به نام خدا

تمرین ریاضی مهندسی سری ۸

۱- انتگرال فوریه تابع f را یافته وبه کمک آن انتگرال زیر را حساب کنید :

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & |x|\le \frac{\pi}{2}\\ 0 & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}\qquad\qquad \int_0^\infty \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x^2}dx=?$$

۲- با توجه به معادله انتگرالی داده شده تابع f را بدست آورید :

$$\int_0^\infty f(\omega)\sin(\omega x)dx=\begin{cases}1-x & 0\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

۳- درستی تساوی های زیر را نشان دهید :

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos\pi\omega}{\omega}\sin(\omega x)d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & 0\le x\le\pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}\qquad\qquad \int_0^\infty \frac{\sin(\pi\omega)\sin(\omega x)}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin x & 0\le x\le \pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$$

٤- تبدیل فوریه کسینوسی $k>0, f(x)=e^{-kx^2}$ را بدست آورید :

(راهنمایی: رابطه انتگرالی تبدیل فوریه کسینوسی را نوشته و از آن نسبت به ω مشتق بگیرید ، مشتق بدست امده نیز یک انتگرال است ان را به روش جزبه جز حساب کنید تا رابطه ای بین تبدیل فوریه کسینوسی و مشتق ان بدست آید که یک معادله دیفرانسیل معمولی است معادله اخیر را حل کنید و ازانتگرال زیر هم کمک بگیرید .)

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

۵- مسایل زیر را به کمک تبدیل های انتگرالی حل کنید :

$$u_t=u_{xx}\qquad u(0,t)=0\qquad u(x,0)=\begin{cases}x & 0\le x\le\pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$$

$$u_{tt}=u_{xx}\qquad u_t(0,t)=0\quad u_x(0,t)=0\qquad u(x,0)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0\quad -\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty\qquad u(x,0)=\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}\qquad u_y(x,0)=0$$

$$u_{tt}-u_{xx}=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases}\qquad u_t(x,0)=0\quad u_x(0,t)=t\quad u(x,0)=0$$

$$u_t-u_{xx}=\begin{cases}2 & 0\le x\le\pi\\ 1 & x>\pi\end{cases}\qquad u(0,t)=t-1\quad u(x,0)=\begin{cases}2x-1 & 0\le x\le 1\\ -1 & x>1\end{cases}$$