



تاریخ امتحان: ۸۸/۱۰/۱۹  
مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل

۲۲ - ۰۳۴

نیمسال اول ۸۹-۸۸

**سؤال ۱.** بنابر قضیه وجود و یگانگی می دانیم برای هر عدد حقیقی  $a$ ، مسأله مقدار اولیه زیر دارای جواب یگانه ای است که در سرتاسر  $\mathbb{R}$  تعریف شده است. به ازای چه مقادیری از  $a$ ، این جواب یگانه تابعی متناوب با دوره تناوب  $2\pi$  است؟

$$\begin{cases} y' + y = \sin t \\ y(0) = a \end{cases}$$

**سؤال ۲.** فرض کنید  $I \subseteq \mathbb{R}$  بازه ای باشد که شامل صفر است. آیا معادله دیفرانسیلی به صورت  $y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0$  که در آن  $a_1$  و  $a_2$  توابعی پیوسته در  $I$  هستند وجود دارد با این ویژگی که  $y_1(t) = t^5$  و  $y_2(t) = t^7$  دو جواب برای آن باشند؟ چرا؟

**سؤال ۳.** بسط تیلور جواب یگانه مسأله مقدار اولیه زیر را حول نقطه  $t = 0$  به دست آورید.

$$\begin{cases} y'' - ty = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

**سؤال ۴.** با استفاده از تبدیلات لاپلاس، جواب یگانه مسأله مقدار اولیه زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 2\delta(t-3) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

**سؤال ۵.** دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -x + 2y + e^{2t} \\ z' = y + 2z \end{cases}$$

الف) دستگاه را به شکل ماتریسی، یعنی به صورت  $X' = AX + f(t)$  که در آن ماتریس  $A$  و تابع برداری  $f(t)$  را مشخص می کنید، بازنویسی کنید.

ب) سه جواب مستقل خطی برای دستگاه همگن متناظر، یعنی دستگاه  $X' = AX$ ، را با استفاده از روش مقدار ویژه - بردار ویژه به دست آورید.

ج) یک ماتریس اساسی جواب برای دستگاه همگن متناظر، یعنی  $X' = AX$ ، بنویسید.

د)  $e^{At}$  را محاسبه کنید.

ه) با استفاده از روش تغییر پارامترها، جواب یگانه دستگاه ناهمگن داده شده را که در شرایط  $x(0) = 0$ ،  $y(0) = 1$  و  $z(0) = 0$  صدق می‌کند به دست آورید.

سؤال ۶. دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x' = -2x + 2x^2 \\ y' = -3x + y + 3x^2 \end{cases}$$

الف) نقاط بحرانی دستگاه را به دست آورید.

ب) وضعیت هر نقطه بحرانی را، از نظر پایداری، پایداری مجانبی یا ناپایداری، بررسی کنید و نمای فاز دستگاه را در همسایگی هر نقطه بحرانی رسم کنید.

توزیع نمره. سؤال‌های ۱، ۲، ۳ و ۴: هر کدام ۱۰ نمره، سؤال ۵: ۵+۱۵+۱۰+۱۰=۴۵ نمره، سؤال ۶: ۵+۱۰=۱۵ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره