فصل ۱

وجود و یکتایی جواب

۱.۱ مقدمه

یک معادله دیفرانسیل عادی، معادله ای است از یک تابع مجهول و مشتقات آن که صورت کلی آن را می توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$x^{(n)}(t) = F\big(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)\big)$$

از آنجا که بالاترین مرتبه مشتق که در معادله ظاهر شده است، مشتق مرتبه n است، آن را معادله مرتبه n می‌نامیم. معمولاً همراه این معادله n شرط داده می‌شود.

$$x(t_0) = x_0,\ \dot{x}(t_0) = x'_0,\ \ddot{x}(t_0) = x''_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$$

با تعریف متغیرهای جدید می‌توان معادله دیفرانسیل عادی مرتبه n را به یک دستگاه مرتبه اول تبدیل کرد.

$$x_1(t) := x(t),\ x_2(t) := \dot{x}(t),\ x_3(t) := \ddot{x}(t), \dots, x_n(t) := x^{(n-1)}(t)$$

اگر $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$، آنگاه

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ F(t, x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = f(t, X).$$

بنابراین در حالت کلی یک معادله دیفرانسیل عادی را به شکل زیر در نظر می‌گیریم که معمولاً

همراه با یک شرط اولیه است:

$$\begin{cases} \dot{X} = f(t, X) \\ X(t_\circ) = X_\circ \end{cases} \qquad (۱.۱)$$

یک جواب برای این معادله تابع مشتق‌پذیر $X : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ است که در (۱.۱) و شرط مرزی آن صدق می‌کند. تابع

$$f : I \times \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

میدان برداری نامیده می‌شود که می‌تواند وابسته به زمان باشد یا مستقل از زمان. معادلاتی که در آنها میدان برداری مستقل از زمان هستند و به صورت کلی $\dot{X} = f(X)$، *معادلات خودگردان*[۱] نامیده می‌شوند.

۲.۱ وجود و یکتایی جواب

یک معادله دیفرانسیل همیشه جواب یکتا ندارد.

مثال ۱.۱. *معادله $\dot{x} = ۳x^{\frac{۲}{۳}}$ با شرط اولیه $x(\circ) = \circ$ دارای بینهایت جواب است. تابع ثابت صفر، $x_\circ(t) = \circ$ به وضوح یک جواب بدیهی برای آن به حساب می‌آید و برای هر عدد حقیقی $k > \circ$ جوابهای متعددی به شکل زیر وجود دارند.*

$$x_k(t) = \begin{cases} \circ & t \leq k \\ (t-k)^۳ & t > k \end{cases}$$

ایده اثبات وجود و یکتایی جواب استفاده از قضیه نقطه ثابت باناخ است. متناظر معادله دیفرانسیل با شرط مرزی (۱.۱) معادله انتگرالی زیر وجود دارد:

$$X(t) = X_\circ + \int_{t_\circ}^{t} f(s, X(s))ds \qquad (۲.۱)$$

اگر میدان برداری f پیوسته باشد، هر جواب پیوسته این معادله انتگرالی، مشتق‌پذیر است و جواب معادله دیفرانسیل (۱.۱) است. بالعکس هر جواب معادله دیفرانسیل، جوابی برای معادله انتگرالی است. عملگر انتگرالی زیر را در نظر بگیرید:

$$(\mathcal{T}u)(t) = X_\circ + \int_{t_\circ}^{t} f(s, u(s))ds$$

نقاط ثابت عملگر $\mathcal{T}$ جوابهای معادله انتگرالی (۲.۱) هستند.

---
[۱] Autonomous

قضیه ۲.۱. (نقطه ثابت باناخ) *اگر E فضای برداری باناخ بوده و $\mathcal{T} : E \longrightarrow E$ یک نگاشت انقباضی باشد، یعنی مقدار ثابت، $0 < \alpha < 1$، وجود دارد که*

$$\|\mathcal{T}u - \mathcal{T}v\| \leq \alpha \|u - v\|$$

برای همه بردارهای $u, v \in E$. در این صورت $\mathcal{T}$ نقطه ثابت یکتا دارد و برای هر نقطه $u_0 \in E$ دنباله $\{\mathcal{T}^n u_0\}$ به این نقطه ثابت همگرا است.

تعریف ۳.۱. *تابع $f(t, x)$ در ناحیه $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ نسبت به x لیپ‌شیتز است هرگاه ثابت $K > 0$ وجود داشته باشد که برای هر $(t, x), (t, y) \in U$:*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$$

تابع $f(t, x)$ را در ناحیه U به طور موضعی لیپ‌شیتز گوییم هرگاه در یک همسایگی هر نقطه $(t, x) \in U$ لیپ‌شیتز باشد.

نکته ۴.۱. *اگر تابع f، C^1 باشد، آنگاه به طور موضعی لیپ‌شیتز است.*

قضیه ۵.۱. (وجود و یگانگی جواب) *اگر تابع $f(t, x)$ در مستطیل*

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, |x - X_0| \leq b\}$$

پیوسته و نسبت به x لیپ‌شیتز با ضریب K باشد، آنگاه معادله دیفرانسیل (۱.۱) دارای جواب یکتای $X(t)$ است که حداقل در بازه $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ تعریف شده است که $\delta = \min(a, \frac{b}{M}, \frac{\rho}{K})$ و $M = \max_{(t,x)\in D} |f(t, x)|$ و $\rho < 1$ یک عدد دلخواه است.

اثبات. E فضای توابع پیوسته از بازه $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ به گوی بسته $\overline{B_b(X_0)}$ با نرم سوپریمم

$$\|u\|_\infty = \sup_{|t-t_0|\leq\delta} |u(t)|$$

یک فضای باناخ است و عملگر $\mathcal{T} : E \longrightarrow E$ یک عملگر انقباضی است. ابتدا دقت کنید برای هر $u \in E$، $\mathcal{T}u \in E$ است اگر $M\delta \leq b$

$$|(\mathcal{T}u)(t) - X_0| = \Big| \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds \Big| \leq \Big| \int_{t_0}^{t} M ds \Big| = M|t - T_0| \leq M\delta \leq b$$

به علاوه از رابطه $K\delta < 1$ نتیجه می‌شود که $\mathcal{T}$ انقباضی است:

$$\begin{aligned} |(\mathcal{T}u)(t) - (\mathcal{T}v)(t)| &= \Big| \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) - f(s, v(s)ds \Big| \\ &\leq \Big| \int_{t_0}^{t} K|u(s) - v(s)|ds \Big| \leq K\delta \|u - v\|_\infty \end{aligned}$$

