



تمرین سری پنجم درس نظریه معادلات دیفرانسیل عادی، ۹/۳/۹۰

۱- اگر $\omega(x_0) = \Gamma$ یک مدار تناوبی باشد و x_0 درون Γ قرار داشته باشد، نشان دهید یک همسایگی داخلی Γ وجود دارد که هر مداری که از یک نقطه آن شروع شود به دور Γ می چرخد و به آن میل می کند.

۲- الف- فرض کنید $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ دارای خاصیت $f(t+T, x) = f(t, x)$ باشد. اگر معادله $\dot{x} = f(t, x)$ دارای جواب کران دار در \mathbb{R}^+ باشد، آنگاه دارای جواب T متناوب است.

ب- نشان دهید $\dot{x} = (a \cos t + b)x - x^3$ دارای جواب تناوبی غیر بدیهی است. ($a, b > 0$) در رابطه با وضعیت پایداری مداری آن چه می توان گفت؟

۳- اگر یک مدار تناوبی در صفحه در داخل مدار تناوبی دیگری باشد و در فضای بین این دو نقطه بحرانی یا مدار تناوبی دیگری وجود نداشته باشد، نشان دهید هر دو مدار نمی توانند پایدار باشند.

۴- جوابهای تناوبی دستگاههای زیر را مشخص کرده وضعیت پایداری مداری آنها را تعیین کنید.

الف- $\dot{r} = r \sin r, \dot{\theta} = 1$ ب- $\dot{r} = |\sin r|, \dot{\theta} = r$

ج- $\dot{r} = r(1-r^2) \sin(1-r^2)^{-1}, \dot{\theta} = 1$ د- $\dot{r} = r(1-r^2)(1-r^2), \dot{\theta} = 1$

ه- $\dot{r} = r(1-r^2)(1-r^2), \dot{\theta} = 1, \dot{z} = z$

۵- آیا معادلات زیر جواب تناوبی غیر ثابت دارند؟

الف- $x'' + (1 - \cos 4x)x' + x = 0$ ب- $\dot{x} = ax - y + xy^2, \dot{y} = x + ay + y^3$

ج- $\dot{x} = x(ax + by + c), \dot{y} = y(\alpha x + \beta y + \gamma)$

۶- نشان دهید دستگاههای زیر مدار تناوبی یکتا دارند.

الف- $x'' + (\mu x^5 - \lambda x^3 - \nu x)x' + x = 0$ ب- $x'' - \lambda(1-x^2)x' + x = 0$ (برای $\lambda > 0$)

ج- $\dot{x} = x - y - (x^2 + \frac{\mu}{\nu} y^2)x, \dot{y} = x + y - (x^2 + \frac{1}{\nu} y^2)y$

۷- نشان دهید دستگاه زیر دارای جواب تناوبی است، اما دور حدی ندارد.

$$\dot{x} = -y + xy, \dot{y} = x + \frac{1}{\nu}(x^2 - y^2)$$

۸- یک شرط لازم و کافی برای ضرایب a, b, c, d بیابید که دستگاه زیر جواب تناوبی غیربدیهی داشته باشد.

$$\dot{x} = ae^{y^2} + b, \dot{y} = ce^x + d$$

۹- الف- معادله $x'' + g(x) = 0$ را در نظر بگیرید. نشان دهید اگر $xg(x) > 0$ برای هر x و

$$G(x) = \int_0^x g(s) ds \rightarrow \infty \text{ وقتی } |x| \rightarrow \infty, \text{ همه جوابهای معادله تناوبی هستند.}$$

ب- اگر علاوه بر شرایط قسمت قبل تابع g فرد باشد، نشان دهید جواب معادله با شرایط اولیه $x(0) = A, x'(0) = 0$ در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$x' = \pm \sqrt{2[G(A) - G(x)]}$$

ج- نشان دهید دوره تناوب جواب قسمت قبل برابر است با

$$T(A) = 2\sqrt{2} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{G(A) - G(x)}}$$

د- نشان دهید برای $a, b > 0$ جواب مسأله $x'' + ax + bx^3 = 0$ با شرط اولیه $x(0) = A, x'(0) = 0$ تناوبی است با دوره تناوب

$$T = 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2a + bA^2(1 + \sin^2 \theta)}}$$

۱۰- نگاهی پوانکاره را برای هر کدام از جوابهای تناوبی دستگاههای زیر محاسبه کنید و به کمک آن وضعیت پایداری مداری جواب تناوبی را مشخص نمایید.

$$\text{الف- } \dot{r} = r(1-r), \dot{\theta} = 1, \dot{z} = -z$$

$$\text{ب- } \dot{x} = -4y + x(1 - \frac{x^2}{4} - y^2), \dot{y} = x + y(1 - \frac{x^2}{4} - y^2)$$

$$\text{ج- } \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2), \dot{z} = z$$

۱۱- الف- فرض کنید γ یک مدار تناوبی در صفحه با دوره تناوب اصلی T باشد. همچنین γ_n مدارهای تناوبی با

دوره اصلی T_n . اگر $x_n \in \gamma_n$ به نقطه $x \in \gamma$ همگرا باشد، ثابت کنید $T_n \rightarrow T$.

ب- نشان دهید این مطلب در ابعاد بالاتر صحیح نیست و ثابت کنید در این حالت اگر $T_n \rightarrow T_0$ ، آنگاه T_0 مضربی از T است.

۱۲- اگر $\dot{x} = f(x)$ و $\dot{x} = g(x)$ دستگاههای دو بعدی باشند که $f(x).g(x) = 0$ برای هر $x \in \mathbb{R}^2$. نشان

دهید اگر f مدار تناوبی غیر بدیهی داشته باشد، g حتماً نقطه بحرانی دارد.