ترمودینامیک و مکانیک آماری
پاسخ امتحان پایان ترم

۲۶ خردادماه ۱۳۸۹

نام و نام خانوادگی: شماره‌ی دانشجویی:

۱.(الف) شرط تعادل به صورت زیر است:

$$g_l(T,p) = g_g(T,p,C_g) \quad (۱)$$
$$= g_{\circ g}(T,p) + \frac{RT}{M_g} ln(C_g) \quad (۲)$$

و سر انجام خواهیم داشت:

$$\frac{M_g}{RT}\left[g_g(T,p,C_g) - g_{\circ g}(T,p)\right] = ln(C_g) \quad (۳)$$

(ب) می‌دانیم $dg = -sdT + vdp$ بنابر این

$$\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p = -s \quad (۴)$$

از طرفی می‌دانیم

$$s(T,p) = s(T_\circ,p) + \int_{T_\circ}^{T} \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p dT \quad (۵)$$
$$= s(T_\circ,p) + \int_{T_\circ}^{T} \frac{c_p}{T} dT \quad (۶)$$
$$= s(T_\circ,p) + c_p ln\left(\frac{T}{T_\circ}\right) \quad (۷)$$

با استفاده از رابطه بالا می‌توانیم اختلاف انرژی آزاد گیبس ویژه را به دست بیاوریم:

$$g_l\left(T_c,p\right)-g_{\circ g}\left(T_c,p\right) = \int_{T_\circ}^{T_c}\left[\left(\frac{\partial g_l}{\partial T}\right)_p-\left(\frac{\partial g_{\circ g}}{\partial T}\right)_p\right]dT \quad (۸)$$

$$= -\int_{T_\circ}^{T_c}\left[s_l\left(T,p\right)-s_g\left(T,p\right)\right]dT \quad (۹)$$

$$= \int_{T_\circ}^{T_c}\left[s_g(T_\circ,p)-s_l(T_\circ,p)-c_l ln\left(\frac{T}{T_\circ}\right)+c_g ln\left(\frac{T}{T_\circ}\right)\right]dT \quad (۱۰)$$

$$= \int_{T_\circ}^{T_c}\left[\frac{L_\circ}{T_\circ}+(c_g-c_l)ln\left(\frac{T}{T_\circ}\right)\right]dT \quad (۱۱)$$

$$= \frac{L_\circ}{T_\circ}\left(T_c-T_\circ\right)+\left(c_g-c_l\right)\left(T_c ln\left(\frac{T_c}{T_\circ}\right)-T_c\right)_{T_\circ}^{T_c} \quad (۱۲)$$

$$= \frac{L_\circ}{T_\circ}\left(T_c-T_\circ\right)+\left(c_g-c_l\right)\left(T_c ln\left(\frac{T_c}{T_\circ}\right)+T_\circ-T_c\right) \quad (۱۳)$$

$$(۱۴)$$

(ج) با جایگذاری استفاده از معادله‌های قسمت‌های ۱الف و ۱ب خواهیم داشت:

$$ln\left(C_g\right)=M_g\left[L_\circ\left(\frac{۱}{T_\circ}-\frac{۱}{T_c}\right)+\left(c_g-c_l\right)\left(ln\left(\frac{T_c}{T_\circ}\right)+\frac{T_\circ}{T_c}-۱\right)\right] \quad (۱۵)$$

(د) با جایگذاری مقادیر داده شده به مقدار $C_g = ۱/۴۳ \times ۱۰^{-۲}$ می‌رسیم.

(ه) می‌دانیم گرمای گرفته شده توسط آب برای بخار شدن با گرمای گرفته شده از هوا برابر است.

$$n_w M_{H_۲O} L_\circ = \frac{۵}{۲} n_{air} R(T-T_c) \quad (۱۶)$$

و به راحتی T_c به دست می‌آید:

$$T_c = T-\frac{۲}{۵R}\frac{n_w}{n_{air}}M_{H_۲O}L_\circ \quad (۱۷)$$

$$= T-\frac{۲}{۵R}(۰/۶\times C_g)M_{H_۲O}L_\circ \quad (۱۸)$$

با استفاده از رابطه ۱۸ به مقدار $T_c = ۲۸۳K$ می‌رسیم که نسبت به آنچه که فرض کردیم ($۲۸۵K$) معقول است.