□

نکته ۶.۱. *اگر $b=\infty$، در این صورت ممکن است که $M=\infty$ و در نتیجه مقدار δ از قضیه قبل قابل تعیین نباشد. اما دقت کنید که در این حالت فضای E همچنان باناخ است و به وضوح عملگر $\mathcal{T}$ فضای E را به خودش تصویر می‌کند. تنها شرط محدود کننده برای برقراری قضیه قبل انقباضی بودن $\mathcal{T}$ است که از شرط $K\delta<۱$ نتیجه می‌شود. لذا در حالتی که میدان $f(t,x)$ روی $[t_۰-a,t_۰+a]\times\mathbb{R}^n$ لیپ‌شیتز با ضریب K باشد، آنگاه معادله (۱.۱) جواب یکتایی دارد که حداقل در بازه به شعاع $\delta=\min(a,\frac{\rho}{K})$ تعریف شده است.*

مثال ۷.۱. *اگر $A(t)$ یک ماتریس $n\times n$ پیوسته و $g(t)\in\mathbb{R}^n$ یک تابع برداری پیوسته باشند، آنگاه $f(t,X)=A(t)X+g(t)$ یک میدان برداری لیپ‌شیتز روی $D=\{(t,x):|t-t_۰|\le a,\ x\in\mathbb{R}^n\}$ است و ضریب لیپ‌شیتز برابر است با $K=\max_{|t-t_۰|\le a}\|A(t)\|$.*

$$|f(t,X)-f(t,Y)|=|A(t)(X-Y)|\le\|A(t)\|\,|X-Y|$$

میدان برداری $f(t,x)$ روی D کران‌دار نیست ولی دستگاه $\dot{X}=A(t)X+g(t)$ با هر شرط اولیه $X(t_۰)=X_۰$ دارای جواب یکتایی است که حداقل در بازه‌ای به شعاع $\delta=\min(a,\frac{\rho}{K})$ تعریف شده است. دقت کنید مقدار $\frac{\rho}{K}$ در بازه تعریف جواب نقش چندانی ندارد و با توسعه جواب می‌توان $\delta=a$ قرار داد. لذا تا هر زمان که $A(t)$ و $g(t)$ پیوسته باشند جواب معادله تعریف می‌شود.

قضیه زیر با همان شرایط قضیه ۵.۱ بازه تعریف جواب را مستقل از ضریب لیپ‌شیتز ارایه می‌کند.

قضیه ۸.۱. **(پیکارد[۲])** *با همان شرایط قضیه ۵.۱ دستگاه (۱.۱) دارای جواب یکتای $X(t)$ است که حداقل در بازه $[t_۰-\delta,t_۰+\delta]$ تعریف شده است که $\delta=\min(a,\frac{b}{M})$.*

اثبات. فضای E که در قضیه ۵.۱ بیان شده است با نرم زیر یک فضای باناخ است. زیرا این نرم هم‌ارز با نرم سوپریمم است.

$$\|u\|_w:=\sup_{|t-t_۰|\le\delta}\exp(-۲K|t-t_۰|)|u(t)|$$

عملگر $\mathcal{T}:E\longrightarrow E$ نسبت به این نرم انقباضی است. □

[۲] Picard

نکته ۹.۱. *اگر میدان برداری $f(t,x)$ روی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ پیوسته، به طور موضعی لیپ‌شیتز و کران‌دار باشد، آنگاه معادله (۱.۱) دارای جواب یکتایی است که در کل بازه $(-\infty,\infty)$ تعریف شده است.*

نکته ۱۰.۱. *هرچند از قضیه پیکارد یکتایی جواب به طور موضعی و در یک بازه کوچک نزدیک زمان شروع اثبات می‌شود، ولی خاصیت یکتایی هم‌چنان تا زمانی که جواب معادله تعریف شود برقرار است. زیرا اگر $\phi(t)$ و $\psi(t)$ دو جواب برای (۱.۱) باشند، بنابر قضیه پیکارد $\phi(t)=\psi(t)$ برای $|t-t_\circ|\leq\delta$، اگر*

$$t_* = \inf\{t : \phi(t)\neq\psi(t)\}$$

آنگاه $\phi(t_*) = \psi(t_*)$ و هر دو تابع $\phi(t)$ و $\psi(t)$ جوابهای معادله $\dot{X} = f(t,X)$ با شرط اولیه $X(t_*) = \phi(t_*)$ هستند. با استفاده از یکتایی موضعی در قضیه پیکارد نتیجه می‌شود که این دو جواب در یک همسایگی زمان t_* برابرند و این مطلب با انتخاب t_* تناقض دارد.

نکته ۱۱.۱. *به کمک قضیه نقطه ثابت باناخ که دنباله $\{\mathcal{T}^n u_\circ\}$ برای هر نقطه آغازین $u_\circ$ به نقطه ثابت همگرا است، نتیجه می‌شود که دنباله زیر در بازه $[t_\circ-\delta, t_\circ+\delta]$ به جواب معادله (۱.۱) همگرای یکنواخت است. این روش که برای تقریب جواب به کار می‌رود را روش تقریبهای متوالی می‌نامند.*

$$\begin{cases} u_\circ(t) = X_\circ, \\ u_{n+1}(t) = X_\circ + \int_{t_\circ}^t f(s,u_n(s))ds \end{cases}$$

مثال ۱۲.۱. *معادله $\dot{x} = x^2$ با شرط اولیه $x(\circ) = 1$ را در نظر بگیرید. ماکزیمم میدان $f(t,x) = x^2$ در گوی بسته $\overline{B_b(1)}$ برابر است با $(b+1)^2$. لذا $\delta = \frac{b}{(b+1)^2}$ و بیشترین مقدار آن برابر $\frac{1}{4}$ است. تقریبهای متوالی این معادله به صورت زیر است. (مقایسه کنید با جواب معادله که برابر است*

با $(x(t)=\frac{1}{1-t}$

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= 1\\
u_1(t) &= 1+\int_0^t u_0^2(s)ds = 1+t\\
u_2(t) &= 1+\int_0^t u_1^2(s)ds = 1+t+t^2+\frac{t^3}{3}\\
u_3(t) &= 1+\int_0^t u_2^2(s)ds = 1+t+t^2+t^3+a_4^3t^4+\cdots+a_7^3t^7\\
&\vdots\\
u_n(t) &= 1+t+\cdots+t^n+a_{n+1}^n t^{n+1}+\cdots+a_{2^n-1}^n t^{2^n-1}
\end{aligned}$$

توجه کنید هرچند این دنباله در بازه $|t|<1$ همگرا است ولی از قضیه پیکارد تنها همگرایی در بازه $|t|<\frac{1}{4}$ را می‌توان نتیجه گرفت.

