به نام او

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

تمرین سری دوم درس نظریه معادلات دیفرانسیل عادی، ۸۹/۱۲/۱۶

۱ - اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس A منفی باشد، میدانیم که ثابتهای $C,\mu > 0$ وجود دارند که

$$\left\|e^{tA}X\right\| \le Ce^{-\mu t}\left\|X\right\|$$

الف- نشان دهید ثابت $T > 0$ وجود دارد که برای $t \ge T$ داریم: $\left\|e^{tA}X\right\| \le e^{-\mu t}\left\|X\right\|$.

ب- نشان دهید $\left\|X\right\|_* = \int_0^T e^{s\mu}\left\|e^{sA}X\right\|ds$ یک نرم روی $\mathbb{R}^n$ است.

ج- ثابت کنید $\left\|e^{tA}X\right\|_* \le e^{-\mu t}\left\|X\right\|_*$ برای هر $t \ge 0$.

۲ - الف- اگر J یک بلوک جردن $m \times m$ به صورت زیر باشد و $Q = diam\left[1,\varepsilon,\varepsilon^2,\ldots,\varepsilon^{m-1}\right]$. ماتریس $Q^{-1}JQ$ را به دست آورید.

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

ب- به کمک قسمت قبل نشان دهید ماتریس وارونپذیر P وجود دارد که $P^{-1}AP$ مشابه فرم جردن A است با این تفاوت که به جای درایههای ۱ بالای قطر اصلی عدد ε قرار دارد، همچنین متناظر مقادیر ویژه مختلط به جای ماتریس I_2، ماتریس εI_2 قرار دارد.

ج- اگر $\left\|Y\right\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left|y_i\right|$ که $Y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$، نشان دهید نرم $\left\|X\right\|_* = \left\|P^{-1}X\right\|_\infty$ همان خاصیت تمرین قبل را دارد؛ یعنی اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس A منفی باشد، ثابت $\mu > 0$ وجود دارد که $\left\|e^{tA}X\right\|_* \le e^{-\mu t}\left\|X\right\|_*$ برای هر $t \ge 0$.

۳ - فرض کنید $\lambda = i\mu \ne 0$ مقدار ویژه ماتریس حقیقی A باشد و بعد فضای ویژه متناظر آن (تعداد بردارهای ویژه مستقل) برابر m باشد. نشان دهید در دستگاه $\dot{X} = AX$ تعداد جوابهای متناوب مستقل با دوره تناوب اصلی $\frac{2\pi}{\mu}$ برابر $2m$ است. در رابطه با تعداد جوابهای متناوب مستقل با دوره تناوب $\frac{2\pi}{\mu}$ چه میتوان گفت؟

۴- فرض کنید ماتریس $A(t)$ روی بازه $[0,\infty)$ پیوسته بوده و همه جوابهای

$$\dot{X} = A(t)X \qquad (1)$$

روی این بازه کراندار باشد. اگر $\Phi(t)$ ماتریس اساسی این دستگاه باشد،

الف- نشان دهید $\Phi(t)^{-1}$ روی $[0,\infty)$ کراندار است اگر و تنها اگر $\liminf_{t\to\infty} \int_0^t trA(s)ds > -\infty$.

ب- ثابت کنید در شرایط قسمت (الف) دستگاه فوق به غیر از جواب بدیهی صفر جواب دیگری مانند $X(t)$ ندارد که در شرط $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$ صدق کند.

ج- اگر $p(t)$ تابع کراندار روی $[0,\infty)$ بوده و $\varphi(t)$ یک جواب غیر بدیهی $y'' + p(t)y = 0$ باشد که $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$، نشان دهید این معادله یک جواب بیکران دارد.

۵- اگر $\Phi(t)$، ماتریس اساسی دستگاه (۱) و $\Phi(t)^{-1}$ روی $[0,\infty)$ کراندار باشند، به علاوه $A(t)$ و $B(t)$ ماتریسهای پیوستهای باشند که $\int_0^\infty \left|B(s)\right| ds < \infty$.

الف- نشان دهید همه جوابهای

$$\dot{Y} = (A(t) + B(t))Y \qquad (2)$$

روی $[0,\infty)$ کراندار است.