(و) گرمای گرفته شده توسط یک متر مکعب هوا از دو راه قابل محاسبه است. یکی پیدا کردن گرمای تبخیر آب در یک متر مکعب و دیگری گرمای گرفته شده از هوا برای تبخیر آب. در این جا از روش دوم استفاده می‌شود.

$$q_c = \frac{۵}{۲}\frac{n_{air}}{V}R(T-T_c) \quad (۱۹)$$

$$= \frac{۵}{۲}\frac{p}{RT_c}R(T-T_c) \quad (۲۰)$$

$$= \frac{۵p}{۲}(\frac{T}{T_c}-۱) \quad (۲۱)$$

$$= ۱۳\frac{kJ}{m^۳} \quad (۲۲)$$

کارایی کولر هم از نسبت گرمای گرفته شده آن در واحد زمان به توان آن است. یعنی

$$\eta = \frac{\dot{Q}_c}{\dot{W}} \quad (۲۳)$$
$$= \frac{۱۳}{۰/۲} \quad (۲۴)$$
$$= ۶۵ \quad (۲۵)$$

(ز) با فرض کارنو بودن کولر گازی می‌دانیم

$$\dot{Q}_c = \frac{T_c}{T_H - T_c}\dot{W} \quad (۲۶)$$

با جایگذاری خواهیم داشت $\dot{W} = ۶۸۴ watt$. به همین دلیل است که می‌گویند کولر آبی در مناطق خشک از نظر اقتصادی با صرفه‌تر است.

۲.(الف) اگر r نرخ برخورد مولکول‌ها با این قسمت دیواره باشد، فشار وارد برا دیواره به صورت $p = \frac{r\Delta P_x}{A_۰}$ است که $\Delta P_x = ۲mv_x$ متوسط تغییر تکانه حاصل از برخور مولکول‌ها است. بنابر این نرخ مولکول‌های به صورت زیر می‌شود:

$$r = \frac{pA_۰}{۲mv_x} \quad (۲۷)$$

(ب)

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{A_۰}{۲V}\sqrt{\frac{kT}{m}}N \quad (۲۸)$$

(ج)

$$N = N_۰ exp\left(-\frac{A_۰}{۲V}\sqrt{\frac{kT}{m}}t\right) \quad (۲۹)$$

۳.(الف) یک رابطه بازگشتی برای جابجایی می‌توان به دست آورد:

$$\langle X_N \rangle = \langle X_{N-۱} + \Delta X \rangle \quad (۳۰)$$
$$= \langle X_{N-۱} \rangle + \langle \Delta X \rangle \quad (۳۱)$$
$$= \langle X_{N-۱} \rangle + \frac{۱}{۲}l_r - \frac{۱}{۲}l_l \quad (۳۲)$$

بر اساس این رابطه بازگشتی

$$\langle X_N \rangle = \frac{N}{۲}\left(l_r - l_l\right) \quad (۳۳)$$

(ب) مانند قسمت قبل، یک رابطه بازگشتی به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \left\langle X_i^۲\right\rangle &= \left\langle\left(X_{i-۱}+\Delta X\right)^۲\right\rangle && (۳۴)\\ &= \left\langle X_{i-۱}^۲+۲X_{i-۱}\Delta X+\Delta X^۲\right\rangle && (۳۵)\\ &= \left\langle X_{i-۱}^۲\right\rangle+۲\left\langle X_{i-۱}\right\rangle\left\langle\Delta X\right\rangle+\left\langle\Delta X^۲\right\rangle && (۳۶)\\ &= \left\langle X_{i-۱}^۲\right\rangle+\frac{i-۱}{۲}\left(l_r-l_l\right)^۲+\frac{۱}{۲}l_r^۲+\frac{۱}{۲}l_l^۲ && (۳۷) \end{aligned}$$

بنابر این داریم:

$$\left\langle X_N^۲\right\rangle=\sum_{i=۱}^{N}\frac{i-۱}{۲}\left(l_r-l_l\right)^۲+\frac{۱}{۲}l_r^۲+\frac{۱}{۲}l_l^۲ \qquad (۳۸)$$

و با گرفتن جمع خواهیم داشت:

$$\left\langle X_N^۲\right\rangle=\frac{N}{۲}\left[\frac{(N-۱)}{۲}\left(l_r-l_l\right)^۲+l_r^۲+l_l^۲\right] \qquad (۳۹)$$

انحراف معیار هم به راحتی قابل محاسبه خواهد بود:

$$\sigma^۲=\left\langle X_N^۲\right\rangle-\left\langle X_N\right\rangle^۲=\frac{N}{۲}\left[-\frac{\left(l_r-l_l\right)^۲}{۲}+l_r^۲+l_l^۲\right]=\frac{N}{۴}\left(l_r+l_l\right)^۲ \qquad (۴۰)$$

(ج) طبق قضیه حد مرکزی توزیع جابجایی ولگشت به صورت گاوسی است و چون انحراف معیار و میانگین را داریم می‌توانیم این توزیع را بنویسیم

$$P(X_N=x)=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{N\pi}\left(l_r+l_l\right)}exp\left(-\frac{۲\left(x-\frac{N}{۲}\left(l_r-l_l\right)\right)^۲}{N\left(l_r+l_l\right)^۲}\right) \qquad (۴۱)$$