

امتحان میان ترم دوم ریاضی عمومی ۱

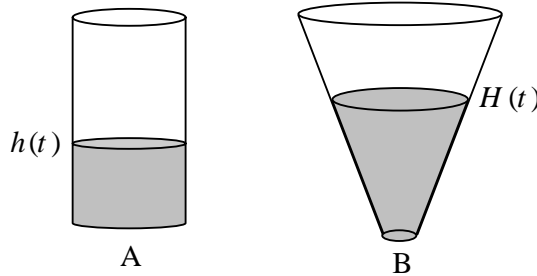
مدت امتحان: ۱۸۰ دقیقه

۱۳۸۶/۹/۸

۱- در صفحه بعد اشکال a تا e نمودار پنج تابع را نشان می‌دهد و اشکال ۱ تا ۴ نمودار مشتق چهار تا از این توابع است. مشخص کنید که هر کدام از نمودارهای ۱ تا ۴ مشتق کدام تابع است.

۲- در یک تانکر ۱۰۰۰ لیتر محلول آب و نمک همگن که محتوی ۵۰ کیلوگرم نمک است، ریخته‌ایم. محلول داخل تانکر با سرعت ۵ لیتر در دقیقه از آن خارج و همزمان آب خالص با همان سرعت وارد تانکر می‌شود. اگر مقدار نمک داخل تانکر را در زمان t با $S(t)$ (برحسب کیلوگرم) نمایش دهیم:
الف- معادله‌ای بنویسید که رابطه میان $S(t)$ و $S'(t)$ را مشخص کند.
ب- پس از گذشت چند دقیقه مقدار نمک داخل تانکر به ۲۵ کیلوگرم می‌رسد؟

۳- به دو مخزن که شکل آنها در زیر نمایش داده شده و ارتفاع آنها به اندازه کافی بزرگ است، به طور همزمان آب وارد می‌کنیم. اگر سرعت آب ورودی در هر دو مخزن برابر باشد و تابع ارتفاع را در زمان t در مخزن A و B به ترتیب با $h(t)$ و $H(t)$ نمایش دهیم، آنگاه:
الف- نمودار تقریبی $h(t)$ و $H(t)$ را رسم کنید.
ب- با استدلال ریاضی ثابت کنید، فقط در یک لحظه مانند $t \neq 0$ ، $h(t) = H(t)$ است.



۴- الف- مقدار $\tan^{-1}(0/1)$ را با تقریب خطی محاسبه کنید، که $\tan^{-1} \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$: $\mathbb{R} \rightarrow \tan^{-1} = \arctan$.

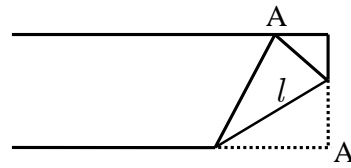
ب- حداکثر خطا را در این تقریب معین کنید.

ج- مقدار واقعی $\tan^{-1}(0/1)$ از مقدار تقریبی کمتر است یا بیشتر؟ چرا؟

۵- یک نوار طولانی از کاغذ به عرض a سانتی‌متر را در نظر بگیرید و آن را طوری تا کنید که گوشه پایینی آن روی ضلع مقابل قرار گیرد (مطابق شکل ۱ در صفحه بعد). می‌نیم طول l را محاسبه کنید.

هر سؤال ۴ نمره دارد.

موفق باشید.



شکل ۱- سؤال ۵

نمودارهای سؤال ۱