در پایان این بخش نشان می‌دهیم که وجود جواب یک معادله دیفرانسیل به شرط لیپ‌شیتز بودن میدان برداری نیازی ندارد و تنها با شرط پیوستگی می‌توان وجود جواب را نشان داد. هرچند در این حالت لزوماً یکتایی جواب برقرار نیست و برای آن به شرط لیپ‌شیتز موضعی نیاز است. قبل از ارایه این قضیه مرور کوتاهی داریم بر مفاهیم و قضایای آنالیز مقدماتی.

تعریف ۱.۱۳. *دنباله توابع $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ به طور یکنواخت کران‌دار هستند، هرگاه مقدار $M>0$ وجود داشته باشد که $|f_n(t)|\leq M$ برای هر $t\in I$.*

تعریف ۱.۱۴. *دنباله توابع $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ هم‌پیوسته هستند، هرگاه برای هر مقدار $\epsilon>0$، مقدار $\delta>0$ وجود داشته باشد که $|f_n(t_1)-f_n(t_2)|\leq\epsilon$ برای هر $t_1,t_2\in I$ که $|t_1-t_2|<\delta$ و هر عضو این دنباله.*

قضیه ۱.۱۵. **(آرزلا-اسکولی[3])** *هر خانواده به طور یکنواخت کران‌دار و هم‌پیوسته از توابع $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ زیردنباله‌ای دارد که روی زیرمجموعه‌های فشرده به طور یکنواخت همگرا است.*

قضیه ۱.۱۶. **(کوشی-پئانو[4])** *اگر میدان برداری $f(t,x)$ روی D پیوسته باشد، دستگاه (۱.۱) دارای جواب $X(t)$ است که حداقل در بازه $[t_0-\delta,t_0+\delta]$ تعریف شده است که $\delta=\min(a,\frac{b}{M})$.*

[3] Arzela-Ascoli
[4] Cauchy-Peano

اثبات.

$$X_m(t) = \begin{cases} X_\circ & t_\circ \leq t \leq t_\circ + \frac{1}{m} \\ X_\circ + \int_{t_\circ}^{t-\frac{1}{m}} f(s, X_m(s))ds & t_\circ + \frac{1}{m} < t \leq \delta \end{cases}$$

□

۳.۱ بازه ماکسیمال جواب

در قضایای بخش قبل جوابی که برای یک معادله دیفرانسیل ارایه می‌شوند در یک بازه کوچکی حول نقطه شروع تعریف می‌شوند. معادله ارایه شده در مثال ۱۲.۱ دارای جوابی است که تنها در بازه $(-\infty, ۱)$ تعریف شده است، در حالی که از قضایای وجود جواب بازه $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ به دست می‌آید. سؤال مهمی که وجود دارد این است که جواب یک معادله دیفرانسیل تا چه زمانی می‌تواند تعریف شود. به عنوان مثال تمام جوابهای معادله خطی $\dot{X} = AX$ برای تمام زمانهای $(-\infty, \infty)$ تعریف می‌شود که A یک ماتریس ثابت است، (مثال ۷.۱).

تعریف ۱۷.۱. *اگر $\phi(t)$ و $\psi(t)$ دو جواب برای معادله دیفرانسیل با شرط اولیه (۱.۱) باشند، ϕ را* **توسیع (گسترش)** *ψ می‌نامیم هرگاه دامنه تعریف ψ زیرمجموعه دامنه تعریف ϕ باشد. بازه $I = (\alpha, \beta)$ را* **بازه ماکسیمال** *جواب گویند، هرگاه جوابی از معادله با دامنه تعریف I وجود داشته باشد، به طوری که گسترشی از آن پیدا نشود.*

نکته ۱۸.۱. *اگر $\phi(t)$ جواب معادله (۱.۱) باشد که در بازه (α, β) تعریف شده است و مقدار حد $\lim_{t\to\beta} \phi(t)$ وجود داشته باشد و برابر X_β باشد، در صورتی که نقطه (β, X_β) در دامنه تعریف میدان برداری $f(t,x)$ بوده و میدان در همسایگی این نقطه لیپ‌شیتز باشد آنگاه بنابر قضیه پیکارد معادله (۱.۱) با شرط اولیه $X(\beta) = X_\beta$ در همسایگی زمان $t = \beta$ جواب موضعی یکتا دارد، لذا جواب $\phi(t)$ را می‌توان فراتر از زمان β تعریف کرد.*

بازه ماکسیمال جواب معادله $\dot{x} = x^۲$ که در مثال ۱۲.۱ ارایه شده است برابر $(-\infty, ۱)$ است. وقتی $t \to ۱$، مقدار جواب این معادله بزرگ می‌شود و در واقع $\lim_{t\to ۱} x(t) = \infty$. یکی از محدودیتهای توسعه جواب همین مورد است که جواب در حالت حدی در یک زمان متناهی بیکران شود. دو مثال زیر حالتهای مختلفی را نشان می‌دهند که نمی‌توان جواب معادله را توسعه داد.

مثال ۱۹.۱. معادله $\dot{x} = -\frac{1}{2x}$ با شرط اولیه $x(0) = 1$ که جواب آن $x(t) = \sqrt{1-t}$ است و بازه ماکسیمال جواب $(-\infty, 1)$ است. داریم $\lim_{t\to 1} x(t) = 0$، ولی نقطه $(1, 0)$ در دامنه تعریف میدان برداری $f(t,x) = -\frac{1}{2x}$ نیست. لذا نمی‌توان این جواب را از زمان $t = 1$ توسعه داد.

مثال ۲۰.۱. در دستگاه زیر $X = (x, y, z)$ است:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{y}{z^2} \\ \dot{y} = \dfrac{x}{z^2} \\ \dot{z} = 1 \end{cases}$$

این معادله با شرط اولیه $X(t) = (0, -1, \frac{1}{\pi})$ دارای جواب $X(t) = (\sin\frac{1}{t}, \cos\frac{1}{t}, t)$ است که در بازه $(0, \infty)$ تعریف شده است. مقدار حد $\lim_{t\to 0} X(t)$ وجود ندارد و لذا نمی‌توان جواب را توسعه داد.

