

به نام او

وقت: ۱۵۰ دقیقه

امتحان میان ترم درس ریاضیات پیشرفته — پاییز ۸۵

۱- جواب معادله لاپلاس،  $\Delta u = 0$ ، درون دایره به شعاع یک همراه با شرط مرزی زیر را به دست آورید. ( $h > 0$  یک مقدار ثابت است).

$$u_r(1, \theta) + hu(1, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} \sin\theta & 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

۲- جواب مسأله ناهمگن زیر را به روش اصل دوهمال به دست آورید.

$$\begin{aligned} u_{tt} + 2u_t + u &= u_{xx} + xt & 0 < x < \pi, 0 < t \\ u(0, t) &= 0, & u_x(\pi, t) &= t \\ u(x, 0) &= x, & u_t(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

۳- جواب معادله زیر را با استفاده از تابع گرین به دست آورید.

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= x & 0 < x < 1 \\ y(0) &= 0, & y(1) &= 1. \end{aligned}$$

۴- مسأله زیر را با استفاده از تبدیل  $\mathcal{F}^n(f) = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n + \frac{1}{4})\pi x dx$  حل کنید.

$$\begin{aligned} u_{tt} + 2u_t + u_{txx} + u_{xxxx} &= xt^2 & 0 < x < 1, 0 < t \\ u(x, 0) &= x^2 & u_t(x, 0) &= x + 1, \\ u(0, t) &= t^2 & u_x(1, t) &= t, \\ u_{xx}(0, t) &= t & u_{xxx}(1, t) &= 1 + t. \end{aligned}$$

۵- جواب مسأله زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u_{xxt} + te^{-2x} & 0 < x, t \\ u(x, 0) &= e^{-x} & u_x(0, t) &= t \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

هر سؤال ۲۰ نمره