به نام او

**میان ترم درس نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل** (۹۱/۹/۲۰) وقت امتحان: ۲ ساعت

---

۱. نشان دهید معادله دیفرانسیل $\dot{x} = x^۲ - ۱ - \cos t$ دارای یک جواب تناوبی با دوره تناوب $۲\pi$ است. (۱۰ نمره)

۲. ثابت کنید دستگاههای خطی متناظر دو ماتریس $۲ \times ۲$ مزدوج توپولوژیکی هستند، به شرط آنکه قسمت حقیقی هر دو مقدار ویژه آنها مثبت باشد. (۱۵ نمره)

۳. یک شکل تقریبی از فضای فاز دستگاه زیر را رسم کنید و زیرفضاهای پایدار، ناپایدار و مرکزی را مشخص نمایید. (۱۵ نمره)

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} X$$

۴. ثابت کنید معادله $x'' + bx' + kx = \cos t$ برای $k, b > ۰$ دارای یک جواب تناوبی با دوره تناوب $۲\pi$ است و همه جوابهای معادله وقتی $t \longrightarrow +\infty$ به این جواب تناوبی همگرا می‌شوند. (۲۰ نمره)

۵. اگر جواب معادله زیر را با $x(t, a)$ نشان دهیم، یک معادله دیفرانسیل برای $u(t) = \frac{\partial x}{\partial a}(t, ۰)$ بنویسید و با محاسبه جواب آن یک تقریبی از جواب معادله زیر را برای مقادیر کوچک $a$ به دست آورید. (۲۰ نمره)

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^۲ + x \\ x(۰) = a + ۱ \end{cases}$$

۶. الف- قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس $A$ منفی است. ثابت کنید مقادیر ثابت $\mu, C > ۰$ وجود دارند که هر جواب $\dot{X} = AX$ با شرط اولیه $X(۰) = X_۰$ در رابطه زیر صدق کند:

$$|X(t)| \leq Ce^{-\mu t}|X_۰|, \qquad \text{برای هر } t > ۰$$

ب- نشان دهید نرم $\|\cdot\|_*$ برای فضای $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که

$$\|X(t)\|_* \leq e^{-\mu t}\|X_۰\|_*, \qquad \text{برای هر } t > ۰$$

**(راهنمایی:** $\|X_۰\|_* = \int_۰^T |\exp(s(A + \mu I))X_۰|ds$ ) (۳۰ نمره)

موفق باشید.