



۱. تابع $v(x, y)$ را بیابید که $f(z) = \frac{x+y}{x^2+y^2} + iv(x, y)$ یک تابع تحلیلی در $\mathbb{C} - \{0\}$ باشد. (۱۵ نمره)

۲. تصویر ناحیه $\{(x, y) : 0 < x < \frac{\pi}{2}, 1 < y < 2\}$ را تحت اثر نگاشت $w = \sin z$ بیابید. (یک شکل تقریبی از تصویر به دست آمده ترسیم کنید و معادله منحنی مرز آن را بنویسید.) (۱۵ نمره)

۳. الف- یک نگاشت همدیس بیابید که ناحیه $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, \text{Im}z > -1\}$ را به صورت یک به یک و پوشا به نیمصفحه بالا تصویر کند. (۱۵ نمره)

ب- یک جواب برای معادله لاپلاس در ناحیه D با شرایط مرزی زیر بیابید. (۱۵ نمره)

$$u|_{\text{Im}z=-1} = 0, \quad \partial_r u|_{|z|=2, \text{Re}z < 0} = 0, \quad u|_{|z|=2, \text{Re}z > 0} = 1.$$

۴. سری لوران تابع $\frac{1}{z} \tan^{-1} z$ حول نقطه $z = 0$ برای مقادیر مختلف z بنویسید و نواحی همگرایی را تعیین کنید. (۲۰ نمره)

۵. مقدار انتگرالهای زیر را به دست آورید. (۳۰ نمره)

$$\text{الف-} \int_{|z|=2} \frac{\sin \bar{z}}{z^2 + 1} dz \quad \text{ب-} \int_0^\infty \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 1} dx$$

پ- $\int_{\Gamma} \frac{z}{\bar{z}} dz$ که Γ مرز ناحیه $\{z : 1 < |z| < 2, \text{Im}z > 0\}$ است.

موفق باشید.