^\infty(\hat{x}, d)$ برای هر $\hat{x}, d \in \Omega$ قابل محاسبه است که $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$. مسأله مستقیم پراکنده‌گی موج، محاسبه میدان امواج پراکنده شده یا الگوی میدان دور برای هر موج دلخواه منتشر شده u^i است.

در مقابل مسأله وارون پراکنده‌گی موج به این صورت مطرح می‌شود، آیا با دانستن الگوی میدان دور $u^\infty(\hat{x}, d)$ برای تمام امواج تخت، ناحیه D قابل شناسایی است؟ اگر به نظر می‌رسد این میزان اطلاعات برای پیدا کردن D زیاد است، می‌توان فرض مسأله را بدین صورت تغییر داد که u^∞ تنها برای تعداد متناهی جهت d یا تنها یک جهت مشخص است. یا این که اصلاً برای یک موج دلخواه u^i که لزوماً تخت نیست، u^∞ مشخص است آیا می‌توان D و u^s را تعیین نمود؟ البته باید ذکر کرد که الگوریتم‌هایی که تا چند وقت اخیر برای شناسایی D وجود داشتند، علاوه بر اطلاعات کامل $u^\infty(\hat{x}, d)$ نیاز به این داشتند که خواص فیزیکی D نیز تا حدودی مشخص باشد و نوع شرط مرزی را از قبل بدانیم. یعنی به فرض سؤال باید این مطلب را اضافه نمود که D ، نرم - صوت، سخت - صوت یا به طور موضعی پوشیده شده است.

در واقع مسأله وارون متناظر جواب معادله $Fu^s = u^\infty$ است که F عملگری می‌باشد که جواب تشعشعی

معادله هلمولتز را به الگوی میدان دور آن متناظر می‌کند، یعنی

$$F : u^s \mapsto u_\infty.$$

در [۱۴] نشان داده شده است که معادله $Fu^s = u^\infty$ بدرفتار است. با این وجود قضایای زیر یکتایی جواب معادله را نشان می‌دهند.

لم ۴.۲ (رلیش^۱) اگر $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ناحیه‌ای باز و کراندار باشد که مکمل آن همبند است و $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ جواب معادله هلمولتز باشد که در رابطه

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 ds = 0,$$

صدق می‌کند. در این صورت $u = 0$ در $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

برهان. لم ۲-۱۱ در [۱۴]. □

قضیه ۵.۲ اگر D در فرض‌های لم ۴.۲ صدق کند و به علاوه ∂D از کلاس C^2 باشد و $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ جواب تشعشی معادله هلمولتز باشد و مشتق عمودی u روی مرز به معنای همگرایی یکنواخت تعریف شده باشد و

$$\operatorname{Im} \int_{\partial D} u \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds \geq 0$$

در این صورت $u = 0$ در $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

برهان. اگر Ω_r کره به شعاع r و مرکز مبدأ باشد، از رابطه تشعشی (۱۱.۲) نتیجه می‌شود که وقتی

$r \rightarrow \infty$

$$\int_{\Omega_r} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 |u|^2 + 2k \operatorname{Im} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right) \right\} ds = \int_{\Omega_r} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} - iku \right|^2 ds \rightarrow 0. \quad (14.2)$$

را به اندازه کافی بزرگ انتخاب کرده به طوری که D در Ω_r قرار بگیرد. حال با استفاده از فرمول گرین در

^۱ Rellich

ناحیه $\Omega_r \setminus \bar{D}$ رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds - \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds &= \int_{\Omega_r \setminus \bar{D}} (u \cdot \Delta \bar{u} + \nabla u \cdot \nabla \bar{u}) dx \\ &= \int_{\Omega_r \setminus \bar{D}} -k^2 |u|^2 + |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\operatorname{Im} \int_{\Omega_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds = \operatorname{Im} \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds \geq 0. \quad (15.2)$$

از (۱۴.۲) و (۱۵.۲) نتیجه می شود که

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 ds = 0.$$

□ اکنون با استفاده از لم رلیش می توان اثبات قضیه را کامل کرد.

تذکر ۶.۲ در بخش بعد، از این قضیه برای ناحیه لپیشیتز D و تابع $u \in H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ استفاده خواهیم کرد. اثبات این قضیه را می توان به این حالت تعمیم داد. چرا که فرمول گرین برای نواحی لپیشیتز و توابع در کلاس H^1 نیز برقرار است. همچنین با توجه به این که هر جواب معادله بیضوی در یک ناحیه باز تحلیلی است، جواب معادله هلمولتز در کلاس $C^2(\mathbb{R}^m \setminus \bar{D})$ قرار می گیرد، بنابراین لم رلیش نیز در این حالت برقرار است.

قضیه ۷.۲ اگر D منطبق بر فرض های لم ۴.۲ باشد و $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ جواب تشعشعی معادله هلمولتز باشد که الگوی میدان دور آن صفر است، آنگاه $u = 0$ در $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

برهان. از رابطه (۱۲.۲) نتیجه می شود که

$$\int_{|x|=r} |u(x)|^2 ds = \int_{\Omega} |u^\infty(\hat{x})|^2 ds + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

فرض $u^\infty = 0$ و لم رلیش نتیجه می دهند که $u = 0$ در $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$. □

با توجه به خطی بودن معادله هلموتز و روابطی که منجر به تعریف u^∞ می شد به راحتی می توان دید که عملگر F خطی است و قضیه قبل که از لم رلیش نتیجه می شود یک به یک بودن F را اثبات می کند. در نتیجه الگوی میدان دور، u^∞ ، میدان u^s را به طور یکتا تعیین می کند. به علت کاربرد بیشتر این قضیه، آن را به لم رلیش معروف کرده است و در هر جا اسمی از لم رلیش می آید منظور همین قضیه ای است که یکتایی جواب معادله $Fu = u^\infty$ را اثبات می کند. قضیه ۵.۲ نیز از لم رلیش نتیجه می شود و در اثبات یکتایی جواب معادله هلموتز در بخش بعد به کار می رود.

می توان مدل پراکندگی موج را در صفحه \mathbb{R}^2 مشابه مطالب بالا بیان نمود. تمام نتایج بالا همچنان در بعد $m = 2$ برقرار است تنها با کمی تفاوت در تعریف شرط تشعشی (۱۱.۲) و الگوی میدان دور (۱۲.۲). این روابط در حالت کلی بعدهای $m = 2, 3$ به صورت زیر بیان می شوند:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - ik u^s \right) = 0, \quad (16.2)$$

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{\frac{m-1}{2}}} \left\{ u^\infty(\hat{x}) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}. \quad (17.2)$$

همچنین جواب اساسی معادله هلموتز در حالت بعد $m = 2$ ، با رابطه $\Phi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|)$ تعریف می شود که $H_0^{(1)}$ تابع هنکل^۱ مرتبه اول است.

۲-۲ وجود و یکتایی

در این بخش وجود و یکتایی جواب معادله هلموتز در مدل موانع به طور موضعی پوشانده شده بررسی می شود. نتایج این بخش در زمانی که مانع سخت - صوت و یا نرم - صوت باشد، به عنوان حالت خاص همچنان برقرار است. $D \subseteq \mathbb{R}^m$ ($m = 2, 3$) را ناحیه ای کراندار گرفته که مرز $\Gamma = \partial D$ لپشیتز است و $\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$ همبند می باشد. فرض می شود که Γ دارای تجزیه ای به صورت $\Gamma = \Gamma_D \cup \Pi \cup \Gamma_I$ است که Γ_D و

Γ_I زیرمجموعه‌های باز و جدا از هم Γ می‌باشند و Π مرز مشترک آن دو در Γ است. در مسأله مستقیم پراکندگی موج به دنبال جواب معادله

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0 && \text{در } \mathbb{R}^m \setminus \bar{D} \\ u &= f && \text{روی } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda u &= g && \text{روی } \Gamma_I \end{aligned} \quad (18.2)$$

می‌باشیم که f و g با توجه به موج منتشر شده تعیین می‌شوند و $\lambda \in L^\infty(\Gamma_I)$ تابعی مثبت است. به علاوه همان طور که در بخش قبل اشاره شد u در رابطه تشعشی زامرفلد (۱۶.۲) صدق می‌کند:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \quad r = |x|$$

برای صورت‌بندی این مسأله لازم است که فضاهای سوبولف زیر را تعریف کنیم. $H^1(D)$ فضای سوبولف شناخته شده است و $D^*(\mathbb{R}^m \setminus \bar{D})$ مجموعه توزیع‌های روی $\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$ می‌باشد. همچنین اگر B_ρ گوی به شعاع ρ باشد،

$$H_{loc}^1(\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}) = \left\{ u \in D^*(\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}) : u|_{B_\rho \setminus \bar{D}} \in H^1(B_\rho \setminus \bar{D}) \text{ داشته باشیم که } \bar{D} \subseteq B_\rho \text{ که } \rho > 0 \right\}$$

تصویر عملگر اثر^۱ روی $H^1(D)$ فضای $H^{1/2}(\Gamma)$ را تشکیل می‌دهد. برای تعریف دقیق عملگر اثر و فضای $H^{1/2}(\Gamma)$ به [۳۳] مراجعه شود. اگر $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ قسمتی از مرز باشد، فضاهای زیر در بررسی مسأله به کار خواهند آمد:

$$\begin{aligned} H^{1/2}(\Gamma_0) &:= \{u|_{\Gamma_0} : u \in H^{1/2}(\Gamma)\} \\ \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_0) &:= \{u \in H^{1/2}(\Gamma) : \text{Supp } u \subseteq \bar{\Gamma}_0\} \\ H^{-1/2}(\Gamma_0) &:= \left(\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_0) \right)^* \\ \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_0) &:= \left(H^{1/2}(\Gamma_0) \right)^* \end{aligned}$$

در روابط بالا V^* فضای دوگان V است.

اگر $u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^m \setminus \bar{D})$ جواب ضعیف معادله (۱۸.۲) باشد، باید برای هر تابع آزمون $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$-k^2 \int_{\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}} u \bar{\varphi} dx + \int_{\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}} \nabla u \cdot \nabla \bar{\varphi} dx = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot \bar{\varphi} \quad (۱۹.۲)$$

اگر $\gamma : H^s(\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ عملگر اثر باشد که برای $\frac{1}{4} < s < \frac{3}{4}$ پیوسته است (قضیه ۳.۳۸ در [۳۳])، مشتق عمودی $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \sum_{j=1}^m \nu_j \gamma(\partial_j u) \quad (۲۰.۲)$$

که $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ بردار عمود خارجی مرز Γ است و تقریباً همه جا روی مرز تعریف شده است. در ضمن باید شرایط مرزی زیر برقرار باشند:

$$(\gamma u)|_{\Gamma_D} = f,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda \gamma u \right) \Big|_{\Gamma_I} = g.$$

$\gamma u \in H^{1/2}(\Gamma)$ و از آنجا که عملگر پیوسته $H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ موجود است، دومین رابطه بالا معنا دارد. با توجه به این روابط فرض‌های $f \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ و $g \in H^{-1/2}(\Gamma_I)$ در صورت مسأله پراکندگی موج لازم است. با این همه رابطه (۱۹.۲) نمی‌تواند جواب مسأله (۱۸.۲) را بیان کند، چرا که در فرض مسأله مقدار $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ روی کل مرز نیامده است، به همین دلیل جواب ضعیف مسأله بدین صورت تعریف می‌شود.

تعریف ۸.۲ $u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^m \setminus \bar{D})$ جواب ضعیف (۱۸.۲) است هرگاه $(\gamma u)|_{\Gamma_D} = f$ و برای هر تابع

آزمون $v \in H^1(\mathbb{R}^m \setminus \bar{D})$ که محمل فشرده دارد و $(\gamma v)|_{\Gamma_D} = 0$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$-k^2 \int_{\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}} u \cdot \bar{v} dx + \int_{\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx = -\langle g, (\gamma \bar{v})|_{\Gamma_I} \rangle + i \langle \lambda \gamma u, \gamma v \rangle_{\Gamma_I} \quad (۲۱.۲)$$

در این رابطه $\langle \cdot, \cdot \rangle$ زوج دوگانی بین فضاهای $H^{-1/2}(\Gamma_I)$ و $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_I)$ را نشان می‌دهد و (\cdot, \cdot) ضرب داخلی شناخته شده در $L^2(\Gamma_I)$ است.

قضایای زیر یکتایی جواب ضعیف معادله هلمولتز را در خارج و در درون D نشان می‌دهد.

قضیه ۹.۲ معادله هلمولتز (۱۸.۲) حداکثر یک جواب دارد.

برهان. کافی است که نشان داده شود، اگر u جواب تشعشی معادله (۱۸.۲) برای $f \equiv 0$ و $g \equiv 0$ باشد،

$u \equiv 0$ خواهد بود. این مطلب با توجه به قضیه ۵.۲، تذکر ۶.۲ و رابطه زیر نتیجه خواهد شد.

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma} u \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds = \operatorname{Im} \int_{\Gamma_I} u \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds = \operatorname{Im} \int_{\Gamma_I} i \lambda |u|^2 ds \geq 0$$

□

قضیه ۱۰.۲ اگر معادله هلمولتز (۱۸.۲) در درون ناحیه D در نظر گرفته شود، حداکثر یک جواب برای

آن وجود دارد.

برهان. با فرض $f \equiv 0$ و $g \equiv 0$ و با استفاده از رابطه گرین در ناحیه D رابطه زیر به دست می‌آید:

$$-k^2 \int_D |u|^2 dx + \int_D |\nabla u|^2 dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \bar{u} ds = -i \int_{\Gamma_I} \lambda |u|^2 ds.$$

با در نظر گرفتن قسمت موهومی دو طرف معادله و با توجه به اینکه λ تابعی مثبت است، نتیجه می‌شود

$u|_{\Gamma_I} = 0$ به عنوان تابعی در $H^{1/2}(\Gamma_I)$. بنابراین $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ به عنوان تابعی در $H^{-1/2}(\Gamma_I)$. اگر B_ρ کره به شعاع

ρ باشد که مرکز آن روی Γ_I قرار دارد و مرز Γ_D را قطع نمی‌کند، آنگاه با تعریف تابع $v = u$ در $B_\rho \cap D$ و

$v = 0$ در $B_\rho \setminus \bar{D}$ ، جواب ضعیف معادله هلمولتز درون B_ρ خواهد بود. زیرا اگر $\phi \in C^\infty(B_\rho)$ تابع آزمون

دلخواهی باشد:

$$\int_{B_\rho} \nabla v \cdot \nabla \bar{\phi} - k^2 v \bar{\phi} dx = \int_{B_\rho \cap D} \nabla u \cdot \nabla \bar{\phi} - k^2 u \bar{\phi} dx = \int_{\partial D \cap B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} \bar{\phi} ds = 0$$

همچنین v جواب کلاسیک معادله هلمولتز نیز خواهد بود و بنابراین در B_ρ یک تابع تحلیلی است. در نتیجه

$v \equiv 0$ در B_ρ و از تحلیلی بودن u در درون D نیز نتیجه می‌شود که $u \equiv 0$ در D .

□

برای پیدا کردن جواب معادله (۱۸.۲)، رابطه گرین که در قضیه ۱.۲ بیان شده است، نقشی کلیدی بازی می‌کند.

$$u(x) = \int_{\partial D} u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) ds(y) \quad (22.2)$$

با استفاده از این رابطه می‌توان u را بر حسب مقادیر آن بر روی ∂D به دست آورد. بر همین اساس پتانسیل لایه‌ای تکین^۱ $\mathcal{S} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^m)$ و پتانسیل لایه‌ای دوگانه^۲ $\mathcal{D} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^m)$ که به صورت زیر تعریف می‌شوند، کاربرد مهمی دارند:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\psi(x) &:= \int_{\Gamma} \psi(y) \Phi(x, y) ds(y), & x \in \mathbb{R}^m \setminus \Gamma, \\ \mathcal{D}\psi(x) &:= \int_{\Gamma} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y), & x \in \mathbb{R}^m \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

با این تعریف رابطه (۲۲.۲) را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$u = \mathcal{D}u - \mathcal{S} \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad (23.2)$$

همچنین عملگرهای انتگرالی $K : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ ، $S : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ و $K' : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ و $T : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\psi(x) &:= 2 \int_{\Gamma} \psi(y) \Phi(x, y) ds(y) & K\psi(x) &:= 2 \int_{\Gamma} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) \\ K'\psi(x) &:= 2 \int_{\Gamma} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) & T\psi(x) &:= 2 \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Gamma} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\nu(y)} ds(y) \end{aligned}$$

با این تعاریف اگر S^+ ، S^- ، D^+ و D^- به ترتیب مقدار پتانسیل‌های لایه‌ای \mathcal{S} و \mathcal{D} را در داخل و خارج ناحیه D نشان دهند، روابط پرشی^۳ روی مرز Γ به صورت زیر بیان می‌شوند: (به عنوان مثال به [۱۴] و [۳۳] مراجعه شود)

$$\begin{aligned} 2\gamma S^{\pm} \psi &= S\psi & 2\gamma D^{\pm} \psi &= \pm \psi + K\psi \\ 2 \frac{\partial}{\partial \nu} S^{\pm} \psi &= \mp \psi + K'\psi & 2 \frac{\partial}{\partial \nu} D^{\pm} \psi &= T\psi \end{aligned} \quad (24.2)$$

single layer potential^۱
double layer potential^۲
Jump relation^۳

γ همان عملگر اثر است و $\frac{\partial}{\partial \nu} S\psi$ و $\frac{\partial}{\partial \nu} D\psi$ از رابطه (۲۰.۲) تعریف می‌شوند. در نتیجه با به کار بردن روابط پرشی مذکور در رابطه (۲۲.۲) روابط زیر به دست می‌آیند که در اثبات وجود جواب پراهمیت ظاهر می‌شوند.

$$\begin{aligned} u &= Ku - S \frac{\partial u}{\partial \nu} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= Tu - K' \frac{\partial u}{\partial \nu} \end{aligned} \quad (۲۵.۲)$$

قضیه ۱۱.۲ برای هر $f \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ ، $g \in H^{-1/2}(\Gamma_I)$ و تابع مثبت $\lambda \in L^\infty(\Gamma_I)$ ، معادله (۱۸.۲) دارای جواب تشعشی $u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^m \setminus \bar{D})$ می‌باشد. به علاوه این جواب در رابطه زیر صادق است:

$$\|\chi u\|_{H^1(\mathbb{R}^m \setminus \bar{D})} \leq C(\|f\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} + \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma_I)}),$$

که C مقداری ثابت و $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ تابع برشی دلخواه با محمل فشرده است که در همسایگی D برابر یک می‌باشد.

برهان. $\tilde{f} \in H^{1/2}(\Gamma)$ و $\tilde{g} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ را به عنوان گسترش توابع f و g به کل Γ در نظر بگیرید. (بنابر قضیه A4 از [۳۳] چنین گسترشی موجود است.) در این صورت توابع $\psi_I \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_I)$ و $\psi_D \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)$ وجود دارند که

$$u = \psi_I + \tilde{f} \quad \text{روی } \Gamma \quad (۲۶.۲)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda u = \psi_D + \tilde{g} \quad \text{روی } \Gamma$$

یا این که

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi_D - i\lambda \psi_I + \tilde{g} - i\lambda \tilde{f} \quad \text{روی } \Gamma \quad (۲۷.۲)$$

واضح است که از روابط فوق نتیجه می‌شود $\psi_I \equiv 0$ روی Γ_D و $\psi_D \equiv 0$ روی Γ_I . اکنون می‌توان روابط (۲۵.۲) را به صورت زیر بیان کرد:

$$u = Ku - S \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda u = Tu - K' \frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda Ku - i\lambda S \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

با تحدید این روابط به Γ_D و Γ_I و جایگزینی (۲۶.۲) و (۲۷.۲) دستگاه معادلات انتگرالی زیر به دست می آید:

$$A \begin{pmatrix} \psi_D \\ \psi_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_D \\ \eta_I \end{pmatrix} \quad (28.2)$$

که η_D و η_I و A عبارتند از:

$$\eta_D = (-\tilde{f} + K\tilde{f} + iS\lambda\tilde{f} - S\tilde{g})|_{\Gamma_D}$$

$$\eta_I = (-\tilde{g} - K'\tilde{g} - i\lambda S\tilde{g} + T\tilde{f} + i\lambda K\tilde{f} + iK'\lambda\tilde{f} - \lambda S\lambda\tilde{f})|_{\Gamma_I}$$

$$A = \begin{pmatrix} S_{DD} & -K_{DI} - iS_{DI}\lambda \\ K'_{ID} + i\lambda S_{ID} & \lambda S_{II}\lambda - i\lambda K_{II} - iK'_{II}\lambda - T_{II} \end{pmatrix}.$$

در این روابط منظور از K'_{ID} همان عملگر K' است که بر تابع $\psi \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)$ اثر کرده و بر روی Γ_I محاسبه می شود، یعنی $K'_{ID}\psi = (K'\psi)|_{\Gamma_I}$. تنها باید توجه کرد که $K'_{ID}\psi \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D) \hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ و $K'\psi$ تعریف شده است. به همین ترتیب عملگرهای S_{DD} ، S_{DI} ، K_{DI} ، K'_{II} و T_{II} نیز به طور مشابه تعریف می شوند. در این صورت عملگر

$$A : \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_I) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma_D) \times H^{-1/2}(\Gamma_I)$$

پیوسته است.

برعکس اگر ψ_D و ψ_I در دستگاه معادلات انتگرالی (۲۸.۲) صدق کنند، آنگاه

$$u = \mathcal{D}(\psi_I + \tilde{f}) - S(\psi_D - i\lambda\psi_I + \tilde{g} - i\lambda\tilde{f}) \quad (29.2)$$

جواب معادله (۱۸.۲) خواهد بود. این مطلب با توجه به روابط (۲۴.۲) و (۲۸.۲) واضح است. بنابراین وجود جواب معادله (۱۸.۲) هم ارز وجود جواب دستگاه (۲۸.۲) می باشد. لم بعد نشان می دهد که A

عملگر فردهلم^۱ با شاخص صفر می‌باشد. به علاوه اثبات می‌کند که عملگر A یک به یک است، در نتیجه دوسویی است و وارون آن پیوسته است. بنابراین با توجه به پیوسته بودن عملگرهای انتگرالی K, S, K' و T و تساوی‌های مربوط به η_D و η_I نتیجه می‌شود

$$\|\psi_D\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)} + \|\psi_I\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_I)} \leq C(\|\tilde{f}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\tilde{g}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}). \quad (30.2)$$

اکنون با استفاده از رابطه (۲۹.۲) و کراننداری پتانسیل‌های لایه‌ای تکین و دوگانه (قضیه ۱۲.۶ در [۳۳]) و با توجه به کراننداری عملگرهای توسعه که \tilde{f} و \tilde{g} را تولید کرده‌اند، نتیجه می‌شود:

$$\|\chi u\|_{H^1(\mathbb{R}^m \setminus \bar{D})} \leq C(\|f\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}).$$

□

لم ۱۲.۲ اگر $H = \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_I)$ و دوگان آن $H^* = H^{1/2}(\Gamma_D) \times H^{1/2}(\Gamma_I)$ باشد، عملگر $A : H \rightarrow H^*$ را به صورت $A = A_0 + L_A$ می‌توان نوشت که $A_0 : H \rightarrow H^*$ مثبت و از پایین کراندار است، یعنی مقدار مثبت c وجود دارد که

$$\operatorname{Re}\langle A_0 \psi, \psi \rangle \geq c \|\psi\|_H^2 \quad : \psi \in H$$

و عملگر $L_A : H \rightarrow H^*$ خطی و فشرده است. در نتیجه A عملگر فردهلم با شاخص صفر است، به علاوه $\ker A = \{0\}$.