قضیه ۲۱.۱. *اگر جوابهای معادله (۱.۱) برای هر شرط اولیه‌ای یکتا باشد، در این صورت برای هر جواب بازه ماکسیمال جواب وجود دارد.*

قضیه ۲۲.۱. *اگر میدان برداری $f(t,x)$ روی ناحیه باز $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ پیوسته و نسبت به x لیپ‌شیتز باشد و (α, β) بازه ماکسیمال جواب $X(t)$ از معادله (۱.۱) باشد، در این صورت وقتی $t \to \beta$، منحنی $(t, X(t))$ هر زیرمجموعه فشرده $K \subset D$ را ترک می‌کند، یعنی $t \in (t_0, \beta)$ وجود دارد که $(t, X(t)) \notin K$.*

نتیجه ۲۳.۱. *اگر D' یک زیرمجموعه باز و کران‌دار $\mathbb{R}^n$ باشد و در قضیه قبل، $D = (a,b)\times D'$ (که $-\infty \leq a < \infty$ و $-\infty < b \leq \infty$)، در این صورت $b = \beta$ است یا $\lim_{t\to\beta} dist(X(t), \partial D') = 0$. (نتیجه مشابهی برای α برقرار است.)*

نتیجه ۲۴.۱. *اگر در قضیه ۲۲.۱، $D = (a,b)\times\mathbb{R}^n$، آنگاه $b = \beta$ است یا $|X(t)| \to \infty$ وقتی $t \to \beta$. (نتیجه مشابهی برای α برقرار است.)*

نکته ۲۵.۱. اگر معادله دیفرانسیل به صورت خودگردان $\dot{X} = f(X)$ باشد، در نتایج بالا می‌توان بازه (a,b) را به صورت $(-\infty, \infty)$ در نظر گرفت. لذا تنها حالتی که جواب تا زمان $+\infty$ تعریف نمی‌شود این است که منحنی جواب $X(t)$ به مرز دامنه تعریف جواب میدان نزدیک شود یا به بینهایت میل کند.

۴.۱ وابستگی جواب به شرایط اولیه و پارامتر

معادله دیفرانسیل با شرط اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{X} = f(t, X) \\ X(t_\circ) = y \end{cases} \tag{۳.۱}$$

جواب این معادله را با $X(t; t_\circ, y)$ نشان می‌دهیم. واضح است که جواب معادله به شرط اولیه y و زمان شروع $t_\circ$ وابسته است و با تغییر اینها، جواب تغییر می‌کند. منظور از وابستگی جواب به مقدار اولیه، نوع وابستگی تابع $X(t; t_\circ, y)$ به متغیر y است مانند پیوستگی و مشتق‌پذیری نسبت به این متغیر. دقت کنید که با تغییر مقدار اولیه و یا زمان شروع دامنه تعریف جواب نیز تغییر می‌کند. تابع $X(t; t_\circ, y)$ در زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ تعریف می‌شود و همواره در رابطه $X(t; t_\circ, y) = y$ صدق می‌کند. (شرط اولیه معادله)

لم زیر نقش کلیدی در نتایج این بخش دارد.

لم ۲۶.۱. (نامساوی گرونوال[۵]) *اگر $\phi(t)$ و $\psi(t)$ توابع حقیقی پیوسته و نامنفی باشند که برای مقادیر ثابت و نامنفی K و C در رابطه زیر صدق می‌کنند:*

$$\phi(t) \leq C + K \int_{t_\circ}^{t} \psi(s)\phi(s)ds,$$

در این صورت نامساوی زیر برقرار است:

$$\phi(t) \leq C \exp(K \int_{t_\circ}^{t} \psi(s)ds).$$

قضیه ۲۷.۱. *اگر میدان برداری $f(t, x)$ روی ناحیه باز $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ پیوسته و نسبت به x لیپ‌شیتز با ضریب K باشد و جواب $X(t; t_\circ, X_\circ)$ در بازه فشرده $[a, b]$ تعریف شده باشد، آنگاه مقدار $\epsilon > \circ$ وجود دارد که برای هر y که $|y - X_\circ| < \epsilon$ جواب $X(t; t_\circ, y)$ نیز در بازه $[a, b]$ تعریف می‌شود و*

$$|X(t; t_\circ, y) - X(t; t_\circ, X_\circ)| \leq |y - X_\circ| \exp(K|t - t_\circ|).$$

اثبات. اگر جوابهای $X(t; t_\circ, X_\circ)$ و $X(t; t_\circ, y)$ تا زمان t تعریف شده باشند، معادلات انتگرالی

---

[۵] Grownwall

زیر برقرارند:

$$X(t;t_\circ,X_\circ)=X_\circ+\int_{t_\circ}^{t}f(s,X(s;t_\circ,X_\circ))ds$$
$$X(t;t_\circ,y)=y+\int_{t_\circ}^{t}f(s,X(s;t_\circ,y))ds$$

از تفاضل این دو رابطه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}|X(t;t_\circ,y)-X(t;t_\circ,X_\circ)|\leq&|y-X_\circ|+\Big|\int_{t_\circ}^{t}|f(s,X(s;t_\circ,y))-f(s,X(s;t_\circ,X_\circ))|ds\Big|\\ \leq&|y-X_\circ|+K\Big|\int_{t_\circ}^{t}|X(s;t_\circ,y)-X(s;t_\circ,X_\circ)|ds\Big|\end{aligned}$$

بنابر نامساوی گرونوال نتیجه می‌شود که تا هر زمان که هر دو جواب تعریف شده باشد، نامساوی زیر برقرار است:

$$|X(t;t_\circ,y)-X(t;t_\circ,X_\circ)|\leq|y-X_\circ|\exp(K|t-t_\circ|) \qquad (۴.۱)$$

اکنون نشان می‌دهیم بازه ماکسیمال جواب $X(t;t_\circ,y)$ شامل $[a,b]$ است. قرار دهید

$$A_\delta:=\big\{(t,z):a\leq t\leq b,|z-X(t;t_\circ,X_\circ)|\leq\delta\big\}$$

و $\delta=\epsilon\exp(K(b-a))$، برای ϵ به اندازه کافی کوچک A_δ زیرمجموعه فشرده D است. اگر (α,β) بازه ماکسیمال جواب $X(t;t_\circ,y)$ باشد و $\beta\leq b$، آنگاه بنابر قضیه ۲۲.۱، $t_\circ<t_*<\beta$ وجود دارد که $X(t_*;t_\circ,y)\notin A_\delta$. اما $t_*<b$ و جواب $X(t;t_\circ,X_\circ)$ نیز تا زمان t_* تعریف شده است و به کمک (۴.۱) به تناقض می‌رسیم که نشان می‌دهد $b<\beta$. □

نکته ۲۸.۱. *در قضیه قبل لزومی ندارد که شرط لیپ‌شیتز میدان برداری $f(t,x)$ سراسری باشد. اگر میدان روی ناحیه باز D به طور موضعی لیپ‌شیتز باشد، در اثبات قبل δ را به اندازه کافی کوچک بگیرید که $A_\delta\subset D$. از آنجا که A_δ فشرده است، تابع $f(t,x)$ روی آن لیپ‌شیتز سراسری است. پس کافی است K را ضریب لیپ‌شیتز آن در نظر بگیرید و $\epsilon=\delta\exp(K(a-b))$. لذا پیوستگی جواب $X(t;t_\circ,y)$ نسبت به y تنها به شرط پیوستگی و لیپ‌شیتز موضعی میدان برداری احتیاج است.*

