به نام او

امتحان پایان ترم درس آنالیز حقیقی وقت امتحان: ۳ ساعت

---

۱. دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را در $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید که $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ و قرار دهید $J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{(x_n,\infty)}$. ثابت کنید J' تقریباً همه جا وجود دارد و برابر صفر است.

۲. عملگر خطی کراندار $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ را روی یک فضای هیلبرت در نظر بگیرید. عملگر الحاقی T^* را تعریف کرده و وجود آن را اثبات نمایید. هم‌چنین نشان دهید $\|T^*\| = \|T\|$.

۳. فرض کنید اندازه‌های مثبت ν و μ روی $(X, \mathcal{M})$، σ-متناهی باشند. تعریف پیوستگی مطلق ν نسبت به μ را بیان کرده و ثابت کنید که در این شرایط تابع μ-انتگرالپذیر f وجود دارد که $d\nu = f\, d\mu$. (استفاده از قضیه رادون-نیکودیم جایز نیست.)

۴. دنباله f_n در $\mathcal{L}^1$ تقریباً همه جا به تابع f همگرا است. ثابت کنید $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$ اگر و تنها اگر $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$.

۵. اگر $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله متعامد یکه در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد و c_n یک دنباله از اعداد حقیقی که $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$، نشان دهید مجموعه $A = \{\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n : |a_n| \le |c_n|\}$ در $\mathcal{H}$ فشرده است.

۶. اگر ν یک اندازه علامتدار σ-متناهی روی X باشد. نشان دهید مجموعه‌های اندازه پذیر A و B وجود دارند که $A \cup B = X$، $A \cap B = \varnothing$ و برای هر مجموعه اندازه پذیر E

$$\nu_+(E) = \nu(E \cap A), \qquad \nu_-(E) = -\nu(E \cap B).$$

(یادآوری: $\nu_+ = \frac{1}{2}(|\nu| + \nu)$ و $\nu_- = \frac{1}{2}(|\nu| - \nu)$ که $|\nu|$ اندازه تغییرات کلی ν است.)

موفق باشید.

۹۲/۱۰/۱۸