برهان. از قضایای ۶.۷ و ۸.۷ در [۳۳] نتیجه می‌شود که S و T را می‌توان به صورت $S = S_0 + L_S$ و $T = T_0 + L_T$ نوشت که L_S و L_T خطی و فشرده هستند. به علاوه مقدار مثبت c وجود دارد که

$$\operatorname{Re}\langle S_0 \psi, \psi \rangle \geq c \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad \psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

$$\operatorname{Re}\langle -T_0 \psi, \psi \rangle \geq c \|\psi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \quad \psi \in H^{1/2}(\Gamma)$$

حال اثر عملگرهای A_0 و L_A را بر روی $\psi = (\psi_D, \psi_I) \in H$ بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$A_0 \psi = \begin{pmatrix} (S_0 \psi_D - i S_0 \lambda \psi_I)|_{\Gamma_D} - K_{DI} \psi_I \\ (i \lambda S_0 \psi_D + \lambda S_0 \lambda \psi_I - T_0 \psi_I)|_{\Gamma_I} + K'_{ID} \psi_D - i \lambda K_{II} \psi_I - i K'_{II} \lambda \psi_I \end{pmatrix},$$

$$L_A \psi = \begin{pmatrix} (L_S \psi_D - i L_S \lambda \psi_I)|_{\Gamma_D} \\ (i \lambda L_S \psi_D + \lambda L_S \lambda \psi_I - L_T \psi_I)|_{\Gamma_I} \end{pmatrix}.$$

واضح است که $A = A_0 + L_A$ و عملگر L_A فشرده است. از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \langle A_0 \psi, \psi \rangle &= (S_0 \psi_D, \psi_D)_{\Gamma_D} - i (S_0 \lambda \psi_I, \psi_D)_{\Gamma_D} + i (\lambda S_0 \psi_D, \psi_I)_{\Gamma_I} + (\lambda S_0 \lambda \psi_I, \psi_I)_{\Gamma_I} - (T_0 \psi_I, \psi_I)_{\Gamma_I} \\ &\quad - (K_{DI} \psi_I, \psi_D)_{\Gamma_D} + (K'_{ID} \psi_D, \psi_I)_{\Gamma_I} - i (\lambda K_{II} \psi_I, \psi_I)_{\Gamma_I} - i (K'_{II} \lambda \psi_I, \psi_I)_{\Gamma_I}. \end{aligned}$$

با توجه به تعریف $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)$ و $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_I)$ ، ψ_D و ψ_I را می‌توان با صفر به کل Γ توسعه داد. بنابراین تمام زوج‌های بالا را می‌توان روی کل Γ محاسبه نمود. با توجه به این که K' عملگر الحاقی K می‌باشد، روابط زیر نتیجه خواهند شد:

$$(K'_{ID} \psi_D, \psi_I)_{\Gamma} = (\psi_D, K_{DI} \psi_I)_{\Gamma} = \overline{(K_{DI} \psi_I, \psi_D)_{\Gamma_D}}$$

$$(K'_{II} \lambda \psi_I, \psi_I)_{\Gamma} = (\lambda \psi_I, K_{II} \psi_I)_{\Gamma} = \overline{(K_{II} \psi_I, \lambda \psi_I)_{\Gamma}} = \overline{(\lambda K_{II} \psi_I, \psi_I)_{\Gamma}}$$

بنابراین

$$\operatorname{Re}(-(K_{DI} \psi_I, \psi_D)_{\Gamma_D} + (K'_{ID} \psi_D, \psi_I)_{\Gamma_I}) = 0$$

$$\operatorname{Re}(-i(\lambda K_{II} \psi_I, \psi_I)_{\Gamma_I} - i(K'_{II} \lambda \psi_I, \psi_I)_{\Gamma_I}) = 0$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}((S_0 \psi_D, \psi_D)_{\Gamma} - i(S_0 \lambda \psi_I, \psi_D)_{\Gamma} + i(\lambda S_0 \psi_D, \psi_I)_{\Gamma} + (\lambda S_0 \lambda \psi_I, \psi_I)_{\Gamma}) \\ &= \operatorname{Re}(S_0(\psi_D - i \lambda \psi_I), (\psi_D - i \lambda \psi_I))_{\Gamma} \geq c \|\psi_D - i \lambda \psi_I\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 \\ &= c(\|\psi_D\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)}^2 + \|\lambda \psi_I\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_I)}^2). \end{aligned}$$

همچنین

$$\operatorname{Re}(-T_0 \psi_I, \psi_I) \geq c \|\psi_I\|_{\dot{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 = c \|\psi_I\|_{\dot{H}^{1/2}(\Gamma_I)}^2$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A_0 \psi, \psi) &\geq c(\|\psi_D\|_{\dot{H}^{-1/2}(\Gamma_D)}^2 + \|\psi_I\|_{\dot{H}^{1/2}(\Gamma_I)}^2) \\ &= c\|\psi\|_{\dot{H}}^2 \end{aligned}$$

اکنون اثبات می‌کنیم که $\ker A = \{0\}$. فرض کنید $\psi = (\psi_D, \psi_I)$ در $A\psi = 0$ صدق کند. همان طور که قبلاً نیز اشاره شد ψ_D و ψ_I را می‌توان با صفر به کل Γ توسعه داد. با این فرض قرار دهید:

$$v = D\psi_I - S(\psi_D - i\lambda\psi_I).$$

v جواب معادله هلمولتز در $\mathbb{R}^m \setminus \Gamma$ است. اگر v^+ و v^- به ترتیب مقدار v در داخل و خارج D باشند، آنگاه

با توجه به رابطه $A\psi = 0$ ، این توابع در شرایط مرزی زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} 2\gamma v^\pm &= \pm\psi_I + K\psi_I - S(\psi_D - i\lambda\psi_I) = \pm\psi_I = 0 \quad \text{روی } \Gamma_D \\ 2\left(\frac{\partial v^\pm}{\partial \nu} + i\lambda v^\pm\right) &= T\psi_I \pm \psi_D - K'(\psi_D - i\lambda\psi_I) + i\lambda K\psi_I - i\lambda S(\psi_D - i\lambda\psi_I) \\ &= \pm\psi_D = 0 \quad \text{روی } \Gamma_I \end{aligned}$$

بنابر قضیای یکتایی ۹.۲ و ۱۰.۲، $v^\pm \equiv 0$. بنابراین

$$\begin{aligned} \psi_I = \gamma v^+ - \gamma v^- &= 0 \quad \text{روی } \Gamma \\ \psi_D - i\lambda\psi_I = \frac{\partial v^+}{\partial \nu} - \frac{\partial v^-}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{روی } \Gamma \end{aligned}$$

□

در نتیجه $\psi = (\psi_D, \psi_I) = 0$.

۳-۲ امواج الکترومغناطیس

در بخش‌های قبل مسأله مستقیم پراکندگی موج صوت بررسی شد. در این بخش نشان داده می‌شود که همان نتایج برای امواج الکترومغناطیس نیز برقرار است. اگر ε ، نفوذپذیری الکتریکی^۱، μ نفوذپذیری مغناطیسی^۲ و σ رسانایی الکتریکی باشد، امواج الکترومغناطیس با معادلات ماکسول^۳ بیان می‌شوند، که در این معادلات \mathcal{E} میدان الکتریکی و \mathcal{H} میدان مغناطیسی است:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathcal{E} + \mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{curl} \mathcal{H} - \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} &= \sigma \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (31.2)$$

مشابه امواج صوت، امواج الکترومغناطیس هارمونیک - زمانی با فرکانس $\omega > 0$ ، به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t) &= \operatorname{Re} \left\{ \left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right)^{-1/2} E(x) e^{-i\omega t} \right\}, \\ \mathcal{H}(x, t) &= \operatorname{Re} \left\{ \mu^{-1/2} H(x) e^{-i\omega t} \right\}. \end{aligned}$$

با جایگذاری این روابط در (۳۱.۲)، نتیجه می‌شود که E و H در معادلات ماکسول تقلیل یافته^۴ صدق می‌کنند.

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} E - ikH &= 0, \\ \operatorname{curl} H + ikE &= 0. \end{aligned} \quad (32.2)$$

در این معادلات مقدار ثابت k عدد موج است و از رابطه

$$k^2 = \left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right) \mu \omega^2,$$

به دست می‌آید. به علاوه k به گونه‌ای انتخاب می‌شود که $\operatorname{Im} k \geq 0$. قضیه زیر جواب‌های معادلات ماکسول را متناظر جواب‌های معادله هلمولتز می‌کند.

electric permittivity^۱
magnetic permeability^۲
Maxwell equations^۳
reduced Maxwell equations^۴

قضیه ۱۳.۲ اگر H و E جواب معادلات ماکسول باشند، آنگاه دیورژانس E و H صفر است و معادلات هلمولتز زیر برقرارند:

$$\Delta E + k^2 E = 0, \quad \Delta H + k^2 H = 0.$$

برعکس اگر E (یا H) جواب معادله برداری هلمولتز باشد که $\operatorname{div} E = 0$ (یا $\operatorname{div} H = 0$)، در این صورت

$$E \text{ و } H := \frac{\operatorname{curl} E}{ik} \text{ (یا } H \text{ و } E := \frac{-\operatorname{curl} H}{ik} \text{) در معادلات ماکسول صدق می کنند.}$$

امواج الکترومغناطیس منتشر شده E^i و H^i در معادلات (۳۲.۲) صدق می کنند و $E = E^i + E^s$ و $H = H^i + H^s$ میدان امواج را بعد از پراکندگی آن توسط مانع نشان می دهند که E^s و H^s میدان پراکنده شده نامیده می شوند. به علاوه E و H در معادلات (۳۲.۲) در $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ صدق می کنند. اگر D رسانای کامل باشد، شرط مرزی

$$\nu \times E = 0 \quad \text{روی } \partial D \quad (33.2)$$

حاکم است. اگر D رسانای کامل نباشد، امواج نمی توانند به طور عمقی در مانع نفوذ کنند، در این حالت شرط مرزی آمپدانس برقرار است، [۱۹] و [۴۱]:

$$\nu \times \operatorname{curl} E - i\lambda(\nu \times E) \times \nu = 0 \quad \text{روی } \partial D \quad (34.2)$$

مقدار λ که تابعی مثبت است آمپدانس سطح نامیده می شود. مشابه موانع صوت حالت کلی تر بدین صورت است که بعضی قسمت های سطح D به وسیله ماده ای پوشانده شود که نفوذ موج را به درون D کاهش دهد در این صورت شرط مرزی مرکب خواهد شد. در این حالت $\partial D = \Gamma_D \cup \Pi \cup \Gamma_I$ است که روی Γ_D شرط (۳۳.۲) و روی Γ_I شرط (۳۴.۲) برقرار است. در این حالت D را به طور موضعی پوشانده شده می نامند. در این حالت D ، بیانگر رسانای کاملی می باشد که به طور موضعی به وسیله عایق الکتریکی پوشانده شده است.

مشابه شرط تشعشی زامرفلد در امواج صوت، برای امواج الکترومغناطیس پراکنده شده شرط تشعشی سیلور-مولر^۱ برقرار است:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (E^s \times x + rH^s) = o, \quad r = |x|. \quad (۳۵.۲)$$

این رابطه حدی در تمام جهات $\frac{x}{|x|}$ به طور یکنواخت برقرار است. هر جواب معادله (۳۲.۲) که در شرط (۳۵.۲) صدق کند را جواب تشعشی معادلات ماکسول می‌نامند.

با استفاده از روابط گرین نتیجه می‌شود که هر جواب تشعشی معادلات ماکسول در روابط استراتون-چو^۲ صدق می‌کند. (قضیه ۶.۶ در [۱۴])

$$\begin{aligned} E(x) &= \operatorname{curl} \int_{\partial D} \nu(y) \times E(y) \Phi(x, y) ds(y) \\ &\quad - \frac{1}{ik} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \int_{\partial D} \nu(y) \times H(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \\ H(x) &= \operatorname{curl} \int_{\partial D} \nu(y) \times H(y) \Phi(x, y) ds(y) \\ &\quad + \frac{1}{ik} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \int_{\partial D} \nu(y) \times E(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}. \end{aligned}$$

همچنین در [۱۴] (قضیه ۸.۶) با استفاده از این روابط نشان داده شده است که هر جواب تشعشی دارای رفتار مجانبی به صورت زیر است که در تمام جهت $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ به طور یکنواخت برقرار می‌باشد:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ E^\infty(\hat{x}) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty, \\ H(x) &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ H^\infty(\hat{x}) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

میدان‌های برداری E^∞ و H^∞ که روی کره واحد تعریف می‌شوند به عنوان الگوهای میدان دور الکتریکی و مغناطیسی شناخته شده‌اند. مشابه امواج صوت، لم رلیش در اینجا نیز صادق است و اثبات می‌کند که جواب تشعشی معادلات ماکسول به طور یکتا از الگوهای میدان دور الکتریکی و مغناطیسی تعیین می‌شوند. (قضایای ۹.۶ و ۱۰.۶ در [۱۴]). در مسأله مستقیم پراکندگی امواج الکترومغناطیس بحث وجود و یکتایی

^۱ Silver-Müller

^۲ Stratton-Chu

جواب مطرح می‌شود. در [۱۴] با استفاده از پتانسیل‌های برداری، وجود و یکتایی جواب تشعشی برای شرط مرزی رسانای کامل اثبات شده است. همچنین در [۹] قضیه وجود و یکتایی برای نواحی لیپشیتز با شرایط مرزی مرکب را اثبات نموده است. در این حالت که مانع به طور موضعی پوشانده شده است، فرض بر این است که $\Gamma_I \neq \emptyset$ و λ مقداری ثابت است. البته همان اثبات برای زمانی که $\lambda \in L^\infty(\Gamma_I)$ تابعی مثبت باشد، برقرار است.

مسئله وارون پراکندگی امواج الکترومغناطیس مانند امواج صوت مطرح می‌شود. هدف تعیین ناحیه D با استفاده از اطلاعات الگوهای میدان دور امواج پراکنده شده موج E^i و H^i است. در حالت خاص امواج تخت در راستای d و قطبش p که به صورت زیر بیان می‌شوند، منتشر می‌شوند:

$$E^i(x, d, p) = \frac{i}{k} \operatorname{curl} \operatorname{curl} p e^{ikx \cdot d} = ik(d \times p) \times d e^{ikx \cdot d},$$

$$H^i(x, d, p) = \operatorname{curl} p e^{ikx \cdot d} = ikd \times p e^{ikx \cdot d}.$$

اگر E^s, H^s امواج پراکنده شده و E^∞ و H^∞ الگوهای میدان دور آن دو باشند، مسئله وارون مشهور پیدا کردن D با دانستن $E^\infty(\hat{x}, d, p)$ و $H^\infty(\hat{x}, d, p)$ برای یک مقدار p و همه جهات d است. از آنجا که نتایج به طور مشابه در این حالت نیز برقرار است از تکرار مطالب پرهیز کرده و بر روی امواج صوت متمرکز می‌شویم. لذا مراجع [۹]، [۱۴] و [۳۵] در ارائه این نتایج مفید هستند.

یکتایی در مسایل وارون پراکندگی موج

همان طور که در فصل قبل بیان شد، در مسأله مستقیم پراکندگی امواج با دانستن شکل مانع موج و خواص فیزیکی آن که شرایط مرزی را مشخص می‌کند، موج پراکنده شده و رفتار آن در فاصله بسیار دور یعنی، الگوی میدان دور، تعیین می‌شدند. مسأله وارون متناظر آن می‌تواند این گونه مطرح شود که با اطلاعات الگوی میدان دور، چگونه می‌توان شکل مانع را تعیین کرد. روش‌هایی که تا چند وقت اخیر برای مسأله وارون پراکندگی امواج به کار می‌رفتند، به این سؤال جواب کامل نمی‌دادند. در آن روش‌ها شرایط مرزی از قبل باید مشخص می‌بود. اولین روشی که بدون اطلاع از شرایط مرزی توانایی پیدا کردن مانع را داشت، در سال ۱۹۹۶ توسط کولتون^۱ و کرش^۲ پیشنهاد شد، [۱۲]. این روش که به روش نمونه‌برداری خطی معروف است، در فصل ۵ به طور دقیق بیان خواهد شد. در [۶] نشان داده شده است که این روش در سه حالت موانع نرم - صوت، سخت - صوت و به طور موضعی پوشیده شده کار می‌کند. در سال ۲۰۰۰ روش دیگری به نام روش منابع تکین توسط پاتهاست^۳ ارائه شد، [۳۹]. این روش نیز مانند روش نمونه‌برداری خطی بدون اطلاعات فیزیکی مانع، توانایی تشخیص آن را داشت. در [۳۵] این روش برای موانع نرم - صوت و سخت - صوت به کار برده شده است. همچنین در [۱۷] این روش برای موانع به طور موضعی پوشیده شده به کار رفته است. اگر مسأله وارون دقیق‌تر مطرح شود، تعیین خواص فیزیکی مانع از روی اطلاعات

Colton^۱

Kirsch^۲

Pott hast^۳

الگوی میدان دور نیز در صورت مسأله جا می‌گیرد. این که بتوان تعیین کرد که مانع سخت - صوت است یا نرم - صوت و یا این که به طور موضعی پوشیده شده است، یا در حالت امواج الکترومغناطیس بتوان مشخص کرد که مانع رسانای کامل است یا خیر. این مسأله در حالتی که با شرایط مرزی آمپدانس سروکار داریم با تعیین ضریب آمپدانس سطح کامل‌تر می‌شود. همچنین در حالت موانع به طور موضعی پوشیده شده می‌تواند این سؤال مطرح می‌شود که کدام قسمت از سطح پوشیده شده است؟ بنابراین در کلی‌ترین حالت که همان موانع به طور موضعی پوشیده شده هستند، مسایل وارون را در چهار سؤال می‌توان مطرح کرد:

(۱) چگونه شکل مانع موج را بازسازی کنیم؟ آیا این بازسازی جواب یکتا دارد؟

(۲) آیا می‌توان شرایط مرزی را تعیین کرد؟ آیا مانع به طور موضعی پوشیده شده است یا خیر؟

(۳) کدام قسمت از سطح پوشیده شده است؟ آیا می‌توان به جواب یکتا رسید؟

(۴) خواص الکتریکی سطح پوشیده شده چیست؟ آیا ضریب آمپدانس به طور یکتا تعیین می‌شود؟

همان طور که اشاره شد در جواب سؤال اول به وسیله روش نمونه‌برداری خطی، [۶] و روش منابع تکین، [۱۷] می‌توان شکل مانع را تعیین کرد. همچنین در [۱۶] و در [۱۷] یکتایی بازسازی شکل مانع اثبات شده است. به علاوه در [۲۸] به وسیله روش نیوتن که در فصل ۵ توضیح داده خواهد شد، شکل و ضریب آمپدانس تعیین شده است. منتها در آنجا فرض بر این است که شکل مانع ستاره‌وار است و تمام سطح آن پوشانده شده است، یعنی $\Gamma_D = \emptyset$. در ضمن در [۱۳] و [۲۸] با فرض $\Gamma_D = \emptyset$ ، یکتایی بازسازی شکل و ضریب آمپدانس سطح اثبات شده است. در [۷] با به کارگیری روش وردشی^۱ سوپریمم ضریب آمپدانس سطح تعیین شده است. این مطلب در [۱۶] با استفاده از روش منبع نقطه‌ای کامل شده است. به وسیله آن می‌توان ضریب آمپدانس را به طور دقیق تعیین کرد. همچنین جواب سؤال‌های ۲ و ۳ به طور کامل داده می‌شود.

تمام دستاوردهایی که در پاسخ به سؤال وارون در بالا اشاره شد، همگی با فرض دانستن الگوی میدان دور به طور کامل برای تمام جهاتی است که موج تخت منتشر می‌شود، یعنی با فرض دانستن $u^\infty(\hat{x}, d)$ برای هر $\hat{x}, d \in \Omega$. همه این سؤالات می‌تواند با فرض‌های کمتر نیز مطرح شود. در این فصل بحث یکتایی تعیین شکل مانع با فرض‌های کمتر مطرح می‌شود و دستاوردهای کنونی در این راستا ارائه می‌گردد. همچنین در رابطه با مسأله یکتایی تعیین شکل مانع، ضریب امپدانس و بخش پوشیده شده در یک بخش جداگانه بحث خواهد شد.

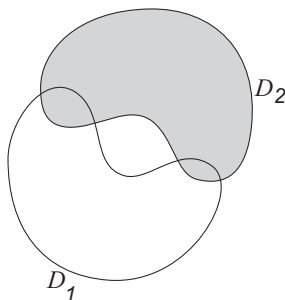
۳-۱ یکتایی در بازتابی مانع نرم - صوت

در این بخش بررسی می‌شود که مانع نرم - صوت تحت چه شرایطی از روی الگوی میدان دور آن به طور یکتا تعیین می‌شود. قضیه زیر که ایده‌های آن منتسب به شیفر^۱ است، یکتایی را با اطلاعات بی‌نهایت موج تخت منتشر شده نتیجه می‌دهد، [۲۹].

قضیه ۱.۳ D_1 و D_2 دو مانع نرم - صوت می‌باشند که الگوهای میدان دور به دست آمده از روی پدیده پراکندگی این دو مانع برای تعداد نامتناهی موج تخت که در جهات یکسان و عدد موج ثابت منتشر شده‌اند، یکسان می‌باشند. در این صورت $D_1 = D_2$.