قضیه ۲۹.۱. *اگر میدان برداری $f(t,x)$ روی ناحیه باز $D\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ پیوسته و نسبت به x لیپ‌شیتز با ضریب K باشد و $|g(t,x)|\leq m$ روی D، اگر $X(t)$ و $Y(t)$ جوابهای معادله‌های زیر باشند:*

$$\begin{cases} \dot{X} = f(t, X) \\ X(t_\circ) = X_\circ \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{Y} = f(t, Y) + g(t, Y) \\ Y(t_\circ) = Y_\circ \end{cases}$$

در این صورت تا زمانیکه هر دو جواب تعریف شده باشند، خواهیم داشت:

$$|X(t) - Y(t)| \leq |X_\circ - Y_\circ| \exp(K|t - t_\circ|) + \frac{m}{K}(\exp(K|t - t_\circ|) - ۱).$$

اثبات. مشابه اثبات قضیه ۲۷.۱ داریم:

$$X(t) = X_\circ + \int_{t_\circ}^{t} f(s, X(s))ds$$
$$Y(t) = Y_\circ + \int_{t_\circ}^{t} f(s, Y(s)) + g(s, Y(s))ds$$

$$\begin{aligned} |X(t) - Y(t)| &\leq |X_\circ - Y_\circ| + \Big|\int_{t_\circ}^{t} |f(s, X(s)) - f(s, Y(s))|ds\Big| + \Big|\int_{t_\circ}^{t} |g(s, Y(s))|ds\Big| \\ &\leq |X_\circ - Y_\circ| + m|t - t_\circ| + \int_{t_\circ}^{t} K|X(s) - Y(s)|ds \end{aligned} \quad (۵.۱)$$

به کمک تمرین ۲ نامساوی مورد نظر اثبات می‌شود. □

نکته ۳۰.۱. *مشابه قضیه ۲۷.۱، می‌توان حکمی برای پیوستگی جواب نسبت به نرم میدان داد. بدین ترتیب که اگر جواب معادله (۱.۱) در بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد، آنگاه مقادیر m و ϵ به اندازه کافی کوچک وجود دارند که اگر نرم سوپریمم میدان برداری حداکثر به اندازه m و مقدار اولیه حداکثر به اندازه ϵ تغییر کند، جواب معادله جدید نیز در بازه $[a, b]$ تعریف می‌شود و در همسایگی جواب معادله (۱.۱) باقی می‌ماند.*

در بسیاری از مسایل، میدان برداری علاوه بر پارامتر زمان و مکان به پارامترهای دیگری نیز وابسته است. شکل کلی این گونه معادلات به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dot{X} = f(t, X, \mu) \\ X(t_\circ) = X_\circ \end{cases} \quad (۶.۱)$$

که $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$. جواب این معادله را به صورت $X(t; t_\circ, X_\circ, \mu)$ نمایش می‌دهیم. منظور از پیوستگی جواب نسبت به پارامتر، پیوستگی این تابع نسبت به متغیر $\mu \in \mathbb{R}^m$ است. با تبدیل μ به متغیر مکان معادله (۶.۱) را به صورت زیر می‌توان نوشت و از قضیه ۲۷.۱ برای پیوستگی جواب نسبت به پارامتر استفاده کرد.

$$\begin{cases} \dot{X} = f(t, X, \mu) \\ \dot{\mu} = 0 \\ X(t_0) = X_0, \mu(t_0) = \mu_0 \end{cases}$$

بنابر قضیه ۲۷.۱ شرط پیوستگی جواب نسبت به پارامتر لیپ‌شیتز بودن میدان نسبت به متغیرهای مکان است. لذا نتیجه مشابه برای معادله (۲۷.۱) برقرار است به شرط آنکه میدان برداری $f(t,x,\mu)$ نسبت به متغیرهای (x,μ) لیپ‌شیتز موضعی باشد. در قضیه زیر تنها با شرط پیوستگی میدان نسبت به پارامتر μ و بدون شرط لیپ‌شیتز، پیوستگی جواب ثابت می‌شود.

قضیه ۳۱.۱. *اگر میدان برداری f روی زیرمجموعه باز $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ پیوسته و نسبت به x لیپ‌شیتز با ضریب K باشد و جواب $X(t; t_0, X_0, \mu_0)$ در بازه $[a,b]$ تعریف شده باشد، آنگاه مقدار $\epsilon > 0$ وجود دارد که اگر $|y - X_0| < \epsilon$ و $|\mu - \mu_0| < \epsilon$ جواب $X(t; t_0, y, \mu)$ نیز در بازه $[a,b]$ تعریف شده است و*

$$|X(t; t_0, y, \mu) - X(t; t_0, X_0, \mu_0)| \leq \big(|y - X_0| + |\mu - \mu_0|\big) \exp(K|t - t_0|)$$

اثبات. مشابه اثبات قضیه ۲۷.۱ کافی است ϵ به اندازه کافی کوچک انتخاب کنیم که $A_\delta \times [\mu_0 - \epsilon, \mu_0 + \epsilon]$ زیرمجموعه فشرده D باشد و $\delta = 2\epsilon \exp(K(b-a))$. به علاوه

$$\max_{(t,x,\mu) \in A_\delta \times [\mu_0 - \epsilon, \mu_0 + \epsilon]} |f(t,x,\mu) - f(t,x,\mu_0)| \leq \epsilon K$$

اکنون از قضیه ۲۹.۱ استفاده کنید. □

از پیوستگی جواب نسبت به پارامتر می‌توان پیوستگی نسبت به شرط اولیه را نتیجه گرفت. زیرا اگر $X(t; t_0, X_0)$ جواب معادله ۲۷.۱ باشد، تابع $Y(t; t_0, 0, \mu) = X(t; t_0, X_0) - \mu$ برای $\mu = X_0$ در معادله زیر صدق می‌کند که $g(t, Y, \mu) = f(t, Y + \mu)$.

$$\begin{cases} \dot{Y} = g(t, Y, \mu) \\ Y(t_0) = 0 \end{cases}$$

پیوستگی Y نسبت به μ، پیوستگی X نسبت به X_0 را نتیجه می‌دهد. به طور مشابه پیوستگی جواب نسبت به زمان شروع، t_0، با قرار دادن $Z(t - t_0; 0, X_0, \mu) = X(t; t_0, X_0)$ برای $\mu = t_0$ که در معادله زیر صدق می‌کند نتیجه می‌شود، که $h(t, Z, \mu) = f(t - \mu, Z)$.

$$\begin{cases} \dot{Z} = h(t, Z, \mu) \\ Z(0) = X_0 \end{cases}$$

قضیه ۱.۳۲. (مشتق‌پذیری جواب نسبت به شرایط اولیه) *اگر میدان برداری $f(t,x)$ روی ناحیه باز $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ پیوسته و مشتق $D_x f$ نیز پیوسته باشد، آنگاه جواب $X(t;y)$ از معادله (۱.۳) نسبت به y مشتق‌پذیر است و مشتق $\frac{\partial X}{\partial y_i}(t;y_*)$ جواب معادله دیفرانسیل زیر است:*

$$\begin{cases} \dot{u} = D_x f(t, X(t;y_*))u \\ u(t_\circ) = e_i \end{cases}$$

اثبات.

