

۱- اگر $(X, \|\cdot\|_X)$ فضای نرم دار و Y زیرفضای بسته آن باشد، نشان دهید تابع زیر یک نرم روی فضای خارج قسمتی $\frac{X}{Y}$

$$\|Y + x\| = \min_{z \in Y} \|z + x\|_X \quad \text{است. (۱۵نمره)}$$

۲- اگر X فضای باناخ و Y فضای نرم دار باشند و $\{T_\alpha\}$ خانواده‌ای از اعضای $B(X, Y)$ باشد به طوری که $\{\|T_\alpha x\|\}$ برای هر $x \in X$ کران دار باشد، نشان دهید $\{\|T_\alpha\|\}$ نیز کران دار است. (۱۵نمره)

۳- عملگر $T : \ell^p \rightarrow \ell^p$ با ضابطه $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, \frac{1}{2}x_1, x_2, \frac{1}{3}x_3, x_4, \dots)$ را در نظر بگیرید. عملگر الحاقی آن را محاسبه کرده و به کمک آن $\sigma(T)$ را محاسبه کنید. (۲۰نمره)

۴- اگر \mathcal{H} فضای هیلبرت و $S \in B(\mathcal{H})$ عملگر خودالحاق باشد، ثابت کنید لااقل یکی از $\|S\|$ یا $\|S^{-1}\|$ متعلق به $\sigma(S)$ است. (۱۵نمره)

۵- اگر $T \in K(\mathcal{H})$ عملگر فشرده باشد و بعد \mathcal{H} نامتناهی باشد، ثابت کنید (به طور دقیق و کامل)

الف- $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$ که $\sigma_p(T)$ مقادیر ویژه عملگر T است. (۱۵نمره)

ب- مجموعه $\sigma_p(T)$ حداکثر شمارا است. (۱۵نمره)

ج- اگر $\{\lambda_n\}$ دنباله مقادیر ویژه متمایز باشد، آنگاه $\lambda_n \rightarrow 0$. (۱۰نمره)

د- اگر $\{\mu_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی ناصفر باشد که به صفر همگرا است، یک عملگر فشرده و خودالحاق روی \mathcal{H} وجود دارد که مجموعه مقادیر ویژه ناصفر آن دنباله $\{\mu_n\}$ است. (۱۵نمره)

۶- برای هر عدد حقیقی s ، قرار دهید $H^s = \left\{ (a_n)_{n=1}^\infty : a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^\infty (1+n^2)^s |a_n|^2 < \infty \right\}$. نشان دهید

الف- H^s یک فضای برداری است. (۵نمره)

ب- رابطه $\|(a_n)\|_s = \left(\sum_{n=1}^\infty (1+n^2)^s |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ یک نرم روی این فضا است. (۷نمره)

ج- H^s با نرم فوق یک فضای باناخ است. (۱۰نمره)

د- نرم $\|\cdot\|_s$ از یک ضرب داخلی می‌آید. (۳نمره)

ه- برای هر $s > 0$ ، اعضای H^s زیرفضای چگال ℓ^2 است. (۱۰نمره)

و- یک تابع خطی روی H^s وجود دارد که نسبت به نرم $\|\cdot\|_s$ پیوسته است ولی نسبت به نرم ℓ^2 پیوسته نیست.
(دقت کنید که روی H^s دو نوع نرم می‌توان گذاشت، یکی $\|\cdot\|_s$ که در بالا تعریف شده است و دیگری نرمی که به عنوان زیرفضای ℓ^2 به ارث می‌برد.) (۱۵نمره)

ز- یک ایزومتري بين فضای $(H^s)'$ و H^{-s} وجود دارد. (۱۰نمره)