برهان. فرض کنید $u_1^s(x, d)$ و $u_2^s(x, d)$ به ترتیب میدان‌های پراکنده شده موج تخت $e^{ikx \cdot d}$ توسط موانع D_1 و D_2 باشند. اگر $D_1 \neq D_2$ و G مؤلفه همبندی بی‌کران $\mathbb{R}^m \setminus D_1 \cup D_2$ باشد، آنگاه با استفاده از لم رلیش نتیجه می‌شود که برای هر d که الگوهای میدان دور u_1^s و u_2^s برابر است، خود میدان‌های پراکنده شده نیز برابرند.

$$u_1^s(x, d) = u_2^s(x, d), \quad x \in G.$$



شکل ۱-۳:

بنابراین

$$u_1 = u_1^s + u^i = u_2^s + u^i = u_2, \quad x \in G$$

و روی ∂G ، $u_1 = u_2 = 0$. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می توان فرض کرد که $D^* = (\mathbb{R}^3 \setminus G) \setminus \bar{D}_2$. ناتهی است. در این صورت u_2 در D^* تعریف شده است و روی مرز D^* ، $u_2 = 0$. بنابراین u_2 تابع ویژه دیریکله $-\Delta$ برای مقدار ویژه k^2 در ناحیه D^* است. قابل ذکر است که $u_2 \in H_0^1(D^*)$. زیرا u_2 جواب معادله بیضوی در D^* است، پس $u_2 \in H^1(D^*)$ و بنابر شرایط مرزی معادله هلمولتز اثر آن روی ∂D_2 برابر صفر است و چون u_2 خارج D_2 هموار و بلکه تحلیلی است، اثر آن روی $\partial D_1 \cap \partial D^*$ برابر تحدید آن است و با توجه به تساوی u_1 و u_2 در G نتیجه می شود که اثر u_1 و u_2 روی $\partial D_1 \cap \partial D^*$ برابر است. بنابراین اثر u_2 روی مرز D^* برابر صفر است.

اثبات این قضیه با نشان دادن این مطلب که توابع $u_2(\cdot, d)$ برای مقادیر مختلف d مستقل خطی هستند

به پایان می رسد، چرا که تعداد توابع ویژه مستقل متناظر یک مقدار ویژه، متناهی است. فرض کنید

$$\sum_{n=1}^N c_n u_2(\cdot, d_n) = 0, \quad \text{در } D^* \quad (1.3)$$

با توجه به این که جواب‌های معادله بیضوی تحلیلی هستند، نتیجه می‌شود که در خارج کره‌ای شامل D_1 و D_2 رابطه (۱.۳) همچنان برقرار است.

$$\sum_{n=1}^N c_n (e^{ikx \cdot d_n} + u_{\dot{\gamma}}^s(x, d_n)) = 0.$$

با توجه به رفتار مجانبی $u_{\dot{\gamma}}^s(x, d_n) = o(\frac{1}{|x|})$ می‌شود که برای هر مقدار $m = 1, \dots, N$:

$$\frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^N c_n \int_{|x|=R} e^{ikx \cdot (d_n - d_m)} ds(x) = o\left(\frac{1}{R}\right), \quad R \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

از طرف دیگر مقدار انتگرال فوق برابر است با:

$$\int_{|x|=R} e^{ikx \cdot (d_n - d_m)} ds(x) = \frac{4\pi R \sin(kR|d_n - d_m|)}{k|d_n - d_m|}, \quad n \neq m.$$

با جایگذاری در رابطه (۲.۳) و برقراری حد $R \rightarrow \infty$ نتیجه می‌شود، $c_m = 0$ برای $m = 1, \dots, N$. یعنی توابع $u_{\dot{\gamma}}(\cdot, d_n)$ مستقل خطی هستند. در پایان اثبات می‌کنیم که تعداد توابع ویژه مستقل خطی متناظر مقدار ویژه k^2 در ناحیه D^* متناهی است. $\{u_n\}$ را دنباله نامتناهی از این توابع در نظر بگیرید. با روش گرام-اشمیت می‌توان فرض کرد

$$\int_{D^*} u_n \overline{u_m} = \delta_{mn}.$$

δ_{mn} علامت دلتای کرونیکر^۱ است. با استفاده از قضیه گرین نتیجه می‌شود که

$$\int_{D^*} |\nabla u_n|^2 dx = k^2 \int_{D^*} |u_n|^2 = k^2$$

بنابراین دنباله $\{u_n\}$ در $H_0^1(D^*)$ کراندار است. بنا بر قضیه رلیش^۲ که بیان می‌کند، $H_0^1(D^*) \hookrightarrow L^2(D^*)$ به طور فشرده، نتیجه می‌شود که دنباله $\{u_n\}$ زیردنباله همگرا در $L^2(D^*)$ دارد. ولی این مطلب با این نکته که $\|u_n - u_m\|_{L^2(D^*)}^2 = 2$ متناقض است. □

^۱ Kronecker

^۲ Rellich

قضیه زیر نشان می‌دهد که اگر اندازه مانع مشخص باشد، می‌توان آن را به وسیله الگوی میدان دور تعداد متناهی موج تخت منتشر شده به طور یکتا تعیین کرد. در این قضیه t_{nl} صفرهای مثبت توابع بسل j_n می‌باشند. برای تعریف دقیق این توابع به [۱۳] و [۱۴] مراجعه شود.

قضیه ۲.۳ D_1 و D_2 دو مانع پراکنده کننده موج هستند، که در گوی به شعاع R قرار می‌گیرند. فرض کنید الگوی میدان دور متناظر $N + 1$ موج تخت که در جهات مختلف با عدد موج ثابت منتشر شده‌اند، برای مواع D_1 و D_2 یکسان باشند که

$$N := \sum_{t_{nl} < kR} (2n + 1).$$

در این صورت $D_1 = D_2$.

برهان. D^* مانند قضیه قبل تعریف می‌شود. در این صورت مقادیر ویژه دیریکله $-\Delta$ ، نسبت به ناحیه نزولی است، (قضیه ۷-۶ در [۳۰]) یعنی اگر $D_1 \subseteq D_2$ ، n -امین مقدار ویژه D_2 کوچکتر از n -امین مقدار ویژه D_1 است. بنابراین اگر $\lambda_m = k^2$ $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m = k^2$ تمام مقادیر ویژه D^* باشند که کوچکتر یا مساوی k^2 می‌باشند، در این صورت m -امین مقدار ویژه گوی به شعاع R کمتر از k^2 است. از طرف دیگر مقادیر ویژه گوی به شعاع R متناظر ریشه‌های توابع بسل j_n بوده و برابر $\frac{t_{nl}^2}{R^2}$ می‌باشند و تکرر هر یک برابر $(2n + 1)$ است، [۱۴]. با این مطلب مشخص است که D^* ، $N + 1$ تابع ویژه مستقل خطی متناظر مقدار ویژه k^2 ندارد. \square

از قضیه فوق نتیجه می‌شود که اگر قطر مانع موج به اندازه کافی کوچک باشد یعنی $kR < \pi$ ، با تنها یک موج تخت می‌توان آن را به طور یکتا تشخیص داد. همچنین به طور مشابه می‌توان مانع را با تعداد نامتناهی موج تخت که در یک جهت منتشر شده و عدد موج آنها متفاوت است تعیین کرد، به شرط آن که بی‌نهایت نقطه جمعی اعداد موج نباشد. همچنین مشابه قضیه ۲.۳، برای تعداد متناهی موج با اعداد موج متفاوت و جهت یکسان برقرار است.

در [۳]، برای حالتی که D یک چندوجهی باشد، قضیه یکتایی برای تنها یک موج تخت در یک راستا و یک عدد موج ثابت بررسی شده است. ولی همچنان این مسأله در حالت کلی تر خود حتی در زمانی که D ناحیه‌ای هموار باشد، باز است.

۳-۲ یکتایی در بازیابی مانع سخت - صوت

ایده شیفر که در قضیه ۱.۳ بیان شد، در حالتی که مانع D ، سخت - صوت باشد، قابل استفاده نمی‌باشد. مشکل آن در زمانی است که قضیه نشان‌دهنده رلیش مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این حالت توابع ویژه دیگر در $H_0^1(D^*)$ قرار ندارند، بلکه از کلاس $H^1(D^*)$ می‌باشند و برای این که نشان‌دهنده $L_2(D^*) \hookrightarrow H^1(D^*)$ فشرده باشد، باید مرز D^* هموار باشد. واضح است که این شرط نمی‌تواند برقرار باشد، چرا که D^* هر ناحیه‌ای می‌تواند باشد.

ایزاکوف در [۲۱] ایده‌ای متفاوت با ایده شیفر بیان کرده است تا یکتایی را برای موانع نفوذپذیر اثبات کند. ایده وی برای موانع نفوذناپذیر سخت - صوت نیز به کار می‌آید. از آنجا که این ایده برای زمانی که مانع به طور موضعی پوشیده شده باشد نیز استفاده می‌شود، اثبات قضیه یکتایی به بخش بعد برای موانع به طور موضعی پوشیده شده موکول می‌شود. تنها نکته‌ای که در آخر این بخش اشاره می‌شود این است که یکتایی در این حالت با استفاده از اطلاعات کامل الگوی میدان دور $u^\infty(\hat{x}, d)$ برای تمام مقادیر $\hat{x}, d \in \Omega$ به دست می‌آید. بحث یکتایی با اطلاعات محدودتر در این حالت همچنان جزء مسایل باز نظریه پراکندگی موج است.

۳-۳ یکتایی در بازیابی مانع به طور موضعی پوشیده شده

همان طور که در ابتدای این فصل توضیح داده شد، یکتایی مسأله وارون در حالتی که مانع موج به طور موضعی پوشیده شده باشد، تنها به این مطلب محدود نمی‌شود که شکل مانع با اطلاعات کامل الگوی میدان دور به طور یکتا تعیین می‌شود یا خیر، بلکه سؤال یکتایی در مورد ضریب آمپدانس و ناحیه پوشیده شده مرز

۳-۳ یکتایی در بازیابی مانع به طور موضعی پوشیده شده _____ ۴۸
 نیز مطرح است.

ایده اثبات یکتایی در این حالت در بررسی رفتار میدان امواج پراکنده شده یک منبع صوت نقطه‌ای است. $\Phi^s(\cdot, z)$ را میدان امواج پراکنده شده برای موج منتشر شده $\Phi(\cdot, z)$ می‌گیریم. یعنی $\Phi^s(\cdot, z)$ جواب تشعشی معادله هلمولتز با شرط مرزی مرکب زیر است:

$$\begin{aligned} \Phi^s(\cdot, z) &= -\Phi(\cdot, z), & \text{روی } \Gamma_D \\ \frac{\partial \Phi^s(\cdot, z)}{\partial \nu} + i\lambda \Phi^s(\cdot, z) &= -\frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial \nu} - i\lambda \Phi(\cdot, z), & \text{روی } \Gamma_I \end{aligned}$$

الگوی میدان دور $\Phi^s(\cdot, z)$ با $\Phi^\infty(\hat{x}, z)$ نشان داده می‌شود. قضیه زیر رابطه بین $\Phi^\infty(\hat{x}, z)$ و میدان امواج پراکنده شده موج تخت را نشان می‌دهد.

قضیه ۳.۳ اگر D مانع به طور موضعی پوشیده شده باشد و $d \in \Omega$ ، امواج تخت و $\Phi(\cdot, z)$ ، منبع نقطه‌ای موج صوت باشند، آنگاه $z \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$

$$\Phi^\infty(\hat{x}, z) = \gamma_m u^s(z, -\hat{x}), \quad z \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{D}, \hat{x} \in \Omega, \quad (3.3)$$

که در این رابطه

$$\gamma_m = \begin{cases} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\lambda \pi k}}, & m = 2, \\ \frac{1}{4\pi}, & m = 3. \end{cases}$$

برهان. $u^i(\cdot, d)$ و $\Phi(\cdot, z)$ جوابهای معادله هلمولتز درون D هستند. بنابراین با استفاده از رابطه گرین نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} u^i(y, d) \frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^i(y, d)}{\partial \nu(y)} \Phi(y, z) ds(y) \\ &= \int_D u^i(y, d) \Delta_y \Phi(y, z) - \Delta u^i(y, d) \Phi(y, z) dy = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

همچنین از رابطه قضیه ۱.۲ نتیجه می‌شود:

$$u^s(x, d) = \int_{\partial D} \left\{ u^s(y, d) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^s(y, d)}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) \right\} ds(y). \quad (5.3)$$

با جمع دو رابطه (۴.۳) و (۵.۳) نتیجه می‌شود که رابطه زیر برای $x \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$ برقرار است:

$$\begin{aligned} u^s(x, d) &= \int_{\partial D} \left\{ u(y, d) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u(y, d)}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) \right\} ds(y) \\ &= \int_{\Gamma_D} \left\{ u(y, d) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u(y, d)}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) \right\} ds(y) + \\ &\quad + \int_{\Gamma_I} \left\{ u(y, d) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u(y, d)}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) \right\} ds(y) \\ &= \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u(y, d)}{\partial \nu(y)} \Phi^s(x, y) ds(y) + \\ &\quad + \int_{\Gamma_I} \left\{ u(y, d) (-i\lambda(\Phi(x, y) + \Phi^s(x, y))) - \frac{\partial \Phi^s(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds \\ &\quad - \int_{\Gamma_I} (-i\lambda u(y, d)) \Phi(x, y) ds \\ &= \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u(y, d)}{\partial \nu(y)} \Phi^s(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma_I} \left\{ -i\lambda u(y, d) \Phi^s(x, y) - u(y, d) \frac{\partial \Phi^s(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \\ &= \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u(y, d)}{\partial \nu(y)} \Phi^s(x, y) - u(y, d) \frac{\partial \Phi^s(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) \\ &\quad + \int_{\Gamma_I} \left\{ \frac{\partial u(y, d)}{\partial \nu(y)} \Phi^s(x, y) - u(y, d) \frac{\partial \Phi^s(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \\ &= \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u(y, d)}{\partial \nu(y)} \Phi^s(x, y) - u(y, d) \frac{\partial \Phi^s(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \end{aligned} \quad (6.3)$$

از طرف دیگر با استفاده از رابطه (۱۳.۲) به دست می‌آید که

$$\Phi^\infty(\hat{x}, z) = \gamma_m \int_{\partial D} \left\{ \Phi^s(y, z) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi^s(y, z)}{\partial \nu(y)} e^{-ik\hat{x}\cdot y} \right\} ds(y). \quad (7.3)$$

همچنین بنابر لم ۴.۳ که بعد از اثبات قضیه می‌آید، رابطه زیر برقرار است

$$\int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u^s(y, d)}{\partial \nu(y)} \Phi^s(y, z) - u^s(y, d) \frac{\partial \Phi^s(y, z)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) = 0. \quad (8.3)$$

۳-۳ یکنایی در بازیابی مانع به طور موضعی پوشیده شده \square ۵

اکنون با جایگزینی $-\hat{x}$ به جای d در رابطه (۸.۳) و با جمع γ_m برابر آن با (۷.۳) نتیجه می شود

$$\Phi^\infty(\hat{x}, z) = \gamma_m \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u(y, -\hat{x})}{\partial \nu(y)} \Phi^s(z, y) - u(y, -\hat{x}) \frac{\partial \Phi^s(z, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y).$$

با مقایسه این رابطه و (۶.۳) اثبات قضیه کامل می شود. \square

اکنون رابطه (۸.۳) را در لم زیر اثبات می کنیم.

لم ۴.۳ اگر D مانع به طور موضعی پوشیده شده باشد و $u^s(x, d)$ و $\Phi^s(x, z)$ میدان های امواج پراکنده شده امواج تخت و منبع نقطه ای باشند، آنگاه برای هر $x \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$ و $d \in \Omega$ رابطه زیر برقرار است:

$$\int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u^s(y, d)}{\partial \nu(y)} \Phi^s(x, y) - u^s(y, d) \frac{\partial \Phi^s(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) = 0$$

برهان. اگر Ω_r کره به شعاع r باشد که \bar{D} درون آن واقع است، با استفاده از رابطه گرین در ناحیه $B_r \setminus D$ نتیجه می شود

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u^s(y, d)}{\partial \nu(y)} \Phi^s(y, z) - u^s(y, d) \frac{\partial \Phi^s(y, z)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \\ &= \int_{\Omega_r} \left\{ \frac{\partial u^s(y, d)}{\partial \nu(y)} \Phi^s(y, z) - u^s(y, d) \frac{\partial \Phi^s(y, z)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \end{aligned} \quad (9.3)$$

از طرف دیگر اگر v یک جواب تشعشی معادله هلمولتز در خارج D باشد، بنابر روابط (۱۴.۲) و (۱۵.۲) نتیجه می شود

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} \left(\left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 |v|^2 \right) ds = -2k \operatorname{Im} \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu}.$$

از آنجا که هر دو عبارت سمت چپ مثبت می باشند و مقدار سمت راست منتهای است، نتیجه می شود که

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} |v|^2 ds < \infty.$$

همچنین با توجه به رابطه تشعشی (۱۱.۲) نتیجه می شود، رابطه زیر برقرار است:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} - ikv \right|^2 ds = 0.$$

اکنون با استفاده از این روابط برای توابع $u^s(\cdot, d)$ و $\Phi^s(x, \cdot)$ و نامساوی کوشی شوارتز نتیجه می‌شود که

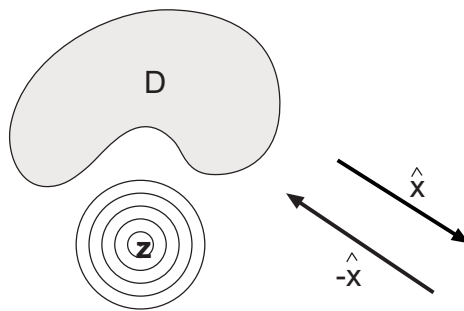
$$\int_{\Omega_r} \left\{ \frac{\partial u^s(y, d)}{\partial \nu(y)} \Phi^s(y, z) - u^s(y, d) \frac{\partial \Phi^s(y, z)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \\ = \int_{\Omega_r} \left\{ \left(\frac{\partial u^s}{\partial \nu} - iku^s \right) \Phi^s - u^s \left(\frac{\partial \Phi^s}{\partial \nu} - ik\Phi^s \right) \right\} ds(y) \rightarrow 0$$

در نهایت با توجه به رابطه (۹.۳)، اثبات کامل می‌شود. \square

تذکر ۵.۳ قضیه ۳.۳ برای حالت‌های دیگر وقتی مانع سخت - صوت یا نرم - صوت است نیز برقرار است، [۳۵]. این رابطه بیان می‌کند که می‌توان نقش منبع موج را با نقش دریافت کننده موج عوض کرد. در واقع رفتار میدان دور امواج پراکنده شده یک منبع نقطه‌ای در نقطه z که در راستای \hat{x} محاسبه شود، مشابه رفتار امواج پراکنده شده در نقطه z در اثر برخورد موج تخت در راستای $-\hat{x}$ است. مشابه این رابطه که در منابع قدیمی‌تر نظریه پراکندگی موج مانند [۱۴] پیدا می‌شود، رابطه‌ای تقابلی بین الگوهای میدان دور امواج تخت بیان می‌کند.

$$u^\infty(\hat{x}, d) = u^\infty(-d, -\hat{x}), \quad \hat{x}, d \in \Omega.$$

این رابطه بدین معنا است که اگر موج تختی در راستای d منتشر شود و میدان دور امواج پراکنده شده آن در راستای \hat{x} محاسبه شود، این میدان مشابه زمانی است که موج تخت در راستای $-\hat{x}$ منتشر شود و به امواج پراکنده شده آن در راستای $-d$ نگاه شود.



شکل ۳-۲:

اینک با استفاده از رابطه (۳.۳) یکتایی مسأله وارون مانع به طور موضعی پوشیده شده را بیان می‌کنیم.

قضیه ۶.۳ D_1 و D_2 دو مانع به طور موضعی پوشیده شده می‌باشند که تجزیه لپشیتز مرز آنها عبارتست از $\partial D_1 = \Gamma_D^1 \cup \Pi^1 \cup \Gamma_I^1$ و $\partial D_2 = \Gamma_D^2 \cup \Pi^2 \cup \Gamma_I^2$. همچنین λ_1 و λ_2 امیدانس سطح آنها می‌باشند. اگر الگوهای میدان دور آن دو برای امواج تخت در همه جهات یکسان باشند، آنگاه $D_1 = D_2$ ، $\lambda_1 = \lambda_2$ و $\Gamma_I^1 = \Gamma_I^2$ ، $\Gamma_D^1 = \Gamma_D^2$.

برهان. فرض کنید $D_1 \neq D_2$ و G مولفه همبندی بی‌کران مکمل $D_1 \cup D_2$ باشد. لم رلیش و تساوی $u_1^\infty(\hat{x}, d) = u_2^\infty(\hat{x}, d)$ نتیجه می‌دهند که:

$$u_1^s(x, d) = u_2^s(x, d), \quad x \in G, \quad d \in \Omega.$$

با توجه به قضیه ۳.۳ می‌توان نتیجه گرفت که

$$\Phi_1^\infty(\hat{x}, z) = \Phi_2^\infty(\hat{x}, z), \quad \hat{x} \in \Omega, \quad z \in G.$$

اگر دوباره از لم رلیش استفاده کنیم به تساوی زیر می‌رسیم

$$\Phi_1^s(x, z) = \Phi_2^s(x, z), \quad x, z \in G. \quad (۱۰.۳)$$

بدون کم شدن از کلیت اثبات می‌توان فرض کرد $z_0 \in \Gamma_D^1 \cup \Gamma_I^1$ وجود دارد که $z_0 \notin \bar{D}_2$. بنابراین همسایگی U از z_0 موجود است که \bar{D}_2 را قطع نمی‌کند. به علاوه در این همسایگی تعریف شده است و تحلیلی می‌باشد. با استفاده از رابطه (۱۰.۳) نتیجه می‌شود، اثر $\Phi_1^s(\cdot, z)$ روی $\partial D_1 \cap U$ برابر $\Phi_2^s(\cdot, z)|_{\partial D_1}$ است. به طور مشابه $\frac{\partial \Phi_1^s}{\partial \nu}(\cdot, z) = \frac{\partial \Phi_2^s}{\partial \nu}(\cdot, z)$ روی $\partial D_1 \cap U$ در اینجا می‌توان دو حالت مختلف را فرض کرد:

حالت اول ($z_0 \in \Gamma_D^1$): در این صورت فرض می‌کنیم $\partial D_1 \cap U \subseteq \Gamma_D^1$. آنگاه:

$$\Phi_2^s(\cdot, z) = \Phi_1^s(\cdot, z) = -\Phi(\cdot, z) \quad \text{برای هر } z \in G \text{ روی } \partial D_1 \cap U$$

تساوی فوق در کلاس $H^{1/2}(\Gamma_D^1)$ می باشد، ولی با توجه به پیوستگی توابع $\Phi(\cdot, z)$ و $\Phi^s(\cdot, z)$ در همسایگی $\partial D_1 \cap U$ می توان نتیجه گرفت که این تساوی به طور نقطه ای نیز برقرار است. به خصوص

$$\Phi^s(z_0, z) = -\Phi(z_0, z), \quad z \in G.$$

اگر $z \rightarrow z_0$ آنگاه سمت راست تساوی به بی نهایت میل خواهد نمود در صورتی که سمت چپ کراندار است. زیرا $\Phi^s(\cdot, z_0)$ در همسایگی z_0 تحلیلی است و سمت چپ به $\Phi^s(z_0, z_0)$ میل می کند. حالت دوم ($z_0 \in \Gamma_I^1$): در این صورت با فرض $\partial D_1 \cap U \subseteq \Gamma_I^1$ نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^s}{\partial \nu}(\cdot, z) + i\lambda_1 \Phi^s(\cdot, z) &= \frac{\partial \Phi_1^s}{\partial \nu}(\cdot, z) + i\lambda_1 \Phi_1^s(\cdot, z) \\ &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\cdot, z) - i\lambda_1 \Phi(\cdot, z) \quad \partial D_1 \cap U \text{ روی } z \in G \text{ هر} \end{aligned}$$

این تساوی نیز در کلاس $H^{-1/2}(\Gamma_I^1)$ برقرار است و مشابه قبل به دلیل پیوستگی دو طرف تساوی در همسایگی $\partial D_1 \cap U$ ، نتیجه می شود که این تساوی به طور نقطه ای نیز برقرار است، به خصوص در نقطه z_0 . بنابراین:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \Phi^s}{\partial \nu}(z_0, z) + i\lambda_1(z_0) \Phi^s(z_0, z) \right| &= \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(z_0, z) + i\lambda_1(z_0) \Phi(z_0, z) \right| \\ &= \left| \frac{1}{|z - z_0|} - ik \right| |\nu(z_0) + i\lambda_1(z_0)| |\Phi(z, z_0)|. \end{aligned}$$

بنابراین به طور مشابه اگر $z \rightarrow z_0$ سمت راست به بی نهایت میل می کند در حالی که سمت چپ کراندار است. در نتیجه $D_1 = D_2$.

