

وقت: ۲ ساعت

امتحان میان ترم درس آشنایی با جبرخطی - ۸۷/۲/۱۳

۱- ثابت کنید  $\det A^t = \det A$ . (۲۰ نمره)

۲- ثابت کنید اگر  $A \neq 0$  یک ماتریس  $n \times n$  باشد که  $A^n = 0$ ، آنگاه  $A$  قطری شدنی نیست. (۱۵ نمره)

۳-  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$  (۲۵ نمره)

الف- ماتریس  $B$  مثال بنزید، که فضای جواب دستگاه  $Bx = 0$  برابر  $Col A$  باشد.

ب- یک پایه برای  $Nul A$  و یک پایه برای  $Col A$  پیدا کنید.

ج- مختصات بردار دلخواه  $x \in Col A$  را در پایه ارایه شده در قسمت ب بنویسید.

۴-  $A = \begin{bmatrix} 11 & 9 & 12 \\ 9 & 10 & 11 \\ -15 & -14 & -17 \end{bmatrix}$  (۲۰ نمره)

الف- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس  $A$  را محاسبه کنید.

ب- مقدار  $A^{100}$  را محاسبه کنید.

۵- به یکی از دو سؤال زیر به دلخواه پاسخ دهید: (۲۰ نمره)

الف- اگر  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  با ستونهای مستقل خطی باشد، ثابت کنید ماتریس  $B$  وجود دارد که  $BA = I_n$ .

ب- اگر  $AB = I_m$  و  $BA = I_n$  ثابت کنید  $m = n$ .