به نام او

امتحان میان ترم درس آنالیز حقیقی وقت امتحان: ۳ ساعت ۹۲/۸/۱۵

---

۱. تعریف اندازه خارجی m_* و مجموعه اندازه‌پذیر را در $\mathbb{R}^n$ بنویسید و اثبات کنید که مجموعه E اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر A

$$m_*(A) = m_*(A \cap E) + m_*(A \cap E^c)$$

۲. با یک مثال نشان دهید که اگر $m(A) = m(B) = 0$ لزوماً رابطه $m(A + B) = 0$ درست نیست.

۳. ثابت کنید هر دنباله همگرا در $\mathcal{L}^1$ زیردنباله‌ای دارد که تقریباً همه جا همگرا است.

۴. اگر $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع اندازه‌پذیر و نامنفی باشد، مجموعه $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$ اندازه‌پذیر است و

$$m(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$$

۵. اگر f تابع انتگرال‌پذیر در $\mathbb{R}^n$ باشد و B_r گوی به شعاع r به مرکز x، نشان دهید برای تقریباً همه مقادیر x تساوی زیر برقرار است:

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{B_r} f(y)\, dy = f(x)$$

۶. اگر K تابعی انتگرال‌پذیر روی $\mathbb{R}^n$ باشد که $\int_{\mathbb{R}^n} K(x)dx = 1$. قرار دهید $K_\delta(x) = \delta^{-n} K(\frac{x}{\delta})$ و ثابت کنید برای هر $f \in \mathcal{L}^1$

$$\lim_{\delta \to 0^+} \|f * K_\delta - f\|_{\mathcal{L}^1} = 0$$

موفق باشید.