

به نام خدا

زمان: ۳ ساعت

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۲

خرداد ۸۹

۱- تابع $f(x, y) = y^3x - x^3 + 3x^2y$ را در نظر بگیرید.

الف) در چه راستایی f بیشترین نرخ تغییرات را در نقطه $(2, 1)$ دارد؟ جواب را به صورت یک بردار یکه بنویسید. (۲ نمره)

ب) اگر $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک خم پارامتری باشد که $\gamma(0) = (2, 1)$ و $\gamma'(0) = (3, 5)$ مقدار

$$\left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0}$$
 را پیدا کنید. (۳ نمره)

۲- مقدار تقریبی تابع $f(x, y, z) = 2y^2 + ze^{-x} + 1$ را در نقطه $(0.2, 0.9, 2.1)$ به روش تقریب درجه دوم (به کمک چند جمله‌ای تیلور درجه دو) پیدا کنید. (۱۰ نمره)

۳- با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی مقدار تقریبی y را پیدا کنید که نقطه $(1.2, y)$ روی خم $x^3 + y^3 = 2xy$ در نزدیکی نقطه $(1, 1)$ واقع است. (۱۰ نمره)

۴- معادله خط مماس بر خمی که از تقاطع سهمی‌گون و بیضی‌گون زیر به دست می‌آید را در نقطه $(1, -1, 2)$ بنویسید. (۵ نمره)

$$z = x^2 + y^2$$

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$$

۵- مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

$$\int_0^1 \int_{2y}^1 \frac{dx dy}{1 + x^4}$$

۶- نشان دهید مقدار انتگرال $\oint_C (y^3 - 1)dx + (3xy^2 + 2y)dy$ که C خمی از نقطه $(1, 1)$ به نقطه

$(3, 2)$ است، مستقل از انتخاب خم C است. مقدار این انتگرال را حساب کنید. (۱۰ نمره)

۷- فرض کنید C مثلثی باشد که از تقاطع صفحه $6x + 2y + 3z = 6$ با سه صفحه مختصاتی $(x = 0, y = 0$

و $z = 0)$ به دست می‌آید. وقتی از مبدأ مختصات به خم C نگاه می‌شود، جهت آن در جهت

عقربه‌های ساعت است. مقدار انتگرال $\oint_C F \cdot d\vec{r}$ را وقتی $F(x, y, z) = (y^2, 3x, xz)$ به دو طریق زیر

محاسبه کنید.

الف- C را پرمایش کنید و انتگرال را به طور مستقیم حساب کنید. (۸ نمره)

ب- به کمک قضیه استوکس مقدار انتگرال را به دست آورید. (۷ نمره)

۸- فرض کنید $F(x, y, z) = (yz, 2xz, x)$ و M قسمتی از رویه $z = x^2 + y^2$ باشد که زیر صفحه

$z = 1$ قرار دارد و بردار نرمال آن به سمت بالا (مؤلفه سوم آن مثبت) است.

الف- میدان $G = \text{Curl}F$ را به دست آورید. (۴ نمره)

ب- انتگرال $\int_M G \cdot \vec{n} dS$ را به کمک قضیه استوکس (قضیه کرل) محاسبه کنید. (۷ نمره)

ج- مقدار انتگرال $\int_M G \cdot \vec{n} dS$ را به کمک قضیه دیورژانس در \mathbb{R}^3 به دست آورید. (۷ نمره)

د- جواب قسمت قبل را به صورت مستقیم (با تعریف انتگرال روی رویه) محاسبه کنید. (۷ نمره)