$$\begin{aligned} w(t,h) =& \frac{X(t;y_*+he_i) - X(t;y_*)}{h} \\ \frac{d}{dt}w(t,h) =& \frac{f(t,X(t;y_*+he_i)) - f(t,X(t;y_*))}{h} \\ =& [D_x f(t,X(t;y_*)) + g(t,y_*,h)]\frac{X(t;y_*+he_i) - X(t;y_*)}{h} \\ =& [D_x f(t,X(t;y_*)) + g(t,y_*,h)]w(t,h) \end{aligned}$$

دقت کنید که $w(t_\circ,h) = e_i$، بنابراین از قضیه ۱.۲۹ نتیجه می‌شود

$$|w(t,h) - u(t)| \leq \frac{m}{K}(\exp(K|t-t_\circ|) - ۱)$$

که $K = \max_{|t-t_\circ|\leq a} \|D_x f(t,X(t;y_*))\|$ و $m = \max_{(t,x)\in D} |g(t,y_*,h)x|$. وقتی $h \to ۰$، داریم $m \to ۰$ و در نتیجه $\lim_{h\to ۰} w(t,h) = u(t)$. □

مثال ۱.۳۳. *اگر $x(t;y)$ جواب معادله $\dot{x} = x^۲$ با شرط اولیه $x(۰) = y$ باشد، داریم $x(t;۱) = (۱-t)^{-۱}$. بنابر قضیه قبل $\frac{\partial x}{\partial y}(t;۱)$ جواب معادله $\dot{u} = \frac{۲u}{۱-t}$ با شرط اولیه $u(۰) = ۱$ است. از حل این معادله نتیجه می‌شود که $\frac{\partial x}{\partial y}(t;۱) = (۱-t)^{-۲}$.*

به طور مشابه محاسبه مشتق جواب نسبت به پارامتر و زمان شروع به حل یک دستگاه خطی منجر می‌شود. برای پیدا کردن این دستگاه خطی با قراردادن جواب $X(t;\mu)$ در معادله (۱.۶) ، از معادله نسبت به μ مشتق بگیرید. قضیه زیر نتیجه این مطلب را نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۳۴. (مشتق‌پذیری جواب نسبت به پارامتر) *اگر میدان برداری $f(t,x,\mu)$ روی ناحیه باز $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ پیوسته و مشتقات $D_x f$ و $D_\mu f$ نیز پیوسته باشند، آنگاه جواب $X(t;\mu)$ از معادله (۱.۶) نسبت به μ مشتق‌پذیر است و مشتق $\frac{\partial X}{\partial \mu}(t;\mu_\circ)$ جواب معادله دیفرانسیل زیر است:*

$$\begin{cases} \dot{u} = D_x f(t, X(t;\mu_\circ), \mu_\circ)u + D_\mu f(t, X(t;\mu_\circ), \mu_\circ) \\ u(t_\circ) = \circ \end{cases}$$

مثال ۳۵.۱. *اگر $x(t;\mu)$ جواب معادله $\dot{x} = x^۲ + \mu x$ با شرط اولیه $x(\circ) = ۱$ باشد، داریم $x(t;\circ) = (۱-t)^{-۱}$. بنابر قضیه قبل $\frac{\partial x}{\partial \mu}(t;\circ)$ جواب معادله $\dot{u} = \frac{۲u+۱}{۱-t}$ با شرط اولیه $u(\circ) = \circ$ است. از حل این معادله نتیجه می‌شود که $\frac{\partial x}{\partial \mu}(t;\circ) = \frac{۱}{۲}\big((۱-t)^{-۲} - ۱\big)$. بنابراین*

$$x(t;\mu) \approx x(t;\circ) + \mu\frac{\partial x}{\partial \mu}(t;\circ) = \frac{۱}{۱-t} + \frac{\mu}{۲}\big((۱-t)^{-۲} - ۱\big).$$

قضیه ۳۶.۱. **(مشتق‌پذیری جواب نسبت به زمان شروع)** *اگر میدان برداری $f(t,x)$ روی ناحیه باز $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ پیوسته و مشتق $D_x f$ نیز پیوسته باشد، آنگاه جواب $X(t;s)$ از معادله (۱.۱) با شرط اولیه $X(s) = X_\circ$ نسبت به s مشتق‌پذیر است و مشتق $\frac{\partial X}{\partial s}(t;t_\circ)$ جواب معادله دیفرانسیل زیر است:*

$$\begin{cases} \dot{u} = D_x f(t, X(t;t_\circ))u \\ u(t_\circ) = -f(t_\circ, X_\circ) \end{cases}$$

نکته ۳۷.۱. *وقتی از معادله (۱.۱) نسبت به پارامتر زمان آغاز، s، مشتق بگیریم، مشتق شرط اولیه $X(s;s) = X_\circ$ برابر است با*

$$\frac{\partial X}{\partial t}(s;s) + \frac{\partial X}{\partial s}(s;s) = \circ$$

با قرار دادن $u(t) = \frac{\partial X}{\partial s}(t;t_\circ)$، خواهیم داشت

$$u(t_\circ) = -\frac{\partial X}{\partial t}(t_\circ;t_\circ) = -f(t_\circ, X_\circ).$$

مثال ۳۸.۱. *اگر $x(t;s)$ جواب معادله $\dot{x} = x^۲$ با شرط اولیه $x(s) = ۱$ باشد، داریم $x(t;\circ) = (۱-t)^{-۱}$. بنابر قضیه قبل $\frac{\partial x}{\partial s}(t;\circ)$ جواب معادله $\dot{u} = \frac{۲u}{۱-t}$ با شرط اولیه $u(\circ) = -۱$ است. از حل این معادله نتیجه می‌شود که $\frac{\partial x}{\partial s}(t;\circ) = -(۱-t)^{-۲}$. بنابراین*

$$x(t;s) \approx x(t;\circ) + s\frac{\partial x}{\partial s}(t;\circ) = \frac{۱}{۱-t} - \frac{s}{(۱-t)^۲}$$

۵.۱ قضایای مقایسه

تعریف ۳۹.۱. *مشتق بالایی راست تابع $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$D^+v(t) = \limsup_{h\to ۰^+} \frac{v(t+h)-v(t)}{h}$$

اگر تابع $v(t)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $\dot{v}(t) = D^+v(t)$.