برای اثبات $\Gamma_D^1 = \Gamma_D^2$ و $\Gamma_I^1 = \Gamma_I^2$ توجه نمایید که برای هر $d \in \Omega$

$$u_1^s(x, d) = u_2^s(x, d), \quad x \notin \bar{D}_1 = \bar{D}_2.$$

بنابراین $u_1(\cdot, d) = u^i + u_1^s = u^i + u_2^s = u_2(\cdot, d)$ حال اگر $x_0 \in \Gamma_D^1 \cap \Gamma_I^2$ ، آنگاه مجموعه باز

$W \subseteq \Gamma_D^1 \cap \Gamma_I^2$ حول نقطه x_0 وجود دارد. با توجه به شرایط مرزی روی W نتیجه می شود:

$$u_1(\cdot, d) = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \nu}(\cdot, d) + i\lambda_2 u_2(\cdot, d) = 0$$

۳-۳ یکتایی در بازیابی مانع به طور موضعی پوشیده شده _____ ۵۴

با توجه به تساوی $u_1(\cdot, d) = u_2(\cdot, d)$ نتیجه می‌شود، $\frac{\partial u_2}{\partial \nu}(\cdot, d) = 0$ روی W . در نتیجه با استفاده از قضیه یکتایی هلمگرین^۴ و تحلیلی بودن u_2 در خارج D_2 نتیجه می‌شود، $u_2(\cdot, d) = 0$ در $\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}_2$. البته قضیه هلمگرین به شرط پیوستگی شرایط مرزی برقرار است، هرچند با استفاده از قضیه همواری جواب معادله بیضوی روی مرز می‌توان پیوستگی u_2 را اثبات نمود، ولی ایده‌ای مشابه قضیه ۱۰.۲ نیز مشکل را برطرف می‌کند. بنابراین:

$$u_2^*(x, d) = -u^i(x, d) = -e^{ikx \cdot d}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{D}_2.$$

ولی تابع $e^{ikx \cdot d}$ در رابطه تشعشی (۱۱.۲) صدق نمی‌کند. این تناقض نشان می‌دهد $\Gamma_D^1 = \Gamma_D^2$ و $\Gamma_I^1 = \Gamma_I^2$. در نهایت با استفاده از شرایط مرزی آمپدانس روی $\Gamma_I^1 = \Gamma_I^2$ نتیجه می‌شود، $\lambda_1 = \lambda_2$. □

پراکندگی موج در محیط ناهمگن

همان طور که در بخش ۲ بیان شد، میدان امواج در محیط ناهمگن به وسیله معادله زیر مدل می‌شوند که در آن تابع n شاخص انکسار موج نامیده می‌شود.

$$\Delta u + k^2 n u = 0 \quad \text{در } \mathbb{R}^m \quad (1.4)$$

اگر محمل تابع $n - 1$ ، ناحیه فشرده D باشد، معادله فوق حاکی از محیط ناهمگن D می‌باشد که در یک محیط همگن با شاخص $n = 1$ قرار گرفته است. موج منتشر شده u^i ، در معادله

$$\Delta u^i + k^2 u^i = 0 \quad \text{در } \mathbb{R}^m$$

صدق می‌کند. u^i جواب سرتاسری معادله هلمولتز است. بعد از گذر u^i از ناحیه D میدان امواج تولید شده از معادله (۱.۴) پیروی می‌کند. میدان پراکنده شده که برابر $u^s = u - u^i$ است، در رابطه تشعشعی زامرفلد صدق می‌کند. الگوی میدان دور نیز مانند محیط‌های همگن از رابطه (۱۷.۲) به دست می‌آید. در نهایت مسأله پراکندگی موج در محیط ناهمگن را می‌توان بدین صورت مدل کرد:

$$\Delta u + k^2 n u = 0 \quad \text{در } \mathbb{R}^m$$

$$u = u^i + u^s \quad (2.4)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - i k u^s \right) = 0$$

۱-۴ مسأله مستقیم پراکندگی موج صوت در محیط ناهمگن _____ ۵۶

مسأله وارون در این حالت شناسایی محمل تابع $n - 1$ ، یعنی D ، با دانستن الگوی میدان دور u^∞ است. همچنین می‌تواند مسأله در رابطه با شناسایی تابع n با اطلاعات u^∞ مطرح شود.

۱-۴ مسأله مستقیم پراکندگی موج صوت در محیط ناهمگن

در مسأله مستقیم بحث وجود و یکتایی جواب مطرح است. برای حل این مسأله ابتدا آن را با یک معادله انتگرالی هم‌ارز کرده سپس وجود و یکتایی جواب معادله را بررسی می‌کنیم. در این فصل فرض می‌کنیم شاخص انکسار دارای این خواص است که $n \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ، $\text{Re } n > 0$ و $\text{Im } n \geq 0$ ، به علاوه $m = 1 - n$ دارای محمل فشرده است.

قضیه ۱.۴ اگر $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ جواب معادله (۲.۴) باشد آنگاه u جواب معادله انتگرالی

$$u(x) = u^i(x) - k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y) m(y) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (3.4)$$

می‌باشد. بالعکس اگر $u \in C(\mathbb{R}^3)$ جواب معادله انتگرالی فوق باشد آنگاه $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ و در معادله (۲.۴) صدق می‌کند.

برهان. قضیه ۳.۸ در [۱۴]. □

معادله انتگرالی مطرح شده در قضیه فوق به معادله لیپمن - شوینگر^۱ معروف است. اگر B ناحیه

کرانداری باشد که محمل m درون آن قرار دارد و عملگر انتگرالی T_m بدین صورت تعریف شود:

$$(T_m u)(x) = \int_B \Phi(x, y) m(y) u(y) dy,$$

با استفاده از آن معادله (۳.۴) را می‌توان به شکل ساده زیر بیان کرد:

$$(I + k^2 T_m) u = u^i.$$

^۱ Lippmann-Schwinger

۲-۴ مسأله وارون پراکندگی موج صوت در محیط ناهمگن _____ ۵۷

با توجه به این که عملگر $T_m : C(\bar{B}) \rightarrow C(\bar{B})$ فشرده است، وجود و یکتایی جواب معادله (۳.۴) را با به کارگیری نظریه ریس - فردهلم می توان نتیجه گرفت. تنها مطلبی که برای وارون پذیری عملگر $I + k^2 T_m$ باید اثبات شود، صفر بودن هسته آن است. این مطلب بدین معنا است که جواب معادله (۲.۴) برای $u^i = 0$ برابر $u = 0$ است. این مسأله با استفاده از اصل ادامه یکتا^۱ برای معادلات بیضوی در [۱۴] اثبات شده است. در نتیجه معادله (۲.۴) برای هر موج منتشر شده u^i جواب یکتا دارد و این جواب به طور پیوسته وابسته است به نرم ماکزیمم u^i در یک ناحیه کراندار. با استفاده از معادله لیپمن - شوینگر نتیجه می شود که موج پراکنده شده و الگوی میدان دور به وسیله روابط زیر به دست می آیند:

$$u^s(x) = -k^2 T_m u = -k^2 \int_D \Phi(x, y) m(y) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (4.4)$$

$$u^\infty(\hat{x}) = -\frac{k^2}{4\pi} \int_D e^{-ik\hat{x}\cdot y} m(y) u(y) dy, \quad \hat{x} = \frac{x}{|x|} \in \Omega. \quad (5.4)$$

اگر مشابه حالت همگن امواج تخت و پراکنده شده آن و همچنین الگوی میدان دور آن را به ترتیب با نمادهای $u^i(x, d)$ ، $u^s(x, d)$ و $u^\infty(\hat{x}, d)$ نشان دهیم و به علاوه میدان پراکنده شده منبع نقطه ای $\Phi(x, z)$ را با نماد $\Phi^s(x, z)$ و الگوی میدان دور آن را با $\Phi^\infty(\hat{x}, z)$ نشان دهیم، روابط تقابلی مانند قضیه ۳.۳ برقرار است.

$$\Phi^\infty(\hat{x}, z) = \gamma_m u^s(z, -\hat{x}), \quad z \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{D}, \hat{x} \in \Omega,$$

$$u^\infty(\hat{x}, d) = u^\infty(-d, -\hat{x}), \quad \hat{x}, d \in \Omega.$$

۲-۴ مسأله وارون پراکندگی موج صوت در محیط ناهمگن

مسأله وارون پراکندگی موج در محیط ناهمگن به بازایی شاخص انکسار، m بر می گردد. ساده ترین روش برای این کار از معادله لیپمن - شوینگر و به خصوص رابطه (۵.۴) به دست می آید، که با آن الگوی میدان

^۱ unique continuation principle

دور قابل محاسبه است. عملگر $F : L^2(B) \rightarrow L^2(\Omega)$ را به وسیله این رابطه تعریف می‌کنیم:

$$(Fu)(\hat{x}) := -\frac{k^2}{4\pi} \int_B e^{-ik\hat{x}\cdot y} m(y) u(y) dy, \quad \hat{x} \in \Omega.$$

فرض کنید الگوی میدان دور $u^\infty(\hat{x}, d, k)$ برای $\hat{x} \in \Omega$ و $d \in \{d_1, \dots, d_P\}$ و $k \in \{k_1, \dots, k_Q\}$ مشخص باشد. مسأله وارون پیدا کردن تابع m می‌باشد که تساوی زیر با تقریب خوبی برای مفادیر $1 \leq q \leq Q$ و $1 \leq p \leq P$ برقرار باشد.

$$\begin{aligned} Fu_{pq} &= u_{pq}^\infty \\ (I + k^2 T_m) u_{pq} &= u_{pq}^i \end{aligned} \quad (6.4)$$

در این رابطه $u_{pq}^i := e^{ik_q x \cdot d_p}$ و $u_{pq}^\infty := u_\infty(\cdot, d_p, k_q)$ بنابراین جواب معادله وارون از جواب مسأله بهینه‌سازی زیر به دست می‌آید که در آن U_1 و U_2 مجموعه‌های فشرده مناسبی می‌باشند.

$$\min_{\substack{u_{pq} \in U_1 \\ m \in U_2}} \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \left\{ \|u_{pq}^\infty - Fu_{pq}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{pq} - u_{pq}^i + k^2 T_m u_{pq}\|_{L^2(B)}^2 \right\}.$$

هرچند دستگاه معادلات (6.4) غیرخطی است، ولی می‌توان آن را با یک دستگاه خطی تقریب زد. این مطلب با استفاده از تقریبی از رابطه (5.4) انجام می‌گیرد که به تقریب بُرن^۱ معروف است.

$$u_\infty(\hat{x}) = -\frac{k^2}{4\pi} \int_B e^{-ik\hat{x}\cdot y} m(y) u^i(y) dy, \quad \hat{x} \in \Omega.$$

با استفاده از این تقریب معادله (6.4) به دستگاه $Fu_{pq}^i = u_{pq}^\infty$ تبدیل می‌شود. این دستگاه خطی بد-رفتار است و برای حل آن باید از روش‌های منظم‌سازی استفاده کرد. در [۱۱] و مراجع در آن اطلاع بیشتری راجع به تقریب بُرن و نقاط ضعف و قوت آن پیدا می‌شود. بحث یکتایی جواب وارون مطلب مهمی است که برای حالت‌های همگن در فصل ۳ مطرح شد. قضیه زیر یکتایی را در مسأله وارون محیط‌های ناهمگن در \mathbb{R}^3 مطرح می‌کند.

قضیه ۲.۴ در \mathbb{R}^3 شاخص انکسار n با دانستن $u^\infty(\hat{x}, d)$ برای هر $\hat{x}, d \in \Omega$ و عدد موج ثابت k ، به طور یکتا تعیین می‌شود.

□ برهان. قضیه ۵.۱۰ در [۱۴].

قضیه یکتایی جواب وارون در فضای دو بعدی همچنان باز است. تنها مطلبی که تاکنون اثبات شده است، این است که نقاط ناپوستگی n از روی اطلاعات u^∞ به طور یکتا تعیین می شود.

قضیه ۳.۴ فرض کنید $n_1, n_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ که $1 - n_1$ و $1 - n_2$ محمل فشرده دارند. در این صورت اگر $u_1^\infty(\hat{x}, d) = u_2^\infty(\hat{x}, d)$ برای تمام $\hat{x}, d \in \Omega$ آنگاه $n_1 - n_2 \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ برای هر $0 \leq \alpha < 1$.

□ برهان. به [۴۲] مراجعه شود.

هنوز ثابت نشده است که شاخص انکسار از اطلاعات u_∞ برای عدد موج ثابت k به طور یکتا تعیین می شود، منتها اگر u_∞ برای بازه ای از مقادیر k مشخص باشد آنگاه n را می توان به طور یکتا بازیابی کرد، (قضیه ۱۹.۱۰ در [۱۴]). یکی از مسایل مربوط به یکتایی مسأله وارون پراکندگی موج در محیط های ناهمگن در \mathbb{R}^2 ، یکتایی بازیابی شکل D ، محمل تابع $m = 1 - n$ می باشد، که هنوز اثبات نشده است و باز می باشد.

۳-۴ پراکندگی امواج الکترومغناطیس در محیط ناهمگن

مدل پراکندگی موج الکترومغناطیس در محیط ناهمگن در \mathbb{R}^3 بدین صورت بیان می شود که اگر $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ ، نفوذپذیری الکتریکی، $\mu = \mu_0$ ، نفوذپذیری مغناطیسی باشد که مقداری ثابت و مثبت است و $\sigma = \sigma(x)$ رسانایی الکتریکی را نشان دهد، آنگاه J چگالی جریان، \mathcal{E} میدان الکتریکی و \mathcal{H} میدان مغناطیسی در معادلات ماکسول صدق می کنند:

$$\operatorname{curl} \mathcal{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{curl} \mathcal{H} - \varepsilon(x) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = J.$$

۳-۴ پراکندگی امواج الکترومغناطیس در محیط ناهمگن ϵ_0 _____

به علاوه فرض می‌شود در خارج گوی به اندازه کافی بزرگ، $\sigma(x) = 0$ و $\epsilon(x) = \epsilon_0$. همچنین در رسانای ایزوتروپ^۱ قانون اهم نیز برقرار است:

$$J = \sigma \mathcal{E}.$$

برای اغلب فلزات σ بسیار بزرگ است، برای همین در رسانای کامل، σ بی‌نهایت فرض می‌شود. همچنین $\sigma = 0$ متناظر عایق الکتریکی می‌باشد. اکنون اگر میدان الکترومغناطیس را هارمونیک زمانی در نظر بگیریم، یعنی به صورت

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} E(x) e^{-i\omega t}, \quad \mathcal{H}(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} H(x) e^{-i\omega t},$$

آنگاه به معادلات ماکسول تقلیل یافته می‌رسیم.

$$\text{curl } E - ikH = 0, \quad \text{curl } H + ikn(x)E = 0. \quad (7.4)$$

تابع $n = n(x)$ شاخص انکسار موج می‌باشد و با رابطه زیر به دست می‌آید:

$$n(x) := \frac{1}{\epsilon_0} \left(\epsilon(x) + i \frac{\sigma(x)}{\omega} \right)$$

به علاوه $m := 1 - n$ محمل فشرده دارد.

میدان الکترومغناطیس منتشر شده، در معادلات ماکسول برای محیط‌های همگن صدق می‌کند.

$$\text{curl } E^i - ikH^i = 0, \quad \text{curl } H^i - ikE^i = 0.$$

اگر E و H میدان الکترومغناطیس پس از پدیده پراکندگی باشند که در (7.4) صدق می‌کنند، میدان‌های پراکنده شده E^s و H^s که

$$E = E^i + E^s, \quad H = H^i + H^s,$$

باید در رابطه تشعشی سیلور-مولر صدق کنند.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (H^s \times x - rE^s) = 0. \quad (8.4)$$

^۱ isotropic conductor

مشابه حالت موج صوت معادلات (۷.۴) و (۸.۴) معادل با معادله انتگرالی زیر می‌باشند، (قضیه ۱.۹ در [۱۴]).

$$E(x) = E^i(x) - k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y) m(y) E(y) dy + \text{grad} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{n(y)} \text{grad} n(y) \cdot E(y) \Phi(x, y) dy.$$

همچنین اگر عملگر انتگرالی باشد که معادله فوق را به صورت $(I + T_e)E = E^i$ خلاصه کند، T_e فشرده است و $I + T_e$ یک به یک. بنابراین معادله فوق جواب یکتا دارد.

مسأله وارون، تعیین n از روی $E^\infty(\hat{x}, d, p)$ می‌باشد. می‌توان نشان داد که برای مقدار ثابت k و $p \in \mathbb{R}^3$

الگوی میدان دورالکتریکی E^∞ شاخص انکسار n را به طور یکتا تعیین می‌کند، [۱۵].

روشهای بازیابی

مسأله بازیابی شکل مانع ناشناخته در پدیده پراکندگی موج، یک مسأله بدرفتار است. تاکنون سه گروه عمده از روشهای متفاوت برای این منظور معرفی شده‌اند. در اولین گروه، مسأله وارون به صورت یک معادله غیرخطی بدرفتار در نظر گرفته می‌شود و به وسیله روشهایی مانند روش نیوتن این معادله حل می‌شود. در بخش ۱-۵ روش نیوتن، به عنوان یکی از روشهای این گروه بیان خواهد شد.

در دومین گروه از روشهای بازیابی، مسأله وارون به یک قسمت معادله خطی بدرفتار و یک قسمت غیرخطی خوش رفتار تقسیم می‌شود. به وسیله قسمت خطی میدان پراکنده شده امواج در خارج از مانع بازیابی می‌شود و به وسیله قسمت غیرخطی، مرز مانع با اطلاع از شرایط مرزی بازیابی می‌گردد. از این گروه روش منبع نقطه‌ای در بخش ۲-۵ معرفی می‌گردد. روشهای قدیمی‌تر دیگری از این دسته موجودند که در [۱۴] آمده‌اند. این روشها به وسیله کولتون - مونک^۱ و کرش - کرس^۲ پیشنهاد شده‌اند.

در استفاده از روشهای دو گروه اول باید از قبل نوع مانع مشخص باشد، یعنی بدانیم که مانع نرم - صوت است یا سخت - صوت یا به طور موضعی پوشیده شده. در اکثر کاربردها به دلیل ناشناخته بودن مانع و خواص فیزیکی آن، نوع آن و شرایط مرزی آن معلوم نیست. روشهای دسته سوم، روشهایی هستند که مستقل از نوع مانع و خواص فیزیکی آن به کار می‌روند. از این دسته دو روش، نمونه برداری خطی و منابع

^۱ Colton-Monk

^۲ Kirsch-Kress

تکین در بخشهای بعدی معرفی می‌گردند.

۱-۵ روش نیوتن

در روش نیوتن برای پیدا کردن جواب معادله $F(x) = y$ به وسیله دنباله زیر به جواب میل می‌کنیم:

$$x_{n+1} = x_n - (F'(x_n))^{-1} (F(x_n) - y).$$

به علاوه در این روش فرض می‌شود، تابع $F : X \rightarrow Y$ به معنای فرشه^۱ مشتقپذیر است و F' یک به یک بوده و تصویر چگال دارد. این شرط برای تعریف دنباله بالا لازم است.

در مسأله مستقیم پراکندگی موج برای هر موج منتشر شده u^i عملگر زیر تعریف می‌شود،

$$\mathcal{F} : \partial D \mapsto u_\infty.$$

این عملگر مرز هر ناحیه را به الگوی میدان دور موج پراکنده شده آن متناظر می‌کند. با این تفسیر مسأله وارون منجر به حل معادله بدرفتار و غیرخطی $\mathcal{F}(\partial D) = u_\infty$ می‌شود.

برای به کارگیری روش نیوتن در حل این معادله باید ابتدا مشتق \mathcal{F} را تعریف کرد. برای این منظور ابتدا دامنه ∂D را به گونه‌ای نزدیک جواب انتخاب می‌کنیم که از کلاس C^3 باشد. در این صورت ν بردار عمود بر سطح، C^2 است و با کمک تابعهای $r \in C^2(\partial D)$ می‌توان تمام رویه‌های نزدیک ∂D را تشکیل داد.

$$\partial D_r = \{x + r(x)\nu_\circ(x) : x \in \partial D_\circ\}$$

مسأله وارون پراکندگی موج، پیدا کردن جواب $r_* \in C^2(\partial D_\circ)$ از معادله زیر است،

$$F : C^2(\partial D_\circ) \rightarrow L^2(\Omega)$$

$$F(r) := \mathcal{F}(\partial D_r) = u^\infty$$

قضیه زیر مشتقپذیری F و شیوه محاسبه آن را برای موانع نرم - صوت بیان می‌کند.