ب- برای هر جواب $Y(t)$ از (۲)، جواب **یکتای** $X(t)$ از (۱) وجود دارد که $\lim_{t\to\infty} X(t) - Y(t) = 0$.

(**راهنمایی:** از عبارت $X(t) = Y(t) + \int_t^\infty \Phi(t)\Phi(s)^{-1}B(s)Y(s)ds$ مشتق بگیرید و دقت کنید که چرا این انتگرال تعریف شده است.)

ج- برای هر جواب $X(t)$ از (۱)، جواب **یکتای** $Y(t)$ از (۲) وجود دارد که نتیجه قسمت قبل برقرار باشد.

(**راهنمایی:** معادله انتگرالی $Y(t) = X(t) - \int_t^\infty \Phi(t)\Phi(s)^{-1}B(s)Y(s)ds$ را روی بازه $\alpha \le t < \infty$ برای α به اندازه کافی بزرگ، حل کنید.)

د- برای $\omega > 0$ و تابع پیوسته $b(t)$ که $\int_0^\infty \left|b(t)\right| dt < \infty$، نشان دهید $y'' + (\omega^2 + b(t))y = 0$ دارای جواب $\varphi(t)$ است که

$$\lim_{t\to\infty} [\varphi(t) - \sin\omega t]^2 + [\varphi'(t) - \omega\cos\omega t]^2 = 0$$

۶- اگر $\int_0^\infty \left|B(s)\right| ds < \infty$ و λ مقدار ویژه با تکرر یک ماتریس A است. فرض کنید v بردار ویژه متناظر آن باشد. در این صورت نشان دهید $\dot{X} = (A + B(t))X$ دارای جواب $\varphi(t)$ است که $\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t}\varphi(t) = v$.

(**راهنمایی:** معادله انتگرالی زیر را در بازه $\alpha \le t < \infty$ حل کنید

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}v + \int_\alpha^t \Phi^s(t-\tau)B(\tau)\varphi(\tau)d\tau - \int_t^\infty \Phi^u(t-\tau)B(\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

که $\Phi^s(t) + \Phi^u(t) = e^{tA}$ به ترتیب متناظر مقادیر ویژه با قسمت حقیقی کمتر از $\mathrm{Re}\,\lambda$ و بیشتر از آن هستند.)

۷- به کمک مسأله قبل نشان دهید که اگر $g(t)$ تابع پیوستهای باشد که $\int_0^\infty t^2 \left|g(t)\right| dt < \infty$، آنگاه معادله $y'' + g(t)y = 0$ دارای جوابهای $\varphi_1(t)$ و $\varphi_2(t)$ است که وقتی $t \to \infty$

$$\varphi_1(t) \to 1, \qquad \varphi_1'(t) \to 0, \qquad \frac{\varphi_2(t)}{t} \to 1, \qquad \varphi_2'(t) \to 1$$

۸- الف- فرض کنید $g(t)$ تابعی پیوسته و کراندار روی $\mathbb{R}$ بوده و قسمت حقیقی مقادیر ویژه ماتریس B مثبت و ماتریس C منفی باشد و

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \qquad g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}$$

نشان دهید جواب دستگاه $\dot{X} = AX + g(t)$ که همارز با دستگاه زیر است

$$\dot{X}_1 = BX_1 + g_1(t) \qquad \dot{X}_2 = CX_2 + g_2(t)$$

به صورت زیر نمایش داده میشود. (چرا این توابع برای تمام مقادیر $t \in \mathbb{R}$ تعریف میشوند؟)

$$X_1(t) = \int_{-\infty}^t e^{B(t-s)}g_1(s)\,ds, \qquad X_2(t) = -\int_t^\infty e^{C(t-s)}g_2(s)\,ds$$

ب- اگر قسمت حقیقی مقادیر ویژه A ناصفر باشد، مشابه قسمت قبل یک رابطه انتگرالی برای تجزیه جوابهای دستگاه $\dot{X} = AX + g(t)$ به زیرفضاهای E^s و E^u بنویسید.

ج- نشان دهید اگر تابع پیوسته g روی $\mathbb{R}$ کراندار بوده و قسمت حقیقی مقادیر ویژه ماتریس A ناصفر باشد، آنگاه $\dot{X} = AX + g(t)$ حداقل یک جواب کراندار دارد.

موفق باشید.

آخرین مهلت تحویل ۹۰/۱/۱۵