سؤال ۱) الف ـ با محاسبه می‌توان دید که

$$Cv_1 = 18v_1 \quad , \quad Cv_2 = 9v_2 \quad , \quad Cv_3 = -9v_3$$

ـ محاسبه نرم هر بردار $\|v_i\| = 1$.

ـ محاسبه ضرب داخلی $v_i \cdot v_j = 0$. یا می‌توان استدلال کرد که چون ماتریس متقارن است بردارهای ویژه بر هم عمودند.

ـ $X = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ آنگاه

$$2CX = 18(2\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 - \alpha_3 v_3) = b$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 1 \;,\; \alpha_2 = 1 \;,\; \alpha_3 = -1$$

$$X = v_1 + v_2 - v_3$$

ب)

$$q(Y-W) = Y^tCY - Y^tCW - W^tCY + W^tCW + Y^tb - W^tb + 18$$

کافیست W را پیدا کنیم به طوریکه

$$\Rightarrow \begin{cases} 2CW = b \\ W^tCW - W^tb + 18 = 0 \end{cases}$$

بنابر قسمت الف) $W = v_1 + v_2 - v_3$ است که در رابطه دوم صدق می‌کند.

ج) اگر $Y = u_1\vec{v}_1 + u_2\vec{v}_2 + u_3\vec{v}_3$ باشد آنگاه

$$z = Y^tCY = (u_1\vec{v}_1^{\,t} + u_2\vec{v}_2^{\,t} + u_3\vec{v}_3^{\,t})(18u_1\vec{v}_1 + 9u_2\vec{v}_2 - 9u_3\vec{v}_3)$$

$$= 9(2u_1^2 + u_2^2 - u_3^2)$$

د) هذلولی‌گون یک‌پارچه

سؤال ۲ الف

$P = A + s_1 w_1 + s_2 w_2$

$Q = t_1 w_3 + t_2 w_4$

$$(P-Q)\cdot w_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4s_1 + 2s_2 = 0 \\ -1 + 2s_1 + 2s_2 = -t_2 \\ 4t_1 + 2t_2 = 0 \\ 1 - s_2 = 2t_1 + 2t_2 \end{cases}$$

$s_1 = \theta$, $s_2 = -2\theta$, $t_2 = 2\theta + 1$, $t_1 = -\theta - 1/2$

$$|PQ| = |A + 1/2\, w_3 - w_4| = |(3/2, -3/2, -3/2, 3/2)| = 3$$

ب

$$w = (x, y, z, t) \quad , \quad w \cdot w_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y - z - t = 0 \end{cases}$$

همه بردارهای به صورت $w = (\theta, -\theta, -\theta, \theta)$ جواب هستند.

چون $|w| = 1$ نابر این $\theta = \frac{1}{2}$.

$$\text{حجم} = |\det [w_1 | w_2 | w_3 | w]| = 6$$

سؤال ۳) الف - سه نقطه $e_1=(1,0,0)$ ، $e_2=(0,1,0)$ و $e_3=(0,0,1)$ روی

این دایره هستند. بنابراین این دایره محیط بر مثلث متساوی الاضلاع به رئوس بالا است.

مرکز آن $A=(1/3,1/3,1/3)$ و شعاع آن $R=\sqrt{\frac{2}{3}}$ است.

ب - یکی از این دو بردار می‌تواند بردار زیر باشد:

$$u_1=\frac{e_1-e_2}{\|e_1-e_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

بردار دوم از تصویر بردار e_1-e_3 بر u_1 بدست می‌آید، در واقع

$$v_2=(e_1-e_3)-\frac{(e_1-e_3)\cdot u_1}{\|u_1\|^2}\,u_1$$

$$=(1,0,-1)-\frac{1}{2}(1,-1,0)=(1/2,1/2,-1)$$

$$u_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

ج) پرمایش برحسب طول در مختصات u_1 و u_2 عبارتست از:

$$\gamma(s)=A+R\left(\cos\left(\frac{s}{R}\right)\vec{u}_1+\sin\left(\frac{s}{R}\right)\vec{u}_2\right)$$

سؤال ۴ الف ـ

$$Av \cdot v = v \cdot A^t v = -v \cdot Av \Rightarrow Av \cdot v = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = -(a^2+b^2+c^2)A$$

ب ـ $\frac{d}{dt}|\gamma(t)|^2 = 2\gamma(t)\cdot\gamma'(t) = 2\gamma(t)\cdot A\gamma(t) = 0$

(بنا بر نتیجه قسمت الف)

$\Rightarrow$ مقدار $|\gamma(t)|$ ثابت است.

ج ـ اندازه سرعت برابر است با $|\dot{\gamma}(t)|$ و اگر از مجذور آن مشتق بگیریم

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{dt}|\dot{\gamma}(t)|^2 = 2\dot{\gamma}(t)\cdot\ddot{\gamma}(t) \\ \dot{\gamma} = A\gamma \Rightarrow \ddot{\gamma} = A\dot{\gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}|\dot{\gamma}(t)|^2 = 2\dot{\gamma}\cdot A\dot{\gamma} = 0$$

(بنا بر نتیجه قسمت الف)

د ـ بنا بر قسمت ج) $v = |\dot{\gamma}(t)|$ ثابت است بنابراین پارامتری بر حسب طول خم به صورت

$$\gamma = \gamma\left(\frac{s}{v}\right)$$

خواهد بود.

$$\hat{T}(s) = \frac{1}{v}\dot{\gamma}\left(\frac{s}{v}\right) \Rightarrow K = \frac{1}{v^2}\left|\ddot{\gamma}\left(\frac{s}{v}\right)\right|$$

کافی است نشان دهیم $|\ddot{\gamma}|$ ثابت است. مشابه قسمت قبل

$$\frac{d}{dt}|\ddot{\gamma}|^2 = 2\gamma''\cdot\gamma''' = 2\gamma''\cdot A\gamma'' = 0$$

هـ- $\hat{N} = \frac{1}{a}\gamma''$ که $a = |\gamma''|$ عددی ثابت است. بنابراین

$$\hat{B} = \hat{T}\times\hat{N} = \frac{1}{av}\gamma'\times\gamma''$$

$$\frac{dB}{ds} = \frac{1}{av}\gamma'\times\gamma'''$$

برای اینکه $\tau=0$ باشد کافیست γ''' موازی γ' باشد.

$$\gamma''' = A\gamma'' = A^3\gamma = cA\gamma = c\gamma'$$

و- k ثابت و $\tau=0$ بنابر قضیه اساسی خم‌ها تصویر آن یک دایره است.