قضیه ۴۰.۱. *اگر $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ میدان پیوسته و به طور موضعی نسبت به x لیپ‌شیتز باشد و $v(t)$ تابع پیوسته‌ای که*

$$\begin{cases} D^+v(t) \leq f(t, v(t)) \\ v(t_۰) \leq x_۰ \end{cases}$$

و $x(t)$ جواب معادله (۱.۱) باشد، آنگاه تا هر زمان که هر دو تابع $x(t)$ و $v(t)$ تعریف شده باشند برای $t \geq t_۰$ داریم

$$v(t) \leq x(t).$$

اثبات. فرض کنید $x(t;\lambda)$ جواب معادله زیر باشد

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) + \lambda \\ x(t_۰) = x_۰ \end{cases}$$

اگر $x(t) = x(t;۰)$ در بازه $[a,b]$ تعریف شده باشد، با توجه به پیوستگی جواب نسبت به پارامتر، قضیه ۳۱.۱، برای مقادیر به اندازه کوچک λ، جواب $x(t;\lambda)$ نیز در $[a,b]$ تعریف شده است و $\lim_{\lambda\to ۰} x(t;\lambda) = x(t)$. بنابراین کافی است برای $\lambda > ۰$، نشان دهیم $v(t) \leq x(t;\lambda)$. فرض کنید $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$ وجود داشته باشد که برای $\alpha < t < \beta$ داشته باشیم $v(t) > x(t;\lambda)$ و $\alpha \geq t_۰$ کوچکترین زمانی باشد که این اتفاق می‌افتد. در نتیجه $v(\alpha) = x(\alpha;\lambda)$.

$$\begin{aligned} D^+v(\alpha) &= \limsup_{h\to ۰^+} \frac{v(\alpha+h)-v(\alpha)}{h} \\ &\geq \limsup_{h\to ۰^+} \frac{x(\alpha+h;\lambda)-x(\alpha;\lambda)}{h} \\ &= \dot{x}(\alpha;\lambda) = f(\alpha, x(\alpha;\lambda)) + \lambda = f(\alpha, v(\alpha)) + \lambda. \end{aligned}$$

□

نکته ۴۱.۱. با اثبات مشابه می‌توان دید که نتیجه قضیه فوق برای حالت $t \leq t_\circ$ با تغییر شرط قضیه به صورت زیر هم‌چنان برقرار است

$$\begin{cases} D^- v(t) \geq f(t, v(t)) \\ v(t_\circ) \leq x_\circ \end{cases}$$

که در آن $D^- v$ مشتق بالایی چپ است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D^- v(t) = \limsup_{h \to \circ^+} \frac{v(t) - v(t-h)}{h}$$

هم‌چنین نامساوی $v(t) \geq x(t)$ برای $t \geq t_\circ$ با شرط

$$\begin{cases} D^+ v(t) \geq f(t, v(t)) \\ v(t_\circ) \geq x_\circ \end{cases}$$

و برای $t \leq t_\circ$ با شرط زیر برقرار است.

$$\begin{cases} D^- v(t) \leq f(t, v(t)) \\ v(t_\circ) \geq x_\circ \end{cases}$$

مثال ۴۲.۱. معادله $\dot{x} = -(۱ + x^۲)x$ با شرط اولیه $x(\circ) = a$ را در نظر بگیرید. اگر $v = x^۲$ آنگاه

$$\dot{v} = ۲x\dot{x} = -۲x^۲(۱ + x^۲) \leq -۲x^۲ = -۲v$$

در نتیجه $v(t) \leq y(t)$ برای $t > \circ$ که $y(t)$ جواب معادله زیر است

$$\begin{cases} \dot{y} = -۲y \\ y(\circ) = a^۲ \end{cases}$$

اما $y(t) = a^۲ e^{-۲t}$، در نتیجه $|x(t)| \leq |a| e^{-t}$ و بنابر نتیجه ۲۴.۱ بازه ماکسیمال جواب شامل $[\circ, \infty)$ است. اما برای $t < \circ$ از نکته ۴۱.۱ نتیجه می‌شود $|x(t)| \geq |a| e^{-t}$ که برای تعیین بازه جواب کمکی نمی‌کند. اما می‌توان از نامساوی $\dot{v} \geq -۲(۱ + v)^۲$ استفاده کرد که نتیجه می‌دهد

$$v(t) \leq (۲t + (a^۲ + ۱)^{-۱})^{-۱} - ۱, \qquad t < \circ \text{ برای}$$

و بازه تعریف جواب $x(t)$ باید شامل $(-\frac{(a^۲+۱)^{-۱}}{۲}, \circ]$ باشد. مقایسه کنید با جواب معادله که در $(-\infty, \infty)$ تعریف می‌شود و برابر است با

$$x(t) = \frac{a}{|a|}([a^۲(۱ + a^۲)e^{۲t} + \frac{۱}{۴}]^{\frac{۱}{۲}} - \frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۲}}$$

مثال ۴۳.۱. *معادله زیر را در نظر بگیرید:*

$$\begin{cases} \dot{x} = -(1+x^2)x + e^t \\ x(0) = a \end{cases}$$

قرار دهید $v(t) = |x(t)|$*، اگر* $x(t) \neq 0$*، آنگاه*

$$\dot{v} = \frac{x\dot{x}}{|x|} = \frac{-x^2(1+x^2) + xe^t}{|x|} \leq -|x| + e^t = -v + e^t$$

اگر $x(t) = 0$*، آنگاه* $v(t)$ *در این نقطه مشتق‌پذیر نیست اما مشتق بالایی راست وجود دارد*

$$\begin{aligned} D^+v(t) &= \limsup_{h\to 0^+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} \\ &= \limsup_{h\to 0^+} \frac{|x(t+h)|}{h} \\ &= \limsup_{h\to 0^+} \frac{|\int_t^{t+h} f(s, x(s))ds|}{h} \\ &= |f(t, x(t))| = f(t, 0) = e^t \end{aligned}$$

بنابراین همیشه رابطه $D^+v \leq -v + e^t$ *برقرار است و درنتیجه* $v(t) \leq y(t)$ *برای* $t > 0$ *که*

$$\begin{cases} \dot{y} = -y + e^t \\ y(0) = |a| \end{cases}$$

اما $y(t) = |a|e^{-t} + \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ *و* $x(t)$ *در زمان متناهی کران‌دار است و بنابر نتیجه ۲۴.۱ بازه تعریف جواب شامل* $(0, \infty)$ *است.*

در زیر قضیه مقایسه در حالت برداری، وقتی معادله در فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف شده است، بیان می‌شود.

قضیه ۴۴.۱. *اگر میدان برداری* $f(t, x)$ *در* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *پیوسته و* $F(t, u)$ *تابعی حقیقی باشد که در* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *پیوسته است و*

$$|f(t, x)| \leq F(t, |x|).$$

به علاوه اگر $X(t)$ *جواب (۱.۱) و* $u(t)$ *جواب*

$$\begin{cases} \dot{u} = F(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

باشند که $u_\circ \leq |X_\circ|$، آنگاه تا هر زمان $t > t_\circ$ که هر دو جواب تعریف شده باشند $|X(t)| \leq u(t)$.