^۱ Fréchet

قضیه ۱.۵ عملگر $F : C^2(\partial D_0) \rightarrow L^2(\Omega)$ که مرزیک مانع نرم - صوت را به الگوی میدان دور متناظر می‌سازد، به معنای فرشه مشتق‌پذیر است و $F'(r)h$ برابر است با الگوی میدان دور تابع v_h که جواب تشعشی معادله هلمولتز در $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}_r$ با شرط مرزی دیریکله

$$v_h = -h \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \text{روی } \partial D_r$$

می‌باشد. تابع u در این رابطه میدان مجموع $u = u^i + u^s$ متناظر ناحیه D_r است.

□ برهان. به [۳۶] مراجعه شود.

مشابه قضیه فوق برای شرط مرزی نیومن یا مسأله پراکندگی موج الکترومغناطیس به وسیله رسانای کامل در [۳۷] و [۴۰] مطرح شده است، اما در حالت‌های دیگر هنوز نتایجی به دست نیامده است. در حالت شرط مرزی امپدانس $\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda u = 0$ مشتق $F'(r)h$ برابر الگوی میدان v_h است که در شرط مرزی امپدانس زیر صدق می‌کند، [۲۷].

$$\frac{\partial v_h}{\partial \nu} + i\lambda v_h = \{k^2 - \lambda^2 + i\lambda \mathbf{H}\} h u + \text{Div}(h \mathbf{Grad} u)$$

در این رابطه u جواب متناظر ناحیه D_r است و \mathbf{H} انحناهای میانگین ∂D_r و Div و Grad به ترتیب دیورژانس و گرادیان سطح می‌باشند.

برای به کارگیری روش نیوتن باید یک به یک و چگال بودن تصویر عملگر مشتق $F'(r)$ بررسی شود. این مسأله در حالت شرط مرزی امپدانس بسیار مشکل است و تنها در حالتی که λ بسیار بزرگ باشد یعنی در حالتی که مانع تقریباً نرم - صوت است، در [۲۸] اثبات شده است. در حالت شرط مرزی دیریکله قضیه ۱.۵ در [۱۴] یک به یکی تابع مشتق را اثبات می‌کند. در [۲۶] نتایج فوق به فضای L^2 تعمیم داده شده است و چگال بودن تصویر $F'(r) : L^2(\partial D_r) \rightarrow L^2(\Omega)$ اثبات شده است.

اکنون با استفاده از روش نیوتن به حل معادله

$$F(r) = u_\infty,$$

می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا جواب q_n در معادله خطی زیر را پیدا کرده

$$F(r_n) + F'(r_n) \cdot q_n = u_\infty \quad (۱.۵)$$

و دنباله r_n را بدین صورت تشکیل می‌دهیم:

$$r_{n+1} = r_n + q_n.$$

با توجه به یک به یک و چگال بودن تصویر $F'(r_n)$ معادله (۱.۵) جواب یکتا دارد. از طرف دیگر F' فشرده است و معادله (۱.۵) بدرفتار، و باید از روشهای منظم سازی استفاده کرد. برای کارهای عددی در حل این معادله بهتر است، q را از زیرفضای متناهی البعد $C^2(\partial D)$ با پایه q^1, \dots, q^N انتخاب نمود و تساوی را در

M نقطه $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_M$ از Ω بررسی کرد. در این صورت با نوشتن

$$q_n = \sum_{i=1}^N a_n^i q^i,$$

به دستگاه معادلات خطی زیر می‌رسیم:

$$\sum_{i=1}^N a_n^i (F'(r_n) q^i)(\hat{x}_j) = u_\infty(\hat{x}_j) - F(r_n)(\hat{x}_j), \quad j = 1, \dots, M \quad (۲.۵)$$

در حالت $2M > N$ دستگاه (۲.۵) را می‌توان به روش کمترین مربعات تقریب زد و برای اینکه به جواب پایدار برسیم، بهتر است از روش منظم سازی تیخونوف استفاده شود. به همین منظور به دنبال جواب می‌نیم عبارت زیر هستیم:

$$\sum_{j=1}^M \left| \sum_{i=1}^N a_n^i (F'(r_n) q^i)(\hat{x}_j) - u_\infty(\hat{x}_j) + F(r_n)(\hat{x}_j) \right|^2 + \alpha \sum_{i=1}^N a_n^i{}^2. \quad (۳.۵)$$

اگر از قبل مشخص باشد که شکل مانع موج ستاره‌وار است، در این صورت می‌توان به جای فضای

$$r \in C^2(\Omega) \text{ که برای } C^2(\partial D_0) \text{ استفاده کرد، به طوری که برای } r \in C^2(\Omega)$$

$$\partial D_r = \{r(\hat{x}) \cdot \hat{x} : \hat{x} \in \Omega\}.$$

از معایب روش نیوتن، همگرایی دنباله $\{r_n\}$ می‌باشد که برای آن نیاز است مقدار اولیه r_0 به اندازه کافی

نزدیک جواب اصلی باشد. همچنین در هر مرحله برای به دست آوردن r_n در مسأله بهینه سازی (۳.۵) باید مسأله پراکندگی موج را برای رویه‌های متفاوت حل کرد تا $F(r_n)$ و $F'(r_n)q^i$ را بتوان حساب کرد.

از نقاط قوت این روش این است که لازم نیست الگوی میدان دور $u^\infty(\hat{x}, d)$ برای تمام جهات $\hat{x}, d \in \Omega$ مشخص باشد بلکه داشتن الگوی میدان دور موج پراکنده شده تنها یک موج u^i برای بازیابی شکل مانع کافی است.

۲-۵ روش منبع نقطه‌ای

روش منبع نقطه‌ای اولین بار توسط پاتهاست در سال ۱۹۹۶ معرفی شد، [۳۸]. این روش برای حالت‌های مختلف سخت - صوت، نرم - صوت و ناهمگن در [۳۵] مورد استفاده قرار گرفته است. به علاوه در [۱۶] به وسیله مزایای این روش، ضریب امیدانس موانع به طور موضعی پوشیده شده، تعیین گردیده است.

ایده اصلی این روش به این صورت است که اگر یک منبع نقطه‌ای در نقطه z درون ناحیه D قرار بگیرد، آنگاه الگوی میدان دور به راحتی قابل محاسبه است و برابر $\Phi^\infty(\hat{x}, z) = -\gamma_m e^{-ik\hat{x}\cdot z}$ ولی اگر همین منبع نقطه‌ای در خارج از \bar{D} قرار بگیرد، الگوی میدان دور آن متفاوت خواهد بود. این تفاوت الگوریتمی را برای بازیابی ناحیه D ارایه می‌کند. منتها نکته‌ای که وجود دارد این است که باید ابتدا $\Phi^\infty(\hat{x}, z)$ را از اطلاعات $u^\infty(\hat{x}, d)$ تقریب زد تا بتوان صحت تساوی $\Phi^\infty(\hat{x}, z) = -\gamma_m e^{-ik\hat{x}\cdot z}$ را برای مقادیر مختلف z بررسی کرد. این روش نقیصی در کاربردهای عددی دارد. این نقیص در روش نمونه برداری خطی برطرف شده است. به شیوه دیگری نیز می‌توان این روش را به کار برد. با پیدا کردن تقریب $\Phi^\infty(\hat{x}, z)$ و با استفاده از رابطه (۳.۳) می‌توان تخمینی برای میدان پراکنده شده $u^s(z, d)$ پیدا کرد. بدین ترتیب می‌توان با توجه به شرایط مرزی حاکم روی ∂D ، مرز مانع را بازیابی کرد. اهمیت این روش در بازیابی میدان امواج پراکنده شده است. با استفاده از آن می‌توان میدان پراکنده شده موج انتشاری دلخواه u^i را بازیابی کرد، [۳۵].

برای تقریب $\Phi^\infty(\hat{x}, z)$ از روی $u^\infty(\hat{x}, d)$ در ابتدا فرض می‌کنیم، امواج منتشر شده ترکیبی از امواج

تخت باشد. این موج که به موج هرگلوتز^۱ معروف است بدین صورت تعریف می‌شود

$$v_g(x) := \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g(d) ds(d), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

در این صورت اگر $u^s(x, d)$ و $u^\infty(\hat{x}, d)$ میدان امواج پراکنده شده و الگوی میدان دور آن در اثر پرتو $u^i(x, d) = e^{ikx \cdot d}$ باشد، آنگاه میدان امواج پراکنده شده v_g و الگوی میدان دور آن از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} v_g^s(x) &= \int_{\Omega} u^s(x, d) g(d) ds(d), & x \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{D} \\ v_g^\infty(\hat{x}) &= \int_{\Omega} u^\infty(\hat{x}, d) g(d) ds(d), & \hat{x} \in \Omega. \end{aligned} \tag{۴.۵}$$

برای دیدن این مطلب تنها کافی است که شرایط مرزی $v_g^s + v_g$ را روی ∂D بررسی کرد که مشابه شرایط مرزی $u^i + u^s$ است. (این مطلب مستقل از نوع مانع صحیح است.)

اگر $(Hg)(x) := v_g(x)$ عملگر موج هرگلوتز باشد، آنگاه لم زیر برای تقریب مورد نظر به کار خواهد آمد.

لم ۲.۵ اگر G ناحیه‌ای باشد که k^2 مقدار ویژه دیریکله آن برای عملگر $\Delta -$ نباشد، در این صورت عملگر $H : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\partial G)$ تصویر چگال دارد.

برهان. فرض کنید $\varphi \in L^2(\partial G)$ به طوری که

$$\langle \varphi, Hg \rangle_{L^2(\partial G)} = 0 \quad \text{برای هر } g \in L^2(\Omega)$$

در این صورت

$$\langle H^* \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{برای هر } g \in L^2(\Omega)$$

که در آن H^* عملگر الحاقی H می‌باشد و با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(H^* \varphi)(\hat{x}) = \int_{\partial G} e^{-ik\hat{x} \cdot y} \varphi(y) ds(y), \quad \hat{x} \in \Omega.$$

بنابراین $\circ = H^*\varphi$. از طرف دیگر $H^*\varphi$ الگوی میدان دورپتانسیل لایه‌ای تکین

$$(S\varphi)(x) := \int_{\partial G} \Phi(x, y)\varphi(y)ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

می‌باشد. اگر S^+ مقدارپتانسیل را برای مقادیر $x \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{G}$ محاسبه کند و S^- درون G ، آنگاه بنا برلم

رلیش نتیجه می‌شود

$$(S^+\varphi)(x) = \circ, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{G}.$$

بنابر روابط پرش (۲۴.۲) نتیجه می‌شود که

$$\circ = \gamma S^+\varphi = \frac{1}{\gamma} S\varphi, \tag{۵.۵}$$

$$\circ = \frac{\partial}{\partial \nu} S^+\varphi = \frac{1}{\gamma} (K'\varphi - \varphi).$$

از طرف دیگر روابط پرش برای S^- نتیجه می‌دهد

$$\gamma S^-\varphi = \frac{1}{\gamma} S\varphi = \circ$$

بنابراین $u = S^-\varphi$ جواب معادله هلمولتز با شرط مرزی زیر است:

$$\Delta u + k^2 u = \circ \quad \text{در } G$$

$$u = \circ \quad \text{روی } \partial G$$

با توجه به این فرض که G مقدار ویژه دیریکله k^2 ندارد، نتیجه می‌شود

$$S^-\varphi = u = \circ \quad \text{در } G$$

بنابراین

$$\circ = \frac{\partial}{\partial \nu} S^-\varphi = \frac{1}{\gamma} (K'\varphi + \varphi).$$

□ با مقایسه با رابطه (۵.۵) نتیجه می‌شود که $\varphi = \circ$.

برای به کار بردن این روش باید پیش فرضهایی را روی D قرار دهیم. یکی اینکه $D \subset B_R(\circ)$ که

$B_R(\circ)$ گوی به شعاع R و مرکز مبدأ است و دیگر اینکه مرز D در شرط مخروط خارجی صدق می‌کند،

یعنی زاویه β وجود دارد که برای هر $x \in \mathbb{R}^m \setminus D$ مخروط زیر برای دست کم یک بردار p در خارج D قرار بگیرد

$$Co(x, p, \beta) := \left\{ y \in \mathbb{R}^m \setminus \{x\}, \frac{(y-x)}{|y-x|} \cdot p \geq \cos \beta \right\}.$$

برای هر مقدار $\rho > 0$ و بردار $p \in \Omega$ دامنه‌های

$$G_{z,p,\rho} := B_{\mathbb{R}} \left(z - \frac{p\rho}{\cos \beta} \right) \setminus Co \left(z - \frac{p\rho}{\cos \beta}, p, \beta \right)$$

ناحیه‌هایی هستند که برای تقریب $\Phi^\infty(\hat{x}, z)$ مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای هر نقطه $z \notin \bar{D}$ بردار $p \in \Omega$ وجود دارد که $D \subset G_{z,p,\rho}$. اگر ناحیه $G_{\circ,p,\rho} \subset G$ در فرضیات لم ۲.۵ صدق کند و $\circ \notin G$ ، آنگاه می‌توان $\Phi(\cdot, \circ)$ را به وسیله تابع موج هرگلتونز v_g روی ∂G تخمین زد

$$\|\Phi(\cdot, \circ) - v_g\|_{L^\infty(\partial G)} < \epsilon.$$

چون $\Phi(\cdot, \circ)$ و v_g جوابهای معادله هلمولتز درون ناحیه G می‌باشند، بنابراین

$$\|\Phi(\cdot, \circ) - v_{g_\tau}\|_{H^1(G)} < c\epsilon.$$

در نتیجه برای هر $\tau > 0$ تابع $g_\tau \in L^2(\Omega)$ وجود دارد که

$$\|\Phi(\cdot, \circ) - v_g\|_{H^1(G_{\circ,p,\rho})} < \tau. \tag{6.5}$$

اگر $p_1 \in \Omega$ بردار دیگری باشد، تقریب (6.5) در ناحیه $G_{z,p_1,\rho}$ توسط تابع

$$g_\tau(z, d) := e^{-ikz \cdot d} g_\tau(M^{-1}d)$$

برقرار می‌گردد، که M ماتریس متعامدی است که از رابطه $p_1 = Mp_\circ$ به دست می‌آید. زیرا ناحیه $G_{z,p_1,\rho}$

با دوران و انتقال $G_{z,p_1,\rho} = MG_{z,p_\circ,\rho} + z$ به دست می‌آید و

$$\begin{aligned} v_{g_\tau(z,\cdot)}(x) &= \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g_\tau(z, d) ds(d) \\ &= \int_{\Omega} e^{ik(x-z) \cdot d} g_\tau(M^{-1}d) ds(d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega} e^{ik(x-z) \cdot M \tilde{d}} g_{\tau}(\tilde{d}) ds(\tilde{d}) \\
 &= \int_{\Omega} e^{ikM^{-1}(x-z) \cdot \tilde{d}} g_{\tau}(\tilde{d}) ds(\tilde{d}) \\
 &= v_{g_{\tau}}(M^{-1}(x-z))
 \end{aligned}$$

در نتیجه در صورتی که D زیرمجموعه دامنه تقریب $G_{z,p,\rho}$ باشد، آنگاه

$$\|v_{g_{\tau}} - \Phi(\cdot, z)\|_{H^1(D)} < \tau.$$

در این صورت اگر تابع $v_{g_{\tau}}$ و $\Phi(\cdot, z)$ را روی ∂G در نظر بگیریم، نتیجه می‌شود

$$\|\Phi(\cdot, z) - v_{g_{\tau}}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C_1 \|\Phi(\cdot, z) - v_{g_{\tau}}\|_{H^1(D)} < C_1 \tau.$$

همچنین بنا بر لم ۳.۴ در [۳۳] نتیجه می‌شود

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi(\cdot, z) - \frac{\partial}{\partial \nu} v_{g_{\tau}} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} < C_2 \tau.$$

در روابط بالا مقادیر C_1 و C_2 تنها به D وابسته‌اند. از آنجا که الگوی میدان دور موج پراکنده شده نسبت به شرایط مرزی پیوسته است (رابطه (۱۳.۲))، می‌توان تخمین زیر را به دست آورد

$$\|\Phi^{\infty}(\cdot, z) - v_{g_{\tau}}^{\infty}\|_{L^2(\Omega)} < C_3 \tau. \quad (7.5)$$

اکنون با استفاده از رابطه (۴.۵) نتیجه می‌شود که

$$v_{g_{\tau}}^{\infty}(\hat{x}) = \int_{\Omega} u^{\infty}(\hat{x}, d) g_{\tau}(z, d) ds(d),$$

تقریبی از $\Phi^{\infty}(\hat{x}, z)$ می‌باشد و لذا عبارت $\|v_g^{\infty}(\hat{x}) + \gamma_m e^{-ik\hat{x} \cdot z}\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$ ، که قابل محاسبه است بیانگر این مطلب است که z در درون D واقع نیست. به علت بدرفتاری مسأله وارون، ممکن است برای بعضی توابع g ، این عبارت در خارج D بسیار کوچک باشد. به همین دلیل بازیابی ناحیه D مشکل است. قضیه زیر نشان می‌دهد که این مشکل برای موانع نرم - صوت روی می‌دهد و هنگامی که مانع سخت - صوت باشد، می‌توان آن را بازیابی کرد. در این قضیه Φ جواب اساسی معادله هلمولتز برای $k = 0$ است و S_0 عملگر

انتگرالی متناظر آن در این حالت. همچنین عملگر انتگرالی F به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(F\varphi)(\hat{x}) := \int_{\partial D} \gamma_m e^{-ik\hat{x}\cdot y} \varphi(y) ds(y).$$

قضیه ۳.۵ فرض کنید D ناحیه کراندار C^2 باشد. در حالتی که D یک ناحیه نرم - صوت باشد، الگوی میدان دور $\Phi^\infty(\cdot, z)$ نسبت به $z \in \mathbb{R}^m$ پیوسته است و همگرایی زیر برای $z_0 \in \partial D$ در $L^2(\Omega)$ برقرار است.

$$\lim_{h \rightarrow 0^\pm} \Phi^\infty(\cdot, z_0 + h\nu(z_0)) = -\gamma_m e^{-ik\hat{x}\cdot z_0}.$$

در حالتی که D مانع سخت - صوت باشد، الگوی میدان دور $\Phi^\infty(\cdot, z)$ برای $z \in \mathbb{R}^m \setminus \partial D$ پیوسته است و روی مرز ∂D پرش دارد. در این حالت روابط زیر در $L^2(\Omega)$ برقرار است.

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \Phi^\infty(\cdot, z_0 + h\nu(z_0)) = -\gamma_m e^{-ik\hat{x}\cdot z_0},$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \Phi^\infty(\cdot, z_0 + h\nu(z_0)) = \gamma_m e^{-ik\hat{x}\cdot z_0} + \mathcal{F}F(I - K' - iT S_0^\nu)^{-1} \left(\frac{\partial \Phi(\cdot, z_0)}{\partial \nu} + iT S_0 \Phi(\cdot, z_0) \right).$$

□ **برهان.** اثبات در [۳۸].

از قضیه فوق نتیجه می‌شود، در حالتی که D مانع سخت - صوت باشد عبارت $\|\Phi^\infty(\hat{x}, z) - \gamma_m e^{-ik\hat{x}\cdot z}\|_{L^2(\Omega)}$ روی ∂D پرش دارد. این مطلب برای بازیابی D مفید خواهد بود.

برای موانع نرم - صوت می‌توان با استفاده از رابطه (۳.۳)

$$\Phi^\infty(\hat{x}, z) = \gamma_m u^s(z, -\hat{x}), \quad z \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{D}, \quad \hat{x} \in \Omega,$$

میدان پرکنده شده $u^s(z, d)$ را تقریب زد. با توجه به تقریب (۷.۵) نتیجه می‌شود که $\frac{1}{\gamma_m} v_{g_\tau}^\infty(-d)$ تقریبی از

$u^s(z, d)$ ارائه می‌کند. لذا با محاسبه سطح می‌نیمم

$$u = u^s(\cdot, d) + u^i(\cdot, d)$$

می‌توان ∂D را تعیین کرد.

به هر حال در استفاده از این روش و در محاسبه v_g^∞ که به ساختن تابع $g_\tau(z, \cdot)$ منجر می‌شود، فرض بر این است که

$$\bar{D} \subset G_{z,p,\rho}. \quad (۸.۵)$$

بنابراین برای مانع ناشناخته D باید تابع $p(z)$ را طوری انتخاب کنیم که (۸.۵) برقرار باشد. برای این منظور چندین رویکرد وجود دارد. ساده ترین راه از این قرار است که در ابتدا با تعدادی بردار ثابت p_1, \dots, p_N کار کنیم. یعنی برای هر حالت $p(z) = p_\xi$ ، $\xi = 1, \dots, N$ ، $g_\tau(z, d)$ در نهایت $v_{g_\tau}^\infty$ را به دست آوریم. با این کار اولین تقریب D_1 از D به دست می‌آید. در مراحل بعدی توابع $p(z)$ از روی D_n که در مرحله n -ام به دست آمده است محاسبه می‌شود و در زمانی که نتایج دو مرحله متوالی تقریباً یکسان شود فرآیند متوقف می‌شود.

این روش برای پیدا کردن امپدانس سطح و قسمت پوشیده شده مانع نیز به کار می‌رود. اگر شکل مانع به طور موضعی پوشیده شده D بازیابی شده باشد، آنگاه با استفاده از تقریب

$$\frac{1}{\gamma_m} v_{g_\tau}^\infty(-d) \approx u^s(z, d)$$

و پیدا کردن سطح می‌نیم $u = u^s(\cdot, d) + u^i(\cdot, d)$ می‌توان Γ_D را مشخص کرد. در این صورت Γ_I برابر درون $\Gamma - \Gamma_D$ خواهد بود و با استفاده از شرط مرزی

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda u = 0 \quad \text{روی } \Gamma_I$$

می‌توان تابع λ را بازیابی نمود. تنها نکته‌ای که باید تذکر داد، این است که u و $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ همزمان در یک زیرمجموعه باز Γ_I صفر نمی‌شوند. زیرا در غیر این صورت بنا بر قضیه یکتایی هلمگرتس نتیجه می‌شود $u \equiv 0$.

