

به نام او

وقت: ۱۵۰ دقیقه

امتحان میان ترم درس ریاضی مهندسی - پاییز ۸۵

۱- نمایش انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x & |x| \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$ را نوشته و به کمک آن انتگرال زیر را محاسبه نمایید. (۱۵ نمره)

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 - 1} dx$$

۲- با تغییر متغیر مناسب ابتدا فرم کانونیک معادله زیر را به دست آورید، سپس به کمک آن جواب عمومی معادله را بنویسید. (۱۵ نمره)

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2y$$

۳- تابع $u(x, t)$ در معادله موج زیر صدق می‌کند. مقدار دقیق $u(\frac{1}{4}, 3)$ را محاسبه نمایید. (۱۵ نمره)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} & 0 < x < 1, 0 < t \\ u(0, t) &= \sin t, & u_x(1, t) &= \cos t \\ u(x, 0) &= x, & u_t(x, 0) &= \cos \pi x \end{aligned}$$

۴- جواب معادله لاپلاس، $\Delta u = 0$ ، درون دایره به شعاع یک همراه با شرط مرزی زیر را به دست آورید. ($h > 0$ یک مقدار ثابت است). (۱۵ نمره)

$$u_r(1, \theta) + hu(1, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} \sin \theta & 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

۵- جواب معادلات زیر را به دست آورید. (۳۰ نمره)

الف -

$$\begin{aligned} u_{xx} + 2u_x &= u_t + u & 0 < x < 1, 0 < t \\ u(0, t) &= t & 0 < t \\ u(1, t) &= 0 & 0 < t \\ u(x, 0) &= x & 0 < x < 1 \end{aligned}$$

ب -

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= u_{xxt} & 0 < x, t \\ u(x, 0) &= e^{-x} & 0 < x \\ u_x(0, t) &= t & 0 < t \end{aligned}$$

موفق باشید.