



تاریخ امتحان: ۸۸/۸/۲۸
مدت امتحان: ۳/۵ ساعت

امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل

۲۲ - ۰۳۴

نیمسال اول ۸۹-۸۸

سؤال ۱. معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$(1+t^2)y' + ty = \sqrt{(1+t^2)^5}$$

الف) جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را به دست آورید.

ب) جوابی از معادله دیفرانسیل داده شده که در شرط اولیه $y(0) = 0$ صدق می‌کند چیست؟

سؤال ۲. معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$y^2 + (1+ty)y' = 0$$

الف) عامل انتگرال ساز $\mu(t, y) = f(ty)$ که معادله دیفرانسیل داده شده را کامل می‌سازد چیست؟

ب) با استفاده از عامل انتگرال سازی که در قسمت (الف) به دست آورده‌اید، جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را به دست آورید.

ج) آیا جواب $y = y(t)$ از معادله دیفرانسیل داده شده وجود دارد که در شرط اولیه $y(0) = 1$ صدق کند؟ دلیل پاسخ خود را به طور دقیق بنویسید.

سؤال ۳. مسأله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y' = e^{2y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

الف) با استفاده از قضیه وجود و یگانگی موضعی پیکارد نشان دهید مسأله داده شده جواب یگانه‌ای دارد که در بازه‌ای مثل $(-r, r)$ تعریف شده است.

ب) ماکسیمم بازه $(-r, r)$ که در قسمت (الف) با استفاده از قضیه وجود و یگانگی موضعی پیکارد می‌توان به دست آورد چیست؟

ج) با به دست آوردن جواب یگانه مسأله، ماکسیمم بازه‌ای را که در آن جواب یگانه تعریف شده است پیدا کنید.

سؤال ۴. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی ناهمگن زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' - \frac{2t}{1+t^2} y' + \frac{2}{1+t^2} y = 1 + t^2$$

الف) به وضوح $y_1(t) = t$ یک جواب از معادله دیفرانسیل همگن متناظر می‌باشد. با استفاده از روش کاهش مرتبه جوابی دیگر از معادله دیفرانسیل همگن متناظر را به دست آورید.

ب) نشان دهید $y_1(t) = t$ و جواب دومی که در قسمت (الف) به دست آورده‌اید مستقل خطی‌اند.

ج) با استفاده از روش تغییر پارامترها یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل ناهمگن داده شده به دست آورید.

د) جواب عمومی معادله دیفرانسیل ناهمگن داده شده را بنویسید.

سؤال ۵. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی ناهمگن زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' - 2y' + 2y = (2t - 2) - 2e^t (\cos t + \sin t)$$

الف) دو جواب مستقل خطی برای معادله دیفرانسیل همگن متناظر به دست آورید.

ب) با استفاده از روش حدسی (روش ضرایب نامعین) یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل ناهمگن داده شده به دست آورید.

ج) جواب عمومی معادله دیفرانسیل ناهمگن داده شده را بنویسید.

سؤال ۶. فرض کنید توابع حقیقی p و q در \mathbb{R} پیوسته باشند و معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن

زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

الف) فرض کنید y یک جواب غیرصفر معادله دیفرانسیل داده شده باشد. نشان دهید اگر $t_0 \in \mathbb{R}$ موجود باشد با این ویژگی که $y(t_0) = 0$ ، آنگاه همسایگی از t_0 مثل I وجود دارد که به ازای هر $t \neq t_0$ در I ، $y(t) \neq 0$.

ب) فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادله دیفرانسیل داده شده باشند. نشان دهید بین هر دو ریشه متوالی از y_2 یک و فقط یک ریشه از y_1 قرار دارد.

توزیع نمره. سؤال ۱: $10 = 2 + 8$ ، سؤال ۲: $18 = 4 + 8 + 6$ ، سؤال ۳: $12 = 5 + 5 + 2$ ،

سؤال ۴: $20 = 2 + 8 + 2 + 8$ ، سؤال ۵: $20 = 2 + 14 + 4$ ، سؤال ۶: $20 = 12 + 8$ ، نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره