به نام او

امتحان پایان ترم درس روشهای تغییراتی در آنالیز وقت امتحان: ۳ ساعت

---

۱. به کمک قضیه گذرگاه کوهستانی ثابت کنید مساله زیر برای $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ جواب غیر بدیهی دارد.

$$\begin{cases} \Delta u + |u|^{p-1} u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

۲. فرض کنید H فضای هیلبرت است و $\phi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی از کلاس C^1 است که $\nabla\phi$ به طور موضعی لیپ‌شیتز است. اگر $\nabla\phi(u) \neq 0$ برای هر $u \in H$ آنگاه به ازای هر مقدار c و هر $\epsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک دگردیسی $\eta \in C([0,1] \times H, H)$ وجود دارد که خواص زیر برقرار باشد:

$$\begin{array}{ll} i)\eta(0,u) = u, & ii)\eta(t,u) = u \ \text{ if } \phi(u) \notin [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon] \\ iii)\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon} & iv)\eta(t,\cdot) : H \longrightarrow H \ \text{ is a homeomorphism} \end{array}$$

۳. فرض کنید $X = V \oplus W$ یک فضای باناخ باشد که $\dim V < \infty$. همچنین فرض کنید $\phi \in C^1(X;\mathbb{R})$ تابعی باشد که در شرط PS صدق می‌کند. اگر D یک همسایگی مبدأ در V باشد که

$$a := \max_{\partial D} \phi < \inf_{W} \phi := b$$

آنگاه

$$c := \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \bar{D}} \phi(h(u))$$

یک مقدار بحرانی است که $c \geq b$. در اینجا $\Gamma = \{h \in C(\bar{D}, X) : h|_{\partial D} = id\}$.

۴. X را یک فضای باناخ گرفته و فرض کنید $\{T(\theta) : \theta \in S^1\}$ یک نمایش ایزومتری از S^1 در X باشد. به ازای هر زیرمجموعه بسته و ناوردای $A \subset X$ تعریف کنید $\text{ind}(A) = k$ که k کوچکترین عدد صحیحی است که به ازای آن نگاشت $\Phi \in C(A, \mathbb{C} - \{0\})$ وجود دارد که برای لااقل یک عدد صحیح در شرط زیر صدق کند:

$$\Phi(T(\theta)u) = e^{in\theta}\Phi(u)$$

اگر چنین kای وجود نداشت تعریف کنید $\text{ind}(A) = \infty$. ثابت کنید نگاشت ind یک S^1-اندیس روی X است.

۵. ثابت کنید اگر X فضای باناخ و $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد که از پایین کران‌دار است. نشان دهید به ازای هر دنباله مینیم‌ساز $\{u_n\}$ دنباله مینیم‌ساز جدید $\{v_n\}$ وجود دارد که

$$\phi(v_n) \leq \phi(u_n), \quad \|v_n - u_n\|_X \to 0, \quad \|\phi'(v_n)\|_{X'} \to 0$$

موفق باشید.

۹۵/۱۰/۱۹