اثبات.

$$\begin{aligned} D^+|X(t)| =& \limsup_{h\to\circ^+} \frac{|X(t+h)| - |X(t)|}{h} \\ \leq & \limsup_{h\to\circ^+} \frac{|X(t+h) - X(t)|}{h} \\ =& |\dot{X}(t)| = |f(t,X)| \leq F(t,|X|) \end{aligned}$$

بنابر قضیه مقایسه در حالت یک بعدی، قضیه ۴۰.۱، اثبات کامل می‌شود. □

مثال ۴۵.۱. *اگر $|f(t,x)| \leq a|x| + b$، آنگاه بازه تعریف هر جواب (۱.۱) شامل $(\circ,\infty)$ است. زیرا در قضیه قبل $F(t,u) = au+b$، آنگاه $u(t) = ce^{at} - \frac{b}{a}$ که ثابت c از شرط اولیه به دست می‌آید. بنابراین $|X(t)| \leq u(t)$ و در هر زمان متناهی جواب کران‌دار است. اما اگر به جای تقریب خطی برای میدان یک تقریب درجه دو داشته باشیم دیگر ادعای فوق برای بازه تعریف جواب لزومی ندارد که درست باشد. مثلاً اگر $|f(t,x)| \leq |x|^۲$، آنگاه برای $F(t,u) = u^۲$ جواب عمومی $u(t) = \frac{۱}{c-t}$ دارد. در این حالت از نامساوی $|X(t)| \leq \frac{۱}{c-t}$ دیگر نمی‌توان نتیجه گرفت که جواب در زمان متناهی کران‌دار است.*

تمرین

۱. نشان دهید نرم $\|u\|_w$ که در قضیه ۸.۱ معرفی شده است، هم‌ارز نرم سوپریمم است.

۲. اگر $\phi(t)$، $\psi(t)$ و $\lambda(t)$ توابع حقیقی پیوسته و نامنفی باشند که در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\phi(t) \leq \lambda(t) + \int_{t_\circ}^{t} \psi(s)\phi(s)ds,$$

در این صورت نامساوی زیر برقرار است:

$$\phi(t) \leq \lambda(t) + \int_{t_\circ}^{t} \lambda(s)\psi(s)\exp[\int_{s}^{t}\psi(z)dz]ds.$$

۳. فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ زیرمجموعه باز بوده و $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ میدان C^1 باشد، همچنین اگر $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع مثبت هموار باشد، نشان دهید تصویر خمهای جواب دو معادله زیر یکسان است؛ یعنی اگر $x(t)$ و $y(t)$ به ترتیب جوابهای این دو معادله باشند، تابع صعودی $\sigma : dom(y) \longrightarrow dom(x)$ وجود دارد که $y(t) = x(\sigma(t))$.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y} = h(y)f(y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

۴. در تمرین قبل نشان دهید تابع $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که برای هر شرط اولیه x_0، دامنه تعریف جواب $y(t)$ برابر $\mathbb{R}$ است.

۵. فرض کنید $h(t)$ و $f(x)$ توابع مثبت و پیوسته روی $0 \leq t < \infty$ و $0 < x < \infty$ باشند. در این صورت

الف- اگر داشته باشیم $\int_1^\infty \frac{dx}{f(x)} = \infty$، آنگاه همه جوابهای

$$\dot{x} = h(t)f(x), \qquad x(t_0) = x_0$$

برای $t_0 \geq 0$ و $x_0 > 0$ روی سرتاسر بازه $t_0 \leq t < \infty$ تعریف می‌شوند.

ب- اگر $\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} = \infty$، آنگاه دامنه تعریف جواب معادله فوق شامل $0 < t \leq t_0$ خواهد بود.

ج- اگر $g \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ و $|g(t,x)| \leq h(t)f(|x|)$ که تابع f خواص دو قسمت قبل را دارد، نشان دهید جواب دستگاه $\dot{X} = g(t,X)$، با شرط اولیه $X(t_0) = X_0$، روی بازه $0 < t < \infty$ وجود دارد. به علاوه اگر $\int_0^\infty h(t)dt < \infty$، آنگاه این جواب کراندار است.

۶. فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع هموار، مثبت و تناوبی با دوره $p > 0$ باشد. ثابت کنید که اگر $x(t)$ یک جواب معادله $\dot{x} = f(x)$ باشد و $T = \int_0^p \frac{dx}{f(x)}$، آنگاه $x(t+T) - x(t) = p$. اگر علامت تابع f ثابت نباشد، چه می‌توان گفت؟

۷. اگر در دستگاه همیلتونی زیر همه سطوح تراز تابع هموار $H(x,y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ کران‌دار باشد، نشان دهید که دامنه تعریف هر جواب $\mathbb{R}$ است.

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

۸. به کمک تمرین قبل نشان دهید که جوابهای $x'' + x + x^{3} = 0$ در سرتاسر $\mathbb{R}$ تعریف می‌شوند. در رابطه با جوابهای $x'' + x' + x + x^{3} = 0$ چه می‌توان گفت؟

۹. فرض کنید $f(t, x)$ و $F(t, v)$ به ترتیب توابعی پیوسته روی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ باشند که $F(t, 0) = 0$، به علاوه داریم: $|f(t, x) - f(t, y)| \leq F(t, |x - y|)$ و می‌دانیم که برای هر شرط اولیه $v(t_0) = v_0$، جواب معادله $\dot{v} = F(t, v)$ یکتا است. نشان دهید در این صورت جوابهای $X(t; t_0, X_0)$ از معادله (۱.۱) نسبت به (t_0, X_0) پیوسته است.

۱۰. اگر میدان $f(x)$ نسبت به x به طور موضعی لیپ‌شیتز بوده و $x(t)$ جوابی از $\dot{x} = f(x)$ باشد که $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$، آنگاه $f(x_0) = 0$.

۱۱. فرض کنید که $X_i : \mathbb{R} \longrightarrow |R^n$ برای $i = 1, 2$ مشتق‌پذیر باشند که برای $t_0 \leq t$

$$|X_1(t_0) - X_2(t_0)| \leq \gamma, \qquad |\dot{X}_i(t) - f(t, X_i(t))| \leq \mu_i$$

اگر $f(t, x)$ نسبت به x لیپشیتز با ضریب K باشد، نشان دهید

$$|X_1(t) - X_2(t)| \leq \gamma \exp(K|t - t_0|) + \frac{\mu_1 + \mu_2}{K}\big(\exp(K|t - t_0|) - 1\big)$$