۳-۵ روش نمونه برداری خطی

این روش اولین بار توسط کولتون و کرش در سال ۱۹۹۶ مطرح شد، [۱۲]. بعدها این روش تکمیل شد و برای حالت‌های مختلف مسأله پراکندگی موج به کار رفت، [۶]. ایده آن مشابه روش منبع نقطه‌ای در به کارگیری الگوی میدان دور منابع نقطه‌ای $\Phi(\cdot, z)$ است. اگر $F : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ را با ضابطه

$$(Fg)(\hat{x}) := \int_{\Omega} u^{\infty}(\hat{x}, d)g(d)ds(d) \quad (9.5)$$

عملگر میدان دور بنامیم، در این روش ابتدا معادله

$$(Fg)(\hat{x}) = \gamma_m e^{-ik\hat{x} \cdot z}, \quad \hat{x} \in \Omega, \quad (10.5)$$

مورد بررسی قرار می‌گیرد، که γ_m همان ثابت معرفی شده در قضیه ۳.۳ است. در حالتی که $z \in D$ عبارت سمت راست (۱۰.۵) الگوی میدان دور $\Phi^{\infty}(\hat{x}, z)$ می‌باشد. عملگر F فشرده است و این معادله در حالت کلی جواب ندارد. در این روش برای هر $z \in D$ ، جواب تقریبی برای معادله (۱۰.۵) پیدا می‌شود و ثابت می‌شود که

$$\lim_{z \rightarrow \Gamma} \|g(\cdot, z)\|_{L^2(\Omega)} = \infty. \quad (11.5)$$

این مطلب را برای موانع موج نرم - صوت یا به طور موضعی پوشیده شده، اثبات می‌کنیم. هر چند رابطه (۱۱.۵) برای مقادیر $z \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$ اثبات نشده است، ولی نتایج عددی نشان می‌دهد که نه تنها $\|g(\cdot, z)\|_{L^2(\Omega)}$ وقتی که z از درون به Γ میل می‌کند، بزرگ می‌شود، بلکه هرگاه z وارد $\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$ می‌شود، این عبارت بزرگتر نیز می‌شود. توصیف ریاضی این پدیده با به کارگیری روشهای منظم سازی برای معادله (۱۰.۵) و مقادیر $z \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$ ، در پایان این بخش ارائه می‌شود. این روش برای محیطهای ناهمگن، امواج الکترومغناطیس و مسایل دیگر پراکندگی موج در [۶]، [۸]، [۹]، [۱۴] و [۳۵] آمده است.

۱-۳-۵ روش نمونه برداری خطی برای موانع نرم - صوت

در این قسمت فرض می‌شود که k^2 مقدار ویژه دیریکله $-\Delta$ در D نباشد. مسأله مستقیم پراکندگی موج متناظر جواب تشعشی مسأله زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0 && \text{در } \mathbb{R}^m \setminus \bar{D} \\ u &= f && \text{روی } \Gamma \end{aligned} \quad (12.5)$$

همان طور که در فصل ۳ بیان شد، این مسأله برای هر $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ جوابی در $H_{loc}^1(\mathbb{R}^m \setminus \bar{D})$ دارد. هر جواب (۱۲.۵) را می‌توان با پتانسیل لایه‌ای تکین

$$S\varphi(x) := \int_{\Gamma} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \Gamma,$$

بیان کرد. زیرا بنا بر روابط پرشی

$$(\gamma S\varphi)(x) = \frac{1}{i} S\varphi(x) := \int_{\Gamma} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \Gamma,$$

و بنا بر قضیه ۶.۷ در [۳۳] و فرض روی k^2 ، عملگر انتگرالی $S : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ یکریختی است و معادله $S\varphi = 2f$ جواب دارد. از طرف دیگر الگوی میدان دور $S\varphi$ برابر است با $(\mathcal{F}\varphi)(\hat{x})$ ، که در آن

$$(\mathcal{F}\varphi)(\hat{x}) = \int_{\Gamma} \varphi(y) e^{-ik\hat{x} \cdot y} ds(y), \quad \hat{x} \in \Omega.$$

این عملگر پیوسته است و $B : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Omega)$ را عملگری در نظر می‌گیریم که f را به الگوی میدان دور u^∞ متناظر می‌کند.

این عملگر پیوسته است و

$$\gamma_m \mathcal{F}\varphi = B(\gamma S\varphi) = B(S\varphi). \quad (13.5)$$

از طرف دیگر با قرار دادن $\mathcal{H}g$ برابر اثر موج هرکلوتز v_g روی Γ رابطه زیر برقرار است

$$Fg = -B(\mathcal{H}g). \quad (14.5)$$

در این رابطه F عملگر میدان دور است که با رابطه (۹.۵) تعریف می‌شود. از مقایسه (۱۳.۵) و (۱۴.۵) نتیجه می‌شود

$$Fg = -\gamma_m \mathcal{F}S^{-1}\mathcal{H}g. \quad (15.5)$$

بنابراین معادله (۱۰.۵) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\mathcal{F}S^{-1}\mathcal{H}g = -e^{-ik\hat{x}\cdot z}. \quad (16.5)$$

لم ۴.۵ اگر k^2 مقدار ویژه دیریکله ناحیه D نباشد، عملگر $\mathcal{F} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Omega)$ یک به یک بوده و تصویر چگال دارد.

برهان. اثبات مشابه لم ۲.۵. □

برای $z \in D$ الگوی میدان دور امواج پراکنده شده یک منبع نقطه‌ای به راحتی قابل محاسبه است،

$$\Phi^\infty(\hat{x}, z) = -\gamma_m e^{-ik\hat{x}\cdot z}.$$

در نتیجه $-e^{-ik\hat{x}\cdot z}$ در تصویر \mathcal{F} قرار دارد و تابع یکنای $\varphi_z \in H^{-1/2}(\Gamma)$ وجود دارد که

$$(\mathcal{F}\varphi_z)(\hat{x}) = -e^{-ik\hat{x}\cdot z}. \quad (17.5)$$

برای حل معادله (۱۶.۵) کفایت تابع $g(\cdot, z) \in L^2(\Omega)$ پیدا شود که

$$\mathcal{H}g(\cdot, z) = S\varphi_z. \quad (18.5)$$

متأسفانه این معادله همیشه دارای جواب نیست و همان طور که در لم ۲.۵ بیان شده است، تنها تصویر \mathcal{H} چگال است و می‌توانیم تقریبی از جواب معادله (۱۸.۵) را پیدا کنیم. بنابراین اگر

$$\|\mathcal{H}g(\cdot, z) - S\varphi_z\|_{H^{1/2}(\Gamma)} < \epsilon, \quad (19.5)$$

آنگاه با توجه به پیوستگی S و عملگر \mathcal{F} نتیجه می شود

$$\|\mathcal{F}S^{-1}\mathcal{H}g(\cdot, z) + e^{-ik\hat{x}\cdot z}\|_{L^2(\Omega)} < C\epsilon.$$

و با استفاده از رابطه (۱۵.۵) تقریب زیر برقرار است

$$\|Fg(\cdot, z) - \gamma_m e^{-ik\hat{x}\cdot z}\|_{L^2(\Omega)} < C\epsilon.$$

از طرف دیگر از رابطه (۱۷.۵) نتیجه می شود:

$$S\varphi_z = \Phi^s(\cdot, z), \quad \text{در } \mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$$

و در نتیجه

$$S\varphi_z = -\Phi(\cdot, z), \quad \text{روی } \Gamma$$

بنابراین رابطه (۱۹.۵) نتیجه می دهد که

$$\|\mathcal{H}g(\cdot, z) + \Phi(\cdot, z)\|_{H^1(\Gamma)} < \epsilon.$$

همچنین از پیوستگی عملگر اثر نامساوی زیر به دست می آید:

$$\|\Phi(\cdot, z)\|_{H^1(\Gamma)} - \epsilon \leq \|\mathcal{H}g(\cdot, z)\|_{H^1(\Gamma)} \leq C\|v_g\|_{H^1(D)}$$

حال وقتی $z \rightarrow \Gamma$ ، عبارت سمت چپ بزرگ می شود. در نتیجه

$$\lim_{z \rightarrow \Gamma} \|v_g\|_{H^1(D)} = \infty,$$

و بنابراین

$$\lim_{z \rightarrow \Gamma} \|g(\cdot, z)\|_{L^2(\Omega)} = \infty.$$

در حالت $z \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$ دیگر $e^{-ik\hat{x}\cdot z}$ متعلق به تصویر \mathcal{F} نمی باشد. اما با استفاده از لم ۴.۵ و روش منظم

سازی تیخونوف می توان جواب منظم شده $\varphi_z^\alpha \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ را برای معادله (۱۷.۵) پیدا کرد.

$$\|(\mathcal{F}\varphi_z^\alpha)(\hat{x}) + e^{-ik\hat{x}\cdot z}\|_{L^2(\Omega)} < \delta. \quad (20.5)$$

به علت فشردگی \mathcal{F} و خواص منظم سازی که در فصل ۱ آمده است، رابطه زیر برقرار است

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\varphi_z^\alpha\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \infty. \quad (21.5)$$

از طرف دیگر برای هر $\epsilon' > 0$ تابع $g_\alpha(\cdot, z) \in L^2(\Omega)$ وجود دارد که

$$\|\mathcal{H}g_\alpha(\cdot, z) - S\varphi_z^\alpha\|_{H^{1/2}(\Gamma)} < \epsilon'. \quad (22.5)$$

از ترکیب (۲۱.۵) و (۲۲.۵) نتیجه می شود

$$\|\mathcal{F}S^{-1}\mathcal{H}g_\alpha(\cdot, z) + e^{-ik\hat{x}\cdot z}\|_{L^2(\Omega)} < \epsilon + \delta.$$

با توجه به رابطه (۱۵.۵) نتیجه می شود که برای هر $\epsilon > 0$ و $\delta > 0$ دلخواه توابع $g_\alpha(\cdot, z) \in L^2(\Omega)$ وجود دارند که

$$\|Fg_\alpha(\cdot, z) - \gamma_m e^{-ik\hat{x}\cdot z}\|_{L^2(\Omega)} < \epsilon + \delta.$$

به علاوه از روابط (۲۱.۵) و (۲۲.۵) نتیجه می شود

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\mathcal{H}g_\alpha(\cdot, z)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \infty.$$

بنابراین

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|g_\alpha(\cdot, z)\|_{L^2(\Gamma)} = \infty,$$

و

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|v_{g_\alpha}\|_{H^1(D)} = \infty.$$

قضیه زیر خلاصه نتایجی که تاکنون به دست آمده است را بیان می کند:

قضیه ۵.۵ فرض کنید D مانع نرم - صوت باشد که مرز آن، Γ ، لپشیتز است و k^2 مقدار ویژه دیریکله عملگر $\Delta -$ درون D نمی باشد. اگر F عملگر میدان دور باشد، در این صورت

(۱) اگر $z \in D$ ، برای هر $\epsilon > 0$ تابع $g^\epsilon(\cdot, z) \in L^2(\Omega)$ وجود دارد که

$$\|Fg^\epsilon(\cdot, z) - \gamma_m e^{-ik\hat{x}\cdot z}\|_{L^2(\Omega)} < \epsilon,$$

و در ضمن

$$\lim_{z \rightarrow \Gamma} \|g^\epsilon(\cdot, z)\|_{L^2(\Omega)} = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \Gamma} \|v_{g^\epsilon}\|_{H^1(D)} = \infty.$$

(۲) اگر $z \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$ ، برای هر $\epsilon > 0$ و $\delta > 0$ تابع $g^{\epsilon, \delta}(\cdot, z) \in L^2(\Omega)$ وجود دارد که

$$\|Fg^{\epsilon, \delta}(\cdot, z) - \gamma_m e^{-ik\hat{x}\cdot z}\|_{L^2(\Omega)} < \epsilon + \delta,$$

و در ضمن

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|g^{\epsilon, \delta}(\cdot, z)\|_{L^2(\Omega)} = \infty, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|v_{g^{\epsilon, \delta}}\|_{H^1(D)} = \infty.$$

۲-۳-۵ روش نمونه برداری خطی برای موانع به طور موضعی پوشیده شده

در اینجا نشان داده می‌شود که نتایج بخش قبلی را می‌توان به حالت کلی تر موانع به طور موضعی پوشیده شده، شرط مرزی مرکب، تعمیم داد. فرض کنید $\Gamma = \Gamma_D \cup \Pi \cup \Gamma_I$ مرز موانع D باشد که در ضمن $\Gamma_I \neq \emptyset$. مسأله مستقیم پیدا کردن جواب تشعشعی معادله زیر برای $f \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ و $h \in H^{-1/2}(\Gamma_I)$ است:

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0 \\ u &= f \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda u &= h \end{aligned} \quad (23.5)$$

در فصل ۲ نشان داده شد که این معادله دارای جواب یکتا در $H_{loc}^1(\mathbb{R}^m \setminus \bar{D})$ است. اگر

$$B : H^{1/2}(\Gamma_D) \times H^{-1/2}(\Gamma_I) \rightarrow L^2(\Omega)$$

عملگری باشد که (f, h) را به الگوی میدان دور u^∞ متناظر می‌کند، مشابه رابطه (۱۴.۵) در این حالت نیز

برقرار است

$$Fg = -B(Hg).$$

در این رابطه عملگر $\mathcal{H}g$ اثر تابع موج هرگلوتهز v_g روی مرز است که مشابه شرایط مرزی تعریف می‌شود،

یعنی

$$(\mathcal{H}g)(x) := \begin{cases} v_g(x), & x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial v_g}{\partial \nu}(x) + i\lambda v_g(x), & x \in \Gamma_I. \end{cases}$$

عملگر $\mathcal{F} : \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_I) \rightarrow L^2(\Omega)$ که با ضابطه

$$\mathcal{F}(\varphi_D, \varphi_I)(\hat{x}) := \int_{\Gamma_D} \varphi_D(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y} ds(y) + \int_{\Gamma_I} \varphi_I(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} e^{-ik\hat{x}\cdot y} ds(y) + \int_{\Gamma_I} i\lambda \varphi_I(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y} ds(y)$$

تعریف می‌شود، برابر الگوی میدان دور $\gamma_m^{-1} \mathcal{P}(\varphi_D, \varphi_I)$ می‌باشد که در آن

$$\mathcal{P}(\varphi_D, \varphi_I) := \mathcal{S}\tilde{\varphi}_D + \mathcal{D}\tilde{\varphi}_I + i\mathcal{S}(\lambda\tilde{\varphi}_I).$$

$\tilde{\varphi}_I \in H^{1/2}(\Gamma)$ و $\tilde{\varphi}_D \in H^{-1/2}(\Gamma)$ توسعه با صفر تابعهای φ_D و φ_I می‌باشند. (محمل φ_I و φ_D به

ترتیب در $\bar{\Gamma}_D$ و $\bar{\Gamma}_I$ قرار دارد.) بنا بر روابط پرشی پتانسیلهای لایه‌ای تکین و دوگانه روی Γ ، نتیجه می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}(\varphi_D, \varphi_I)|_{\Gamma_D} \\ \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + i\lambda \right) \mathcal{P}(\varphi_D, \varphi_I)|_{\Gamma_I} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \varphi_D \\ \varphi_I \end{pmatrix},$$

که در آن

$$M = \begin{pmatrix} S_{DD} & K_{DI} + iS_{DI}\lambda \\ K'_{ID} + i\lambda S_{ID} & -\lambda S_{II}\lambda + iK'_{II}\lambda + i\lambda K_{II} + T_{II} \end{pmatrix}.$$

(تعریف عملگرهای S_{DI}, S_{DD} و... در فصل ۲ آمده است) در لم ۱۱.۲ ثابت شده است که عملگر M

یکریختی است. با این اوصاف رابطه زیر برقرار است

$$\mathcal{F}(\varphi_D, \varphi_I) = -\gamma_m B M(\varphi_D, \varphi_I).$$

بنابراین معادله (۱۰.۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{F}M^{-1}(\mathcal{H}g) = -e^{-ik\hat{x}\cdot z}.$$

مشابه لم‌های ۲.۵ و ۴.۵، لم زیر نیز برقرار است.

۴-۵ روش منابع تکین $\lambda > 0$ و $\Gamma_I \neq \emptyset$ عملگر \mathcal{F} یک به یک بوده و تصویر چگال دارد. $\lambda = 0$ که شرط مرزی

بقیه فرآیند اثبات بخش قبل به طور مشابه برای موانع به طور موضعی پوشیده شده تکرار می شود و مشابه قضیه ۵.۵ در این حالت به شرط آنکه $\lambda > 0$ و $\Gamma_I \neq \emptyset$ برقرار است. در حالت $\lambda = 0$ که شرط مرزی نیومن روی Γ_I برقرار است، همه نتایج معتبر است به شرط آنکه k^2 مقدار ویژه مسأله همگن با شرط مرزی نیوتن در درون D نباشد.

۴-۵ روش منابع تکین

ایده اصلی این روش در این است که میدان امواج پراکنده شده منبع نقطه‌ای $\Phi^s(z, z)$ وقتی که z به مرز موانع نزدیک می شود، تکینگی دارد و

$$|\Phi^s(z, z)| \rightarrow \infty.$$

بنابراین مرز ∂D شامل نقاطی است که برای آنها رابطه بالا برقرار باشد. لذا برای بازیابی موانع D باید $\Phi^s(z, z)$ را از روی اطلاعات $u^\infty(\hat{x}, d)$ بازسازی کنیم. این امر توسط عملگر تصویر برگردان Q ، انجام می گیرد.

این روش اولین بار توسط پاتهاست در [۳۹] مطرح شد. در [۳۵] این روش برای موانع نرم - صوت و سخت - صوت و همچنین محیطهای ناهمگن و امواج الکترومغناطیس به کار رفته است. در اینجا این روش برای موانع به طور موضعی پوشیده شده به کار می رود.

۱-۴-۵ تخمین منابع نقطه‌ای

در ابتدا به جهت استفاده‌ای که از نتایج فصل ۲ می شود، مروری بر نتایج این فصل داریم. $\Phi^s(z, z)$ جواب معادله (۱۸.۲) است که $f = -\Phi(\cdot, z)|_{\Gamma_D}$ و $g = (-\frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial \nu} - i\lambda \Phi(\cdot, z))|_{\Gamma_I}$ و الگوی میدان دور آن با $\Phi^\infty(\hat{x}, z)$ نشان داده می شود. $\tilde{f} = -\Phi(\cdot, z)|_{\Gamma}$ و $\tilde{g} = (-\frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial \nu} - i\lambda \Phi(\cdot, z))|_{\Gamma}$ را گسترش توابع f و g

به کل Γ می‌گیریم. در این صورت $\psi_I(\cdot, z) \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_I)$ و $\psi_D(\cdot, z) \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \Phi^s(\cdot, z)|_{\Gamma} &= -\Phi(\cdot, z)|_{\Gamma} + \psi_I(\cdot, z) \\ \left(\frac{\partial \Phi^s(\cdot, z)}{\partial \nu} + i\lambda \Phi^s(\cdot, z) \right) \Big|_{\Gamma} &= \left(-\frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial \nu} - i\lambda \Phi(\cdot, z) \right) \Big|_{\Gamma} + \psi_D(\cdot, z) \end{aligned} \quad (24.5)$$

بنابر (۳۰.۲)، ψ_I و ψ_D در نامساوی زیر صدق می‌کنند

$$\|\psi_D(\cdot, z)\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)}, \|\psi_I(\cdot, z)\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_I)} \leq C \left(\|\Phi(\cdot, z)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \left\| \frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial \nu} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right).$$

در نهایت اگر $\bar{D} \setminus \mathbb{R}^m \ni z$ بنا بر پیوستگی عملگر اثر ولم ۳.۴ در [۳۳] نتیجه می‌شود

$$\|\Phi(\cdot, z)\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \left\| \frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial \nu} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \|\Phi(\cdot, z)\|_{H^1(D)}.$$

بنابراین

$$\|\psi_D(\cdot, z)\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)}, \|\psi_I(\cdot, z)\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_I)} \leq C \|\Phi(\cdot, z)\|_{H^1(D)}. \quad (25.5)$$

به وسیله لم زیر می‌توان توابع ψ_I و ψ_D را بر حسب فاصله z از D تخمین زد.

لم ۷.۵ الف) اگر $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ، آنگاه ثابتهای $c, \tau > 0$ وجود دارند که برای هر $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ که

$$0 < d(z, D) < \tau$$

$$\|\Phi(\cdot, z)\|_{H^1(D)}^2 \leq c |\ln d(z, D)|,$$

به علاوه برای هر $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ ، این تقریب به صورت زیر می‌باشد که در آن C و E ثابتهای وابسته به D

هستند

$$\|\Phi(\cdot, z)\|_{H^1(D)}^2 \leq C |\ln d(z, D)| + E.$$

ب) اگر $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ، آنگاه برای هر $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ تقریب زیر برقرار است

$$\|\Phi(\cdot, z)\|_{H^1(D)}^2 \leq \frac{c}{d(z, D)}.$$

برهان. الف) حالت $k = 0$ را در نظر می‌گیریم و $\Phi_0(x, z)$ را جواب اساسی معادله هلمولتز در این حالت قرار می‌دهیم. $\Phi(x, z) - \Phi_0(x, z)$ برای تمام مقادیر $x, z \in \mathbb{R}^2$ مشتقپذیر است (رابطه ۶۱.۳ در [۱۴]). بنابراین $\|\Phi(\cdot, z) - \Phi_0(\cdot, z)\|_{H^1(D)}^2$ کراندار است و تنها کافی است نامساویهای فوق برای $\Phi_0(\cdot, z)$ اثبات شوند. از طرفی

$$\Phi_0(x, z) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-z|}, \quad \nabla_x \Phi_0(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{x-z}{|x-z|^2}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \|\Phi_0(\cdot, z)\|_{H^1(D)}^2 &\leq C \int_D \frac{1}{|x-z|^2} + \left(\ln \frac{1}{|x-z|} \right)^2 dx \\ &\leq C \int_D \frac{1}{|x-z|^2} dx \\ &= C \int_{D \cap B_R(z)} \frac{1}{|x-z|^2} dx + C \int_{D \setminus B_R(z)} \frac{1}{|x-z|^2} dx \end{aligned}$$

$B_R(z)$ گوی بازی به شعاع R و مرکز z می‌باشد. انتگرال دوم کراندار است، زیرا ناحیه D کراندار است و $|x-z| > R$. همچنین اگر $d(z, D) = h$ ، برای هر $x \in D \cap B_R(z)$ داریم، $h \leq |x-z| \leq R$ و انتگرال اول با مقدار زیر محدود می‌شود

$$C \int_h^R \frac{2\pi r dr}{r^2} \leq E \ln \frac{R}{h}.$$

بنابراین مقادیر ثابت $C, E > 0$ وجود دارند که برای هر مقدار h رابطه زیر برقرار باشد

$$\|\Phi_0(\cdot, z)\|_{H^1(D)}^2 \leq C + E \ln \frac{1}{h}.$$

برای مقادیر به اندازه کافی کوچک h سمت راست نامساوی بالا را با $c \ln \frac{1}{h}$ می‌توان عوض کرد.

