

به نام او
تمرین درس ریاضیات پیشرفته ۱
روش جداسازی متغیرها

۱. مطلوب است حل

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t$$

$$u(x, 0) = x + \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0$$

۲. مطلوب است حل

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t$$

$$u_x(0, t) - u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) + u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 0$$

۳. مسأله زیر را حل کنید.

$$u_t = k u_{xx} \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = x^2$$

۴. مسأله انتقال حرارت با شرایط مرزی همگن زیر را حل کنید.

$$u_t = k u_{xx} - h u \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad 0 < t, \quad h = \text{ثابت}$$

$$u(-\pi, t) = u(\pi, t), \quad u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t), \quad u(x, 0) = \sin x$$

۵. مطلوب است حل

$$\nabla^2 u = 0 \quad 1 < r < 2, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$u(1, \theta) = 0, \quad u(2, \theta) = \theta(\theta - \pi), \quad u_\theta(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi) = 0$$

۶. مسأله زیر را حل کنید

$$\nabla^2 u = 0 \quad 1 < r < 3, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

$$u(1, \theta) = 0, \quad u(3, \theta) = 0, \quad u(r, 0) = (r - 1)(r - 3), \quad u(r, \frac{\pi}{4}) = 0$$

۷. مطلوب است حل

$$\nabla^2 u = 0 \quad 0 < r < a, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi) = 0, \quad u(a, \theta) = \theta(\pi - \theta), \quad u(0, \theta) \text{ کرانه دار است}$$

۸. مسأله زیر را حل کنید

$$\nabla^2 u = 0 \quad r < a$$

$$u(a, \theta) = \sin \theta$$

۹. مطلوب است حل

$$\nabla^2 u = 0 \quad 1 < r < 2, 0 < \theta < \pi$$

$$u(1, \theta) = 0, u(2, \theta) = 0, u(r, 0) = 0, u(r, \pi) = r$$

۱۰. مسأله زیر را حل کنید

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < d, 0 < t$$

$$u(x, y, z, 0) = xyz, u_t(x, y, z, 0) = 0$$

$$u(0, y, z, t) = 0, u(x, 0, z, t) = 0, u(x, y, 0, t) = u(x, y, d, t),$$

$$u(a, y, z, t) = 0, u_y(x, b, z, t) = 0, u_z(x, y, 0, t) = u_z(x, y, d, t).$$