



۱. یک مدل ترافیک را بر مبنای اصل بقای جرم بنویسید که سرعت حرکت ماشینها با رابطه

$$v(\rho) = \begin{cases} v_m & \circ \leq \rho \leq \rho_c \\ \lambda \log\left(\frac{\rho_m}{\rho}\right) & \rho_c \leq \rho \leq \rho_m \end{cases}$$

مشخص شده است که در آن  $\rho$  میزان چگالی ماشینها است و

$$\lambda = \frac{v_m}{\log(\rho_m/\rho_c)}.$$

برای  $\rho_m$  و  $\rho_c$  چه تعبیری می‌توانید بیان کنید؟ جواب ضعیف این معادله را با شرط اولیه

$$\rho(x, \circ) = \begin{cases} \rho_m & x < \circ \\ \circ & x > \circ \end{cases}$$

به دست آورید.

۲. الف- به کمک روش جداسازی متغیرهای جواب مساله زیر را برای  $g(x) = \cos(\pi x)$  به صورت یک سری فوریه

بیان کنید. آیا این سری، جواب کلاسیک مساله است؟

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + cu & \circ < x < 1, t > \circ \\ u(\circ, t) = 1, u(1, t) = \circ \\ u(x, \circ) = g(x) \end{cases}$$

ب- ثابت کنید اگر  $g \geq \circ$  آنگاه  $u \geq \circ$ .

۳. فرض کنید  $u \in C^2(\Omega)$  در رابطه  $\Delta u \geq \circ$  صدق می‌کند. ثابت کنید اگر  $B_r(x) \subset \Omega$  آنگاه

$$u(x) \leq \int_{B_r(x)} u(y) dy.$$

۴. قرار دهید  $B_1^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y > \circ\}$  و فرض کنید که  $u \in C^2(B_1^+) \cap C(\overline{B_1^+})$  یک

تابع هارمونیک در  $B_1^+$  باشد به طوریکه  $u(x, \circ) = \circ$ . نشان دهید تابع زیر در  $B_1$  هارمونیک است.

$$U(x, y) = \begin{cases} u(x, y) & y \geq \circ \\ -u(x, -y) & y < \circ \end{cases}$$

موفق باشید.