

به نام او
تمرین درس ریاضیات پیشرفته ۱
سری فوریه

۱. سری فوریه هر یک از توابع زیر را با دوره تناوب 2π بیابید و نمودار اولین سه مجموع جزئی آن را رسم کنید.

الف) $f(x) = x, x < \pi$	ب) $f(x) = x, 0 < x < 2\pi$
پ) $f(x) = x , x < \pi$	ت) $f(x) = x^2, x < \pi$
ث) $f(x) = x^2, 0 < x < 2\pi$	ج) $f(x) = \sin x , 0 < x < 2\pi$

۲. سری فوریه هر یک از توابع زیر را با دوره تناوب ۲ بیابید و نمودار مجموع اولین سه جمله آن را رسم کنید.

الف) $f(x) = 1 - x, 0 \leq x < 2$	ب) $f(x) = 1 - x , 0 \leq x < 2$
پ) $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}, 0 < x < 2$	ت) $f(x) = 1 - \frac{x}{ x }, x < 1$

۳. فرض کنید $f(x)$ دارای ضرایب فوریه a_n, b_n و $g(x)$ دارای ضرایب فوریه A_n, B_n و α و β دو عدد ثابت باشند. نشان دهید $\alpha f(x) + \beta g(x)$ دارای ضرایب فوریه $\alpha a_n + \beta A_n$ و $\alpha b_n + \beta B_n$ است.

۴. فرض کنید $2l$ دوره تناوب اولیه تابع $f(x)$ و k یک عدد طبیعی است. اگر در فرمول سری فوریه دوره تناوب را $T = 2kl$ بگیریم، ثابت کنید از هر k تا ضرایب فوریه متوالی a_n و b_n حداقل $k - 1$ ضریب متوالی از آن برابر صفر است.

۵. اگر $T = 2l$ و $T' = 2l'$ دوره‌های تناوب تابع $f(x)$ باشند، آنگاه سری‌های فوریه به دست آمده دوره تناوب T با سری فوریه به دست آمده با دوره تناوب T' برابر است.

۶. با استفاده از سری فوریه $f(x) = x^2$ در فاصله $|x| < 1$ ، مقدار سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ را محاسبه کنید.

۷. با استفاده از سری فوریه تابع $|\sin x|$ ، مقدار سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ را محاسبه کنید.

۸. با استفاده از سری فوریه $f(x) = |x|$ در فاصله $|x| < 1$ ، مقدار سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ را به دست آورید.

۹. با استفاده از سری فوریه $f(x) = x(1 - |x|)$ در فاصله $|x| < 1$ ، مقدار $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ را محاسبه کنید.

۱۰. مقادیر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ را با انتخاب سری فوریه مناسب محاسبه کنید.

۱۱. توابع زیر را با سری فوریه کسینوسی روی $0 < x < 2$ نمایش دهید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & f(x) = x \\ \text{ب)} & f(x) = x^2 \\ \text{پ)} & f(x) = \sin \frac{\pi x}{4} \\ \text{ت)} & f(x) = 1 - \frac{x}{2} \end{array}$$

۱۲. توابع زیر را با سری فوریه سینوسی روی $0 < x < 4$ نمایش دهید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & f(x) = 4 - x \\ \text{ب)} & f(x) = \cos \frac{\pi x}{4} \\ \text{پ)} & f(x) = \cosh \frac{\pi x}{4} \\ \text{ت)} & f(x) = x(4 - x) \end{array}$$

۱۳. مطلوب است محاسبه سری فوریه مختلط $f(x) = x$ برای $0 \leq x \leq 2$ و $f(x+2) = f(x)$.

۱۴. نشان دهید برای هر عدد طبیعی N داریم:

$$\sum_{|n| \leq N} e^{inx} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}$$

۱۵. فرض کنید p و q دو عدد صحیح باشند و $q < p$. نشان دهید برای هر $x \neq 2\pi k$ نابرابر زیر برقرار است:

$$\left| \sum_{q \leq n \leq p} e^{inx} \right| \leq \left| \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x \right|$$

۱۶. ضرایب فوریه مختلط توابع با دوره تناوب 2π را که روی $(-\pi, \pi)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند، بیابید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & f(x) = |x| \\ \text{ب)} & f(x) = |\sin x| \end{array}$$

۱۷. فرض کنید A عددی ثابت است که $nc_n \leq A$ و $c_n \geq c_{n+1} \geq 0$. نشان دهید

$$\left| \sum_{n=1}^N c_n \sin nx \right| \leq A(\pi + 1)$$