ب) مشابه بعد دو، $\Phi_0(x, z)$ را جواب اساسی معادله هلمولتز در $k = 0$ می‌گیریم و با توجه به مشتقپذیری $\Phi(x, z) - \Phi_0(x, z)$ برای تمام مقادیر $x, y \in \mathbb{R}^2$ (رابطه ۳۴.۱.۲ در [۳۵])، کافی است نامساوی مورد نظر برای $\Phi_0(\cdot, z)$ اثبات شود. از طرفی

$$|\Phi_0(x, z)| = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-z|}, \quad |\nabla_x \Phi_0(x, z)| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x-z|^2}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \|\Phi_\circ(\cdot, z)\|_{H^1(D)}^2 &= \int_D \left(\frac{1}{|x-z|^2} + \frac{1}{|x-z|^4} \right) dx \\ &= \int_{D \cap B_R(z)} \left(\frac{1}{|x-z|^2} + \frac{1}{|x-z|^4} \right) dx + \int_{D \setminus B_R(z)} \left(\frac{1}{|x-z|^2} + \frac{1}{|x-z|^4} \right) dx \\ &\leq \int_h^R \pi r^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} \right) dr + C_1 \leq \pi(R-h) + \frac{1}{h} - \frac{1}{R} + C_1. \end{aligned}$$

بنابراین ثابتهای $C, E > 0$ وجود دارند که

$$\begin{aligned} \|\Phi(\cdot, z)\|_{H^1(D)}^2 &\leq \|\Phi_\circ(\cdot, z)\|_{H^1(D)}^2 + \|\Phi(\cdot, z) - \Phi_\circ(\cdot, z)\|_{H^1(D)}^2 \\ &\leq C + E\left(\frac{1}{h} - h\right). \end{aligned}$$

با قرار دادن $c = E + \frac{C^2}{4E}$ به نامساوی

$$\|\Phi(\cdot, z)\|_{H^1(D)}^2 \leq \frac{c}{d(z, D)}$$

□ می‌رسیم که برای هر $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ معتبر است.

لم ۷.۵ و رابطه (۲۵.۵) تقریبی برای توابع ψ_D و ψ_I ارائه می‌کنند.

گزاره ۸.۵ (الف) اگر $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ، آنگاه ثابتهای $c, \tau > 0$ وجود دارند که برای هر $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ که

$$0 < d(z, D) < \tau$$

$$\|\psi_D(\cdot, z)\|_{\dot{H}^{-1/2}(\Gamma_D)}^2, \|\psi_I(\cdot, z)\|_{\dot{H}^{1/2}(\Gamma_I)}^2 \leq c |\ln d(z, D)|.$$

به علاوه برای هر $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ ، این تقریب به صورت زیر می‌باشد که در آن C و E ثابتهای وابسته به D

هستند

$$\|\psi_D(\cdot, z)\|_{\dot{H}^{-1/2}(\Gamma_D)}^2, \|\psi_I(\cdot, z)\|_{\dot{H}^{1/2}(\Gamma_I)}^2 \leq C |\ln d(z, D)| + E.$$

(ب) اگر $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ، آنگاه برای هر $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ تقریب زیر برقرار است

$$\|\psi_D(\cdot, z)\|_{\dot{H}^{-1/2}(\Gamma_D)}^2, \|\psi_I(\cdot, z)\|_{\dot{H}^{1/2}(\Gamma_I)}^2 \leq \frac{c}{d(z, D)}.$$

۲-۴-۵ تکینگی $\Phi^s(z, z)$ روی مرز

در این قسمت تکینگی $\Phi^s(z, z)$ روی مرز ∂D اثبات می‌شود. این مطلب در حالت‌هایی که D مانع نرم - صوت یا سخت - صوت باشد، در [۳۵] اثبات شده است. قضیه زیر نتایج مربوطه را بیان می‌کند. در این قضیه مانع D در گوی B قرار دارد.

قضیه ۹.۵ $\Phi^s(\cdot, z)$ را میدان پراکنده شده منبع نقطه‌ای $\Phi(\cdot, z)$ توسط مانع نرم - صوت یا سخت - صوت D بگیرید

(الف) اگر $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ، آنگاه ثابت‌های $c, \tau > 0$ وجود دارند که Φ^s برای $0 < d(z, D) < \tau$ در تقریب پایینی زیر صدق می‌کند:

$$|\Phi^s(z, z)| \geq c |\ln d(z, D)|.$$

همچنین ثابت‌های $C, E > 0$ وجود دارند که تقریب بالایی

$$|\Phi^s(z, z)| \leq C |\ln d(z, D)| + E,$$

برای همه نقاط $z \in B \setminus \bar{D}$ برقرار است.

(ب) اگر $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ، تقریب‌های بیان شده در قسمت قبل بدین صورت خواهند بود

$$|\Phi^s(z, z)| \geq \frac{c}{d(z, D)}, \quad |\Phi^s(z, z)| \leq \frac{C}{d(z, D)}.$$

برهان. قضیه را برای موانع سخت - صوت در بعد ۳ اثبات می‌کنیم. در این حالت بنا بر قضیه ۱۰.۳

[۱۴]، میدان Φ^s را به صورت

$$\Phi^s(\cdot, z) = 2P(I - K' - iTS'_0)^{-1} \frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial \nu}, \quad z \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D,$$

می توان نشان داد، که عملگر P با ضابطه زیر تعریف می شود.

$$P = S + iDS_0^\vee$$

اگر $z_0 \in \partial D$ آنگاه $z_h := z_0 + h\nu(z_0)$

$$\begin{aligned} \Phi^s(\cdot, z_h) &= \Upsilon P(I - K' - iTS_0^\vee)^{-1} \frac{\partial \Phi(\cdot, z_h)}{\partial \nu} \\ &= -\Upsilon P(I - K' - iTS_0^\vee)^{-1} \frac{\partial \Phi(\cdot, z_{-h})}{\partial \nu} + \Upsilon P(I - K' - iTS_0^\vee)^{-1} \left\{ \frac{\partial \Phi(\cdot, z_h)}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi(\cdot, z_{-h})}{\partial \nu} \right\} \\ &= -\Phi^s(\cdot, z_{-h}) + \Upsilon P(I - K' - iTS_0^\vee)^{-1} \left\{ \frac{\partial \Phi(\cdot, z_h)}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi(\cdot, z_{-h})}{\partial \nu} \right\} \end{aligned}$$

به دلیل اینکه $z_{-h} \in D$ ، جمله اول عبارت بالا برابر است با:

$$-\Phi^s(x, z_{-h}) = \Phi(x, z_{-h}), \quad x \in \mathbb{R}^r \setminus D.$$

با توجه به تکینگی جواب اساسی Φ که از مرتبه اول است، برای رسیدن به تقریبهای بیان شده در قضیه کافی است، ثابت شود مرتبه تکینگی جمله دوم کمتر از تکینگی جمله اول است. ثابت می کنیم برای مقادیر به اندازه کافی کوچک $h < \epsilon$ ، تخمین زیر برقرار است:

$$|\Upsilon P(I - K' - iTS_0^\vee)^{-1} \left\{ \frac{\partial \Phi(\cdot, z_h)}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi(\cdot, z_{-h})}{\partial \nu} \right\}(z_h)| \leq C |\ln h|.$$

به همین منظور قرار می دهیم

$$\Psi_h(y) := \frac{\partial \Phi(y, z_h)}{\partial \nu(y)} + \frac{\partial \Phi(y, z_{-h})}{\partial \nu(y)}, \quad y \in \partial D.$$

از طرفی

$$P(I - K' - iTS_0^\vee)^{-1} = P + P(I - K' - iTS_0^\vee)^{-1}(K' + iTS_0^\vee).$$

بنابراین

$$\begin{aligned} P(I - K' - iTS_0^\vee)^{-1} \Psi_h &= S\Psi_h + iDS_0(S_0\Psi_h) + P(I - K' - iTS_0^\vee)^{-1} K' \Psi_h + \\ &\quad + iP(I - K' - iTS_0^\vee)^{-1} TS_0(S_0\Psi_h). \end{aligned}$$

نشان می‌دهیم که کرانه‌های لگاریتمی زیر برقرارند

$$\begin{aligned} |(S\Psi_h)(z_h)| &\leq c|\ln h|, \\ |(S\circ\Psi_h)(x)| &\leq c|\ln h|, \quad x \in \partial D, \\ |(K'\Psi_h)(x)| &\leq c|\ln h|, \quad x \in \partial D. \end{aligned} \tag{۲۶.۵}$$

با فرض درستی این روابط، اثبات قضیه با توجه به کرانداری عملگرهای زیر تمام می‌شود. (برای اثبات این مطلب به [۱۳] و [۱۴] مراجعه شود.)

$$\begin{aligned} (I - K' - iTS^*)^{-1} &: C(\partial D) \rightarrow C(\partial D), \\ TS &: C(\partial D) \rightarrow C(\partial D), \\ S &: C(\partial D) \rightarrow C^{\circ,\alpha}(\partial D), \\ D &: C^{\circ,\alpha}(\partial D) \rightarrow C(B \setminus \bar{D}). \end{aligned}$$

اکنون به روابط (۲۶.۵) برمی‌گردیم. با توجه به مشتق‌پذیری $\Phi(x, y) - \Phi_0(x, y)$ و پیوستگی مشتق عمودی

آن کافی است (۲۶.۵) برای Φ_0 به جای Φ اثبات شود. بدین ترتیب Ψ_h برابر است با:

$$\begin{aligned} \Psi_h(y) &= \frac{\partial\Phi_0(y, z_h)}{\partial\nu(y)} + \frac{\partial\Phi_0(y, z_{-h})}{\partial\nu(y)} \\ &= \frac{\nu(y) \cdot (y - z_0)}{|y - z_h|^3} + \frac{\nu(y) \cdot (y - z_0)}{|y - z_{-h}|^3} - \nu(y)\nu(z)h \left(\frac{1}{|y - z_h|^3} - \frac{1}{|y - z_{-h}|^3} \right). \end{aligned} \tag{۲۷.۵}$$

از طرفی بنا بر لم ۱۰.۱.۲ در [۳۵] نامساویهای زیر برای مقدار ثابت τ, C, L برقرار است

$$\begin{aligned} |\nu(y) \cdot (y - z_0)| &\leq L|y - z_0|^2, \\ \left| \frac{1}{|y - z_h|^3} - \frac{1}{|y - z_{-h}|^3} \right| &\leq C, \quad 0 < h \leq \tau. \end{aligned}$$

در نتیجه دو جمله اول عبارت (۲۷.۵) را می‌توان با

$$C|y - z_{\pm}|^{-1},$$

تقریب زد. جمله آخر (۲۷.۵) را نیز می‌توان بدین صورت نوشت:

$$\nu(y)\nu(z)h \left(\frac{1}{|y - z_h|^3} - \frac{1}{|y - z_{-h}|^3} \right) = \frac{\nu(y)\nu(z)h}{|y - z_h|^2} \left(\frac{1}{|y - z_h|} - \frac{1}{|y - z_{-h}|} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\nu(y)\nu(z)h}{|y-z_h||y-z_{-h}|} \left(\frac{1}{|y-z_h|} - \frac{1}{|y-z_{-h}|} \right) \\
 & + \frac{\nu(y)\nu(z)h}{|y-z_{-h}|^2} \left(\frac{1}{|y-z_h|} - \frac{1}{|y-z_{-h}|} \right)
 \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به اینکه $h < |y - z_{\pm h}|$ ، نتیجه می‌شود

$$|\Psi_h(y)| \leq C \left(\frac{1}{|y-z_h|} - \frac{1}{|y-z_{-h}|} \right).$$

از طرف دیگر هسته عملگرهای S ، S_0 و K' در نامساویهای زیر صدق می‌کنند. در این نامساویها

$$x_\eta = x_0 + \eta\nu(x_0) \text{ و } \eta \in [0, h]$$

$$\begin{aligned}
 |\Phi(x_\eta, y)| & \leq \frac{C}{|x_\eta - y|}, \\
 \left| \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \right| & \leq \frac{C|(x-y) \cdot \nu(y)|}{|x-y|^3} \leq \frac{C}{|x-y|}.
 \end{aligned}$$

بنابراین برای اثبات (۲۶.۵) باید تقریبی برای عبارت زیر پیدا کرد،

$$\left| \int_{\partial D} \frac{1}{|x_\eta - y|} \frac{1}{|y - z_{\pm h}|} ds(y) \right|. \quad (28.5)$$

برای محاسبه این انتگرال مقدار R را به اندازه کافی کوچک انتخاب کرده و

$$\int_{\partial D} \dots ds(y) = \int_{\partial D \cap B_R(x_0)} \dots ds(y) + \int_{\partial D \setminus B_R(x_0)} \dots ds(y). \quad (29.5)$$

مقدار انتگرال دوم کوچکتر است از

$$\frac{1}{R} \int_{\partial D \setminus B_R(x_0)} \frac{1}{|y - z_{\pm h}|} ds(y).$$

هر چند هسته $|y - z_{\pm h}|^{-1}$ تکینگی دارد، ولی انتگرالپذیر است و انتگرال فوق کراندار است. تقریب انتگرال اول عبارت (۲۹.۵) به روش زیر پیدا می‌شود. مشابه قبل با در نظر گرفتن گوی $B_R(z_0)$ می‌توان فرض کرد که $|x_0 - z_0| < 2R$. در این حالت مبدأ دستگاه مختصات را در نقطه x_0 فرض کرده و $\nu(x_0) = (0, 0, 1)$ همچنین z_0 را روی محور e_1 در نظر می‌گیریم. در این صورت T_{x_0} ، صفحه مماس در نقطه x_0 ، منطبق بر

صفحه $e_1 - e_2$ باشد. در ضمن فرض می‌کنیم T_{z_0} صفحه مماس گذرا از نقطه z_0 می‌باشد. با این فرض اگر \hat{y} تصویر y در صفحه T_{z_0} باشد، آنگاه

$$|y - z_{\pm h}| \geq c\sqrt{|\hat{y} - z_0|^2 + h^2}.$$

همچنین اگر \tilde{y} و \tilde{z}_0 تصاویر \hat{y} و z_0 بر صفحه T_{x_0} باشند، با کمک مختصات قطبی (r, θ) در T_{x_0} تخمین زیر به دست می‌آید

$$|\hat{y} - z_0| \geq |\tilde{y} - \tilde{z}_0| = \sqrt{r^2 - 2|x_0 - y_0|r\cos\theta + |x_0 - \tilde{z}_0|^2}$$

و همچنین

$$|y - x_\eta| \geq |\tilde{y} - x_0| = r.$$

با قرار دادن $b := |x_0 - \tilde{z}_0| \in [0, 2R]$ می‌توان عبارت (۲۸.۵) را با انتگرال زیر تقریب زد

$$\int_0^R \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2br + b^2 + h^2}} dr = -\ln(\sqrt{b^2 + h^2} - b) + \ln(\sqrt{h^2 + (R-b)^2} + R-b).$$

در نتیجه برای تمام مقادیر $\eta \in [0, h]$ و $h > 0$ به اندازه کافی کوچک نامساوی زیر برقرار است

$$\int_{\partial D} \frac{1}{|x_\eta - y|} \frac{1}{|y - z_{\pm h}|} ds(y) \leq C|\ln h|.$$

□

اکنون با استفاده از نتایج قضیه قبل، تکینگی $\Phi^*(z, z)$ را روی ∂D برای موانع به طور موضعی پوشیده

شده اثبات می‌کنیم. در اینجا فرض می‌شود $\partial D = \Gamma_D \cup \Pi \cup \Gamma_I$ که Γ_I و Γ_D هموار و از کلاس C^2 می‌باشند.

قضیه ۱۰.۵ اگر $\Phi^*(\cdot, z)$ میدان پراکنده شده منبع نقطه‌ای $\Phi^*(\cdot, z)$ توسط مانع به طور موضعی پوشیده

شده D باشد، آنگاه در صورتی که z به نقطه‌ای در $\Gamma_D \cup \Gamma_I$ میل کند،

$$|\Phi^*(z, z)| \rightarrow \infty.$$

برهان. قضیه را تنها در حالت بعد ۳ اثبات می‌کنیم. اثبات در حالت بعد ۲ به طور مشابه برقرار است.

فرض کنید $z \rightarrow z^* \in \Gamma$ ، دو حالت $z^* \in \Gamma_D$ و $z^* \in \Gamma_I$ را به طور جداگانه در نظر می‌گیریم.

حالت اول: $z^* \in \Gamma_D$. در این حالت $\omega_D(\cdot, z)$ را جواب تشعشی معادله زیر در نظر بگیرید

$$\Delta \omega_D + k^2 \omega_D = 0 \quad \text{در } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$\omega_D = \psi_I(\cdot, z) \quad \text{روی } \Gamma$$

(تعریف ψ_I در ۵-۴-۱ آمده است.) در نتیجه $\omega_D \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ و اگر $D \subseteq B$ آنگاه

$$\|\omega_D(\cdot, z)\|_{H^1(B \setminus \bar{D})} \leq C \|\psi_I(\cdot, z)\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

بنا بر گزاره ۸.۵ نامساوی زیر برای همه مقادیر $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ برقرار است

$$\|\omega_D(\cdot, z)\|_{H^1(B \setminus \bar{D})} \leq \frac{C}{d(z, D)}. \quad (30.5)$$

همچنین فرض کنید $u_D(\cdot, z)$ جواب تشعشی معادله هلموتز با شرط مرزی زیر باشد

$$u_D(\cdot, z) = -\Phi(\cdot, z) \quad \text{روی } \Gamma$$

بنا بر یکتایی جواب تشعشی معادله هلموتز و رابطه (۲۴.۵) نتیجه می‌شود

$$\Phi^s(\cdot, z) = u_D(\cdot, z) + \omega_D(\cdot, z) \quad \text{در } \mathbb{R}^3 \setminus D$$

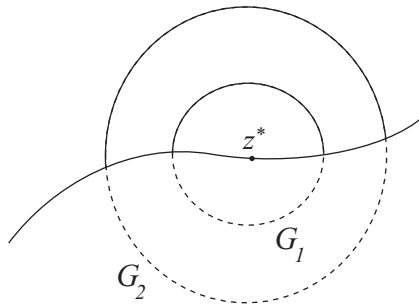
از طرفی بنا بر قضیه ۹.۵ نتیجه می‌شود که برای هر z نزدیک D ، تابع u_D در نامساوی زیر صدق می‌کند

$$|u_D(z, z)| \geq \frac{c}{d(z, D)}.$$

اکنون نشان می‌دهیم که تکینگی $\omega_D(z, z)$ از مرتبه‌ای کمتر از $\frac{1}{d(z, D)}$ است و این مطلب اثبات را کامل

می‌کند. به همین منظور نشان می‌دهیم

$$|\omega_D(z, z)| \leq \frac{c}{d(z, D)^{1/2}}.$$



شکل ۵-۱:

برای برقراری این نامساوی همسایگی‌های G_1 و G_2 از z^* را در نظر می‌گیریم به طوری که
 از طرفی چون محمل ψ_I در Γ_I قرار دارد، بنابراین $\psi_I|_{\Gamma_D} = 0$ و در نتیجه
 $G_2 \cap \Gamma \subseteq \Gamma_D$ و $\bar{G}_1 \subseteq G_2$. حال با استفاده از قضیه نظم جواب معادلات بیضوی روی مرز ناحیه (به عنوان
 مثال به قضیه ۱۸.۴ در [۳۳] مراجعه شود) نتیجه می‌شود که $\omega_D(\cdot, z) \in H^2(\Omega_1)$ که $\Omega_i = G_i \setminus \bar{D}$ و

$$\|\omega_D(\cdot, z)\|_{H^2(\Omega_1)} \leq C \left(\|\omega_D(\cdot, z)\|_{H^1(\Omega_2)} + \|\psi_I\|_{H^{3/2}(G_2 \cap \Gamma)} \right).$$

از مقایسه این نامساوی و رابطه (۳۰.۵) و با توجه به اینکه $\psi_I|_{\Gamma_D} = 0$ نتیجه می‌شود

$$\|\omega_D(\cdot, z)\|_{H^2(\Omega_1)}^2 \leq \frac{c}{d(z, D)}.$$

از طرف دیگر قضیه نشان‌دهنده فضاهاى هولدر در فضای سوپولف نتیجه می‌دهد که $\omega_D(\cdot, z)$ پیوسته هولدر
 است و

$$|\omega_D(x, z)| \leq C \|\omega_D(\cdot, z)\|_{H^2(\Omega_1)},$$

برای همه مقادیر $x \in \Omega_1$. بنابراین برای هر $z \in \Omega_1$

$$|\omega_D(z, z)| \leq \frac{c}{d(z, D)^{1/2}}.$$

حالت دوم: $z^* \in \Gamma_I$. مشابه حالت اول $\omega_I(\cdot, z)$ را جواب تشعشعی معادله زیر در نظر بگیرید

$$\Delta \omega_I + k^2 \omega_I = 0 \quad \text{در } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$$

$$\frac{\partial \omega_I}{\partial \nu} + i\lambda \omega_I = \psi_D(\cdot, z) \quad \Gamma \text{ روی}$$

به طور مشابه $\omega_I(\cdot, z) \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$ و

$$\|\omega_I(\cdot, z)\|_{H^1(B \setminus \bar{D})} \leq \frac{C}{d(z, D)}.$$

در این حالت نیز

$$\Phi^s(\cdot, z) = \omega_I(\cdot, z) + u_I(\cdot, z),$$

که در آن $u_I(\cdot, z)$ جواب تشعشی معادله هلمولتز با شرایط مرزی زیر می باشد

$$\frac{\partial u_I}{\partial \nu} + i\lambda u_I = -\frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial \nu} - i\lambda \Phi(\cdot, z).$$

ادعا می کنیم که در این حالت

$$|u_I(\cdot, z)| \geq \frac{c}{d(z, D)}, \quad |\omega_I(z, z)| \leq \frac{c}{d(z, D)^{1/2}}.$$

برای نشان دادن این روابط v را جواب تشعشی معادله هلمولتز با شرط مرزی زیر در نظر بگیرید

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = i\lambda \quad \Gamma \text{ روی}$$

در این صورت $\omega = e^v \omega_I$ در معادله زیر صدق می کند که

$$\begin{aligned} \Delta \omega + k^2 \omega &= f & \text{در } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \\ \frac{\partial \omega}{\partial \nu} &= e^v \psi_D(\cdot, z) & \Gamma \text{ روی} \end{aligned} \quad (31.5)$$

