

آزمون دوم ریاضی عمومی ۲ (بهار ۸۷) مدت: ۳ ساعت

۱. همه نقاط بحرانی تابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x, y, z) = \cos x + \cos y \cos z$ را در ناحیه $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ پیدا کنید و نوع آن‌ها (مینیمم موضعی، زینی، ماکزیمم موضعی) را مشخص نمایید. (۶ نمره)

۲. ماکزیمم و مینیمم مقدار $F(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}$ را با شرط $\frac{x^2}{2} + x + \frac{y^2}{2} - y = -\frac{1}{2}$ به دست آورید. (۳ نمره)

۳. ذره‌ای در امتداد خم $\gamma(t)$ که اشتراک دو رویه $x^2 + e^y + z^3 = 1$ و $x^2 y + \cos y - z^2 x = 0$ حرکت می‌کند و در لحظه $t = 0$ از نقطه $(1, 0, -1)$ با تندی ۳ می‌گذرد (یعنی $\|\gamma'(0)\| = 3$) و از مبدأ دور می‌شود. راستای حرکت (یعنی بردار $\gamma'(0)$) و مقدار سرعت دور شدن از مبدأ را در نقطه $(1, 0, -1)$ (یعنی $\frac{d}{dt}\|\gamma(t)\|$) را در $t = 0$ پیدا کنید. (۹ نمره)

۴. الف) نشان دهید در معادلات زیر می‌توان u و v را به عنوان توابعی از (x, y, z) در همسایگی نقطه $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ و $(u, v) = (1, 0)$ در نظر گرفت.

$$xe^y + uz - \cos v = 2$$

$$u \cos y + x^2 v - yz^2 = 1$$

ب) تمام مشتقات جزئی u و v نسبت به y و z را در نقطه $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ به دست آورید.

ج) مقدار تقریبی u را در نقطه $(2, \frac{1}{10}, \frac{9}{10})$ با تقریب خطی به دست آورید. (۱۰ نمره)

۵. حجم ناحیه زیر سهمی گون $z = 1 - x^2 - y^2$ که بالای مربع به راس‌های $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ ، $(-1, 0, 0)$ و $(0, -1, 0)$ در صفحه xy قرار دارد را به دست آورید. (۵ نمره)

۶. جرم کره‌ای را به دست آورید که چگالی آن در هر نقطه (x, y, z) برابر $2R - d$ است که در آن R شعاع کره و d فاصله نقطه (x, y, z) تا یک محور گذرا از مرکز کره است. (۶ نمره)

موفق باشید.