بسمه تعالی

امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۲، بهار ۹۷ — زمان: ۳ ساعت

سوالات در دو صفحه قرار دارند.

در حل هریک از قسمت‌های یک سوال می‌توانید از قسمت‌های قبلی استفاده کنید اگر چه آنها را حل نکرده باشید.

---

۱. فرض کنید

$$C=\begin{bmatrix} ۱۱ & ۲ & -۸ \\ ۲ & ۲ & ۱۰ \\ -۸ & ۱۰ & ۵ \end{bmatrix},\ v_۱=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix},\ v_۲=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix},\ v_۳=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۲ \end{bmatrix}, b=۱۸(۲v_۱+v_۲+v_۳)$$

الف) نشان دهید $\{v_۱,v_۲,v_۳\}$ یک پایه متعامد و یکه از بردارهای ویژه ماتریس C اند. مقادیر ویژه متناظر آنها را مشخص کنید و (به کمک آنها) Xای را بیابید که $۲CX=b$. (۱۰ نمره)

ب) نشان دهید رابطه $z=q(X)=X^tCX+X\bullet b+۱۸$ با انتقالی به شکل $Y=X+W$ به صورت $z=Y^tCY$ در می‌آید. (۴ نمره)

ج) نشان دهید رابطه $z=Y^tCY$ در مختصات $\{v_۱,v_۲,v_۳\}$ به شکل $z=۹(۲u_۱^۲+u_۲^۲-u_۳^۲)$ در می‌آید. (۴ نمره)

د) به صورت تقریبی مجموعه $\{X : q(X)=۹\}$ را توصیف کنید و شکل آن را بکشید. (۴ نمره)

۲. فرض کنید $\pi_۱=\{A+s_۱w_۱+s_۲w_۲ \ : s_۱,s_۲\in\mathbb{R}\}$ و $\pi_۲=\{t_۱w_۳+t_۲w_۴ \ : t_۱,t_۲\in\mathbb{R}\}$ که

$$w_۱=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, w_۲=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, w_۳=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ -۱ \\ -۱ \end{bmatrix}, w_۴=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ -۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

الف) نقاط P و Q را به ترتیب روی صفحه‌های $\pi_۱$ و $\pi_۲$ به گونه‌ای بیابید که PQ بر هر دو صفحه عمود باشد و به کمک آن فاصله دو صفحه را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

ب) بردار یکه w را که بر هر سه بردار $w_۱,w_۲,w_۳$ عمود باشد بیابید و به کمک آن حجم سه بعدی متوازی السطوح تشکیل شده با $w_۱,w_۲,w_۳$ را محاسبه کنید. (این مقدار برابر حجم چهار بعدی متوازی السطوح تشکیل شده با $w_۱,w_۲,w_۳,w$ است.) (۱۰ نمره)

---

۳. الف) مرکز و شعاع دایره حاصل از تقاطع صفحه $x+y+z=1$ و کره $x^2+y^2+z^2=1$ را بدست آورید. (۵ نمره)

ب) دو بردار متعامد و یکه موازی صفحه بالا ارائه دهید. (۴ نمره)

ج) یک پرمایش برحسب طول برای دایره بالا ارائه دهید. (۵ نمره)

۴. فرض کنید A یک ماتریس پاد متقارن ناصفر ۳×۳ است (یعنی $A^t=-A$) و $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ تابعی مشتق‌پذیر است که $\dot\gamma(t)=A\gamma(t)$.

الف) نشان دهید $A^3=cA$ و برای هر بردار $v\in\mathbb{R}^3$، بردار Av بر بردار v عمود است. (۴ نمره)

ب) نشان دهید تصویر γ باید روی کره‌ای به مرکز مبدأ باشد. (۴ نمره)

ج) نشان دهید اندازه سرعت γ باید ثابت باشد. (۴ نمره)

(راهنمایی: از رابطه $\dot\gamma(t)=A\gamma(t)$ نسبت به t مشتق بگیرید و از قسمت قبل استفاده کنید)

د) در ادامه فرض کنید که سرعت γ صفر نیست. نشان دهید انحنای خم γ همه جا ثابت است. (۴ نمره)

ه) نشان دهید تاب خم γ همه جا صفر است. (۴ نمره)

و) نشان دهید تصویر γ یک دایره است. (۴ نمره)

موفق باشید