که در آن $f = e^v (|\nabla v|^2 \omega_I + 2\nabla v \cdot \nabla \omega_I - k^2 v \omega_I)$. مشابه حالت قبل با استفاده از قضیه نظم جواب

معادلات بیضوی روی مرز در همسایگی z^* نتیجه می شود، $\omega \in H^2(\Omega_1)$ و

$$\|\omega\|_{H^2(\Omega_1)} \leq C \left(\|\omega\|_{H^1(\Omega_r)} + \|e^v \psi_D\|_{H^2(\Gamma_r \cap \Gamma)} + \|f\|_{L^2(\Omega_r)} \right). \quad (32.5)$$

همچنین در اینجا $\psi_D|_{\Gamma_I} = 0$ و به علاوه چون v وابسته به z نمی باشد، پس

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{H^1(\Omega_r)} &\leq C \|\omega_I\|_{H^1(B \setminus \bar{D})} \leq \frac{C}{d(z, D)^{1/2}}, \\ \|f\|_{L^2(\Omega_r)} &\leq C \|\omega_I\|_{H^1(B \setminus \bar{D})} \leq \frac{C}{d(z, D)^{1/2}}, \end{aligned}$$

واز (۳۲.۵) نتیجه می شود

$$\|\omega\|_{H^2(\Omega_1)} \leq \frac{C}{d(z, D)^{1/2}}.$$

از طرف دیگر

$$\partial_i \partial_j \omega = e^v (\partial_i \partial_j v + \partial_i v \partial_j v \omega_I + \partial_i v \partial_j \omega_I + \partial_j v \partial_i \omega_I + \partial_i \partial_j \omega_I).$$

چون v روی Ω_2 کراندار است، پس مقدار مثبت m مستقل از z وجود دارد که

$$0 < m \leq |e^v| = e^{Re(v)}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} m \|\partial_i \partial_j \omega\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq \|\partial_i \partial_j \omega\|_{L^2(\Omega_1)} + \|\partial_i \partial_j \omega - e^v \partial_i \partial_j \omega_I\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &\leq \|\omega\|_{H^2(\Omega_1)} + C \|\omega_I\|_{H^1(\Omega_1)} \\ &\leq \frac{C}{d(z, D)^{1/2}}. \end{aligned}$$

بنابراین $\|\omega\|_{H^2(\Omega_1)} \leq \frac{C}{d(z, D)^{1/2}}$ و بنا بر قضیه نشان دادن فضای هولدر در فضای سوبولف نتیجه می شود

$$|\omega_I(z, z)| \leq \frac{C}{d(z, D)^{1/2}}.$$

برای تکمیل اثبات تنها باید نشان دهیم که

$$|u_I(z, z)| \geq \frac{C}{d(z, D)^{1/2}}.$$

مشابه قبل قرار می دهیم $u = e^v u_I$ و تابع u را به صورت $u = u^1 + u^2$ می نویسیم که در آن u^1 جواب

تثبعی معادله زیر است

$$\begin{aligned} \Delta u^1 + k^2 u^1 &= 0 && \text{در } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \\ \frac{\partial u^1}{\partial \nu} &= -\frac{\partial(e^v \Phi(\cdot, z))}{\partial \nu} && \text{روی } \Gamma \end{aligned}$$

و u^ν در معادله زیر صدق می کند که f مشابه (۳۱.۵) با جایگزینی u_I به جای w_I ، تعریف می شود

$$\begin{aligned} \Delta u^\nu + k^\nu u^\nu &= f && \text{در } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \\ \frac{\partial u^\nu}{\partial \nu} &= 0 && \text{روی } \Gamma \end{aligned}$$

مانند قبل نامساوی زیر برقرار است

$$\|u^\nu\|_{H^2(\Omega_\nu)} \leq C \left(\|u^\nu\|_{H^1(\Omega_\nu)} + \|f\|_{L^2(\Omega_\nu)} \right) \leq C \|u_I\|_{H^1(\Omega_\nu)} \leq \frac{C}{d(z, D)^{1/2}}.$$

بنابراین

$$|u^\nu(z, z)| \leq \frac{C}{d(z, D)^{1/2}}.$$

گزاره زیر نشان می دهد که

$$|u^\nu(z, z)| \geq \frac{C}{d(z, D)},$$

□ و با این نامساوی اثبات تکمیل می شود.

گزاره ۱۱.۵ فرض کنید $u(\cdot, z)$ جواب تشعشعی معادله هلمولتز با شرط مرزی زیر باشد

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{\partial(\omega \Phi(\cdot, z))}{\partial \nu} \quad \text{روی } \Gamma$$

که در آن ω تابعی هموار تعریف شده در خارج D می باشد. در بعد ۲ برای نقاط z نزدیک D نامساوی زیر

برقرار است

$$|u(z, z)| \geq c |\ln d(z, D)|.$$

در بعد ۳ این نامساوی بدین صورت خواهد بود

$$|u(z, z)| \geq \frac{C}{d(z, D)}.$$

برهان. قضیه ۹.۵ همین نتیجه را برای شرط مرزی

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial \nu} \quad \text{روی } \Gamma$$

بیان می‌کند و اثبات این گزاره همان اثبات قضیه ۹.۵ می‌باشد، با جایگزینی $\omega \Phi(\cdot, z)$ به جای $\Phi(\cdot, z)$. تنها باید توجه کرد که w و مشتق آن در همسایگی D کراندار است. □

۳-۴-۵ یکتایی مسأله وارون

در اینجا با استفاده از خاصیت تکینگی $\Phi^s(z, z)$ روی مرز، اثبات می‌شود که شکل مانع موج را می‌توان به طور یکتا بازیابی کرد. هر چند این روش یکتایی مسأله وارون را به آن صورت که در فصل ۳ مطرح شده است، اثبات نمی‌کند ولی اثبات کوتاهتری را برای یکتایی بازیابی شکل، ارائه می‌دهد.

قضیه ۱۲.۵ اگر D_1 و D_2 دو مانع به طور موضعی پوشیده شده باشند به طوری که الگوهای میدان دور آنها $u_1^\infty(\hat{x}, d)$ و $u_2^\infty(\hat{x}, d)$ برای تمام جهات $\hat{x}, d \in \Omega$ برابر باشند، آنگاه $D_1 = D_2$.

برهان. G را مولفه بیکران مکمل $\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$ بگیرید. از رابطه

$$u_1^\infty(\hat{x}, d) = u_2^\infty(\hat{x}, d), \quad \hat{x}, d \in \Omega,$$

ولم رلیش نتیجه می‌شود

$$u_1^s(x, d) = u_2^s(x, d), \quad x \in G, d \in \Omega.$$

با استفاده از رابطه (۳.۳) به رابطه زیر می‌رسیم

$$\Phi_1^\infty(\hat{x}, z) = \Phi_2^\infty(\hat{x}, z), \quad \hat{x} \in \Omega, z \in G.$$

اگر دوباره از لم رلیش استفاده کنیم، نتیجه می‌گیریم که

$$\Phi_1^s(x, z) = \Phi_2^s(x, z), \quad x, z \in G.$$

حال اگر $D_1 \neq D_2$ بدون کم شدن از کلیت مسأله می‌توان $z_0 \in \partial G$ را انتخاب کرد به طوری که $z_0 \in \partial D_1 \setminus D_2$ با استفاده از قضیه ۱۰.۵ نتیجه می‌شود

$$\infty > \Phi_{\gamma}^s(z_0, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0, z \in G} \Phi_{\gamma}^s(z, z) = \lim_{z \rightarrow z_0, z \in G} \Phi_1^s(z, z) = \infty.$$

این تناقض نشان می‌دهد که $D_1 = D_2$. □

۴-۴-۵ بازیابی شکل مانع

از خاصیت تکینگی $\Phi^s(z, z)$ نتیجه می‌شود که مرز مانع موج مجموعه نقاطی است که $\Phi^s(z, z)$ در آن نقاط بسیار بزرگ است. لذا برای بازیابی شکل مانع باید $\Phi^s(z, z)$ را از اطلاعات اولیه $u^\infty(\hat{x}, d)$ به دست آورد. برای این منظور اگر D در داخل گوی B واقع باشد، مانند روش منبع نقطه‌ای در بخش ۵-۲، برای هر $z \in B$ با انتخاب ناحیه $G(z)$ که $z \notin G(z)$ و k^2 مقدار ویژه دیریکله آن نباشد، می‌توان تابع $g_\tau(z, \cdot) \in L^2(\Omega)$ را انتخاب نمود به طوری که

$$\|\Phi(\cdot, z) - v_{g_\tau}\|_{H^1(D)} \leq \tau$$

که در آن $v_{g_\tau}(x) := \int_{\Omega} g_\tau(z, d) e^{ikx \cdot d} ds(d)$ موج هرگلوتر با هسته g_τ می‌باشد. همان طور که آنجا اشاره شد، از این رابطه نتیجه می‌شود

$$\|\Phi^\infty(\cdot, z) - v_{g_\tau}^\infty\|_{L^2(\Omega)} \leq C\tau,$$

و همچنین

$$\|\Phi^s(\cdot, z) - v_{g_\tau}^s\|_{H^1(B \setminus \bar{D})} \leq C\tau, \quad (33.5)$$

که مقدار ثابت C تنها به B و D وابسته است. با قرار دادن $D_\rho = \{z \in \mathbb{R}^m \mid d(z, D) \leq \rho\}$ و با استفاده از نظم جواب معادلات بیضوی نتیجه می‌شود که برای هر $x \in B \setminus D_\rho$

$$\|\Phi^s(\cdot, z) - v_{g_\tau}^s\|_{H^1(B_\rho(x))} \leq C \|\Phi^s(\cdot, z) - v_{g_\tau}^s\|_{H^1(B_\rho(x))} \leq C \setminus C\tau.$$

در این رابطه B_ρ گوی به شعاع ρ و مرکز x می باشد. به علاوه C_1 تنها به ρ وابسته است. همچنین با به کارگیری قضیه نشانیدن فضای هولدر در فضای سوبولف نتیجه می شود که $\Phi^s(\cdot, z) - v_{g_\tau}^s$ در B_ρ پیوسته هولدر است و

$$|\Phi^s(x, z) - v_{g_\tau}^s(x)| \leq C_1 \|\Phi^s(\cdot, z) - v_{g_\tau}^s\|_{H^1(B_\rho(x))} \leq C_1 C_1 C_\tau = C_\rho \tau, \quad (34.5)$$

که ثابت C_ρ تنها به ρ ، B و D وابسته است. از طرف دیگر می دانیم که

$$v_{g_\tau}^s(x) = \int_\Omega g_\tau(z, d) u^s(x, d) ds(d), \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{D}, \quad (35.5)$$

و

$$v_{g_\tau}^\infty(\hat{x}) = \int_\Omega g_\tau(z, d) u^\infty(\hat{x}, d) ds(d), \quad \hat{x} \in \Omega. \quad (36.5)$$

از روابط (34.5)، (35.5) و (33.3) نتیجه می شود

$$\left| \Phi^s(x, z) - \frac{1}{\gamma_m} \int_\Omega g_\tau(z, d) \Phi^\infty(-d, x) ds(d) \right| \leq C_\rho \tau.$$

اکنون از (33.5) و (36.5) نتیجه می گیریم که تابع $g_\eta(x, \cdot)$ وجود دارد به طوری که

$$\left\| \Phi^\infty(\cdot, x) - \int_\Omega g_\eta(x, \tilde{d}) u^\infty(x, \tilde{d}) ds(\tilde{d}) \right\|_{L^1(\Omega)} \leq C\eta.$$

بنابراین

$$\left| \int_\Omega g_\tau(z, d) \{ \Phi^\infty(-d, x) - \int_\Omega g_\eta(x, \tilde{d}) u^\infty(-d, \tilde{d}) ds(\tilde{d}) \} ds(d) \right| \leq$$

$$\|g_\tau(z, \cdot)\|_{L^1(\Omega)} \cdot \|\Phi^\infty(\cdot, x) - v_{g_\eta}^\infty\|_{L^1(\Omega)} \leq C\eta \|g_\tau(z, \cdot)\|_{L^1(\Omega)}$$

در نتیجه برای هر $x, z \in B \setminus D_\rho$ به رابطه زیر می رسیم

$$\left| \Phi^s(x, z) - \frac{1}{\gamma_m} \int_\Omega \int_\Omega g_\eta(x, \tilde{d}) g_\tau(z, d) u^\infty(-d, \tilde{d}) ds(\tilde{d}) ds(d) \right| \leq C_\rho \tau + \frac{C\eta}{\gamma_m} \|g_\tau(z, \cdot)\|_{L^1(\Omega)}$$

نتایج به دست آمده تاکنون، در قضیه زیر جمع بندی می شود. برای این منظور عملگر تصویر برگردان Q را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$(Q\omega)(x, z) := \frac{1}{\gamma_m} \int_\Omega \int_\Omega g_\eta(x, \tilde{d}) g_\tau(z, d) u^\infty(-d, \tilde{d}) ds(\tilde{d}) ds(d).$$

قضیه ۱۳.۵ فرض کنید D مانع به طور موضعی پوشیده شده‌ای است که در گوی B قرار دارد. در این صورت برای هر τ و η توابع g_τ و g_η وجود دارند که برای هر $z \in \mathbb{R}^m \setminus D_\rho$ تخمین زیر برقرار باشد

$$|\Phi^s(z, z) - (Qu^\infty)(z, z)| \leq C_\rho \tau + \frac{C\eta}{\gamma_m} \|g_\tau(z, \cdot)\|_{L^2(\Omega)},$$

به علاوه مقادیر C و C_ρ ثابت هستند.

تذکر ۱۴.۵ با انتخاب مناسب τ و η می‌توان خطای تخمین بالا را به اندازه کافی کوچک کرد. برای این منظور با در نظر گرفتن $\tau > 0$ می‌توان η را به گونه‌ای انتخاب کرد که $\|g_\tau(z, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ به اندازه کافی کوچک باشد. حال اگر $\tau \rightarrow 0$ و $\eta(\tau) \rightarrow 0$ نیز به صفر میل می‌کند.

تذکر ۱۵.۵ عملگر Q وابسته است به محاسبه توابع g_τ و g_η . در بخش ۲.۵ روشی برای محاسبه این توابع ارائه شد که به وسیله دوران و انتقال، تابع $g_\tau(z, \cdot)$ برای تمام مقادیر z از محاسبه $g_\tau(0, \cdot)$ به دست می‌آید.

تذکر ۱۶.۵ در کاربردهای عملی هیچ موقع مقدار دقیق u^∞ مشخص نیست، بلکه تقریبی از آن ارائه می‌شود. اگر u_δ^∞ با خطای

$$\|u_\delta^\infty - u^\infty\|_{L^2(\Omega \times \Omega)} \leq \delta$$

ارائه شده باشد، آنگاه

$$|Q(u^\infty - u_\delta^\infty)(x, z)| \leq \delta \|g_\eta(x, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \|g_\tau(z, \cdot)\|_{L^2(\Omega)},$$

و در نهایت

$$|\Phi^s(z, z) - (Qu_\delta^\infty)(z, z)| \leq C_\rho \tau + \frac{C\eta}{\gamma_m} \|g_\tau(z, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \delta \|g_\eta(z, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \|g_\tau(z, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}.$$

در پایان روش منابع تکین را گام به گام بیان می‌کنیم:

(۱) در ابتدا برای تعدادی متناهی جهت p_ξ ، $\xi = 1, \dots, N$ ، ناحیه‌های $G_{z, p_\xi, \rho}$ تعیین شده و برای مقدار

ثابت τ تابع چگالی $g_{\tau, \xi}(z, \cdot)$ با در نظر گرفتن هر ناحیه محاسبه می‌گردد.

(۲) با انتخاب مناسب η ، $g_{\eta, \xi}(z, \cdot)$ با استفاده از ناحیه‌های $G_{z, p_\xi, \rho}$ محاسبه می‌گردد.

(۳) با محاسبه عملگر Q ، تقریب $a_\xi^{(1)}(z) = (Q u_\delta^\infty)(z, z)$ برای $\Phi^s(z, z)$ پیدا می‌شود.

(۴) با در نظر گرفتن مقدار C که حکم بی‌نهایت را در محاسبات دارد، اولین تخمین از ناحیه D بدین

صورت ارائه می‌گردد

$$D_1 := \{z \in B : \xi = 1, \dots, N \text{ برای هر } |a_\xi^{(1)}(z)| > C\}.$$

(۵) در گام n -ام جهت‌های $p_n(z)$ بر اساس تخمین D_{n-1} محاسبه شده و تقریب $a^{(n)}(z)$ از $\Phi^s(z, z)$

ارائه می‌گردد و n -امین تخمین برابر است با:

$$D_n := \{z \in B : |a_\xi^{(n)}(z)| > C\}.$$

مراجع

- [١] Akduman I. and Kress R., Direct and Inverse Scattering Problems for Inhomogeneous Impedance Cylinders of Arbitrary Shape, *Radio Science*, vol. 38, No. 6, 1110, 2003.
- [٢] Alessandrini G. and Gabouro, R., Determining Conductivity with Special anisotropy by boundary measurements, *SIAM J. Math. Anal.*, **33**, 1, 153–171, 2001.
- [٣] Alessandrini G. and Rondi L., Determining a sound-soft polyhedral scattering by a single far-field measurement, *Proc. Amer. Math. Soc.*, (to appear).
- [٤] Aubert G. and Vese L., A variational method in Image recovery, *SIAM J. Numer. Anal.*, **34**, 5, 1948–1979, 1997.
- [٥] Bleistein N., Cohen J.K., Stockwell J.W. and Jr., *Mathematics of multidimensional seismic imaging, migration and inversion*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [٦] Cakoni F. and Colton D., On the mathematical basis of the linear sampling method, *Georgian Mathematical Journal*, Kupradze's Special issue, **10**, No. 3, 2003.
- [٧] Cakoni F. and Colton D., The determination of the surface impedance of a partially coated obstacle from far field data, *SIAM J. Appl. Math.* **64**, 709–723, 2004.
- [٨] Cakoni F., Colton D. and Haddar H., The linear sampling method for anisotropic media, *J. Comput. Appl. Math.*, 146, 285–299, 2002.
- [٩] Cakoni F., Colton D. and Monk P., The electromagnetic inverse scattering problem for partially coated Lipschitt domains, *Proc. Royal Society of Edinburgh*, (to appear).
- [١٠] Chapman S.J., Drums that Sound the same, *Amer. Math. Monthly*, **102**, 2, 124–138, 1995.
- [١١] Chew W., *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.

- [12] Colton D. and Kirsch A., A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region, *Inverse Problems*, **12**, 383–393, 1996.
- [13] Colton D. and Kress R., *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, John Wiley and Sons, 1983.
- [14] Colton D. and Kress R., *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [15] Colton D. and Päiväranta L., The uniqueness of a solution to an inverse scattering problem for electromagnetic waves, *Arch. Rational Mech. Anal.* **119**, 59–70, 1992.
- [16] Fotouhi M., Hesaaraki M., The reconstruction of the impedance and the coated portion of a partially coated obstacle, (Submitted).
- [17] Fotouhi M., Hesaaraki M., The Singular Sources Method for the reconstruction of a partially coated obstacle, (Submitted).
- [18] Glasko V.B., *Inverse Problems of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, New York, 1984.
- [19] Hoppe D.J. and Rahmat-Samii Y., *Impedance Boundary Conditions in Electromagnetics*, Taylor and Francis, 1995.
- [20] Isakov V., *Inverse Source Problems*, Math. Surveys and Monographs Series, vol. 34, AMS, providence, R.I., 1990.
- [21] Isakov V., On uniqueness in the inverse transmission scattering problem, *Comm. Part. Diff. Equa.* **15**, 1565–1587, 1990.
- [22] Isakov V., *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [23] Jain A.K., *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice-Hall, New York, 1989.
- [24] Kac M., Can one hear the shape of a drum?, *Amer. Math. Monthly*, **73**, 4, 1–23, 1966.
- [25] Kirsch A., *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [26] Kress R., *Newton's method for inverse obstacle scattering meets the method of least squares*, *Inverse Problems*, **19**, S91–S104, 2003.
- [27] Kress R. and Haddar H., On the Frechet derivative for obstacle scattering with an impedance boundary condition, *SIAM J. Appl. Math.*, (to appear).
- [28] Kress R. and Rundell W., Inverse scattering for shape and impedance, *Inverse Problems*, **17**, 1075–1085, 2001.

- [29] Lax P.D. and Phillips R.S., *Scattering Theory*, Academic Press, New York, 1967.
- [30] Leis R., *Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics*, John Wiley, New York, 1986.
- [31] Louis A.K., Medical imaging State of art and future developments *Inverse Problems*, **89** 709–738, 1992.
- [32] Louis A.K. and Natterer F., Mathematical Problems in Computerized tomography, *Proc. IEEE*, **71**, 379–384, 1983.
- [33] McLean W., *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, 2000.
- [34] Natterer F., *The mathematics of Computerized Tomography*, Teubner-Verlag, Stuttgart, 1986.
- [35] Potthast R., *Point Sources and multiples in inverse scattering theory*, Chapman&Hall/CRC, 2001.
- [36] Potthast R., Fréchet differentiability of boundary integral operators in acoustic scattering, *Inverse Problems*, **10**, 431–447, 1997.
- [37] Potthast R., Fréchet differentiability of the solution to the acoustic Neumann scattering problem with respect to the domain, *J. Inverse Ill-posed problems*, **4**, 67–84, 1996.
- [38] Potthast R., A fast new method to solve inverse scattering problems, *Inverse Problems*, **12**, 731–742, 1996.
- [39] Potthast R., Stability estimates and reconstruction in inverse scattering using singular sources, *J. Comp. Appl. Math.*, **114**, 247–274, 2000.
- [40] Potthast R., Domain derivatives in electromagnetic scattering, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **19**, 1157-1175, 1996.
- [41] Senior T.B.A. and Volakis J.L., *Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics*, The Institutions of Electrical Engineers, London, 1995.
- [42] Sun Z. and Uhlmann G., Recovery of singularities for formally determined inverse problems, *Commun. Math. Phys.*, **153**, 431–445, 1993.
- [43] Uhlmann G., *Recent Progress in the anisotropic electrical impedance problems*, Proceedings of the USA-Chile workshop on Nonlinear Analysis, *J. Diff. Eqns.*, Conf. 06, 2001, pp 303–311.
- [44] Vogel C.R., *Computational methods for inverse problems*, SIAM, 2002.
- [45] Zidarov D., *Inverse Gravimetric Problems in Geoprospecting and Geodesy*, Elsevier, Amsterdam, 1980.



Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

PhD Thesis in

Pure Mathematics

Title

Inverse Scattering Problems

Author

Morteza Fotouhi Firoozabad

Supervisor

Dr. Mahmood Hesaaraki

September 2004