ترمودینامیک و مکانیک آماری
امتحان پایان ترم

۲۶ خردادماه ۱۳۸۹

وقت امتحان: ۲ ساعت و ۱۵ دقیقه

نام و نام خانوادگی: شماره‌ی دانشجویی:

۱. **کولر آبی** در این مساله می‌خواهیم با استفاده از ترمودینامیک تعادل کارایی یک کولر آبی را به دست بیاوریم (شکل ۱). کولر آبی، جعبه‌ای است که سه وجه آن توسط پوشال پوشانده شده است و وجه چهارم آن به کانالی وصل است که به محیط داخل یک ساختمان وصل است. پوشال‌های کولر طی یک فرآیند ساده همیشه خیس نگه داشته می‌شوند. موتور این کولر پره‌هایی را می‌چرخاند تا هوا را از بیرون با گذرندان از پوشال‌های خیس به داخل ساختمان هدایت کند. رد شدن هوا از پوشال‌های خیس باعث خنک شدن هوا می‌شود. برای بررسی این وسیله مراحل زیر را انجام دهید.

(الف) فرض کنید که همه چیز داخل کولر در حال تعادل است (موتور خاموش است و هیچ جریان هوایی وجود ندارد). فشار داخل کولر ۱ اتمسفر است. همانطور که می‌دانید اگر بخار آبی در این محیط وجود داشته باشد انرژی آزاد گیبس آن به صورت زیر است:

$$g_g\left(T,p,C_g\right)=g_{\circ g}\left(T,p\right)+\frac{RT}{M_g}ln\left(C_g\right) \qquad (۱)$$

که در آن $p=۱atm$ فشار سیستم، T دمای سیستم، M_g جرم مولی مولکول‌های بخار و C_g نسبت تعداد مولکول‌های بخار به تعداد کل مولکول‌های گاز موجود در سیستم است. $g_{\circ g}\left(T,p\right)$ هم انرژی آزاد گیبس ویژه گاز خالصی است که در دما و فشار معین قرار دارد. حالت تعادل جایی است که انرژی آزاد گیبس ویژه آب با بخار درون هوای مرطوب برابر شود. یعنی

$$g_g\left(T_c,p,C_g\right)=g_l\left(T_c,p\right) \qquad (۲)$$

که دمای سیستم را دمای سردتر داخل کولر T_c گرفتیم. این تساوی را اعمال کنید تا به رابطه‌ای برای $ln\left(C_g\right)$ برسید.

شکل ۱: نمای داخل یک کولر آبی

(ب) برای حل این مساله نیاز داریم مقدار $g_l(T_c,p) - g_{\circ g}(T_c,p)$ را در دما و فشار مورد نظر (۱ اتمسفر) پیدا کنیم. برای این کار باید انتگرال زیر را گرفت:

$$g_l(T_c,p) - g_{\circ g}(T_c,p) = g_l(T_\circ,p) - g_{\circ g}(T_\circ,p) + \int_{T_\circ}^{T_c}\left[\left(\frac{\partial g_l}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial g_{\circ g}}{\partial T}\right)_p\right]dT \quad (۳)$$

از طرفی می‌دانیم آب در فشار یک اتمسفر در $T_\circ = ۳۷۳K$ می‌جوشد! یعنی در این دما و فشار آب و بخار خالصش در همزیستی هستند. پس انرژی آزاد گیبس ویژه این دو حالت برابر است. بنابر این می‌توان گفت که $g_l(T_\circ,p) - g_{\circ g}(T_\circ,p) = ۰$ و در نتیجه معادله ۳ به صورت

$$g_l(T_c,p) - g_{\circ g}(T_c,p) = \int_{T_\circ}^{T}\left[\left(\frac{\partial g_l}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial g_{\circ g}}{\partial T}\right)_p\right]dT \quad (۴)$$

در می‌آید. برای گرفتن این انتگرال ابتدا ببینید $\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p$ چه کمیتی است و سپس با فرض ثابت بودن ظرفیت‌گرمایی ویژه حالت گاز و مایع این کمیت را بر حسب دما پیدا کرده و با استفاده از آن حاصل انتگرال بالا را که برابر با $g_l(T_c,p) - g_{\circ g}(T_c,p)$ است را پیدا کنید.

(ج) با استفاده از چیزی که از قسمت (۱الف) و (۱ب) به دست آورده‌اید به عبارتی برای C_g (نسبت مولکول‌های بخار آب به تمام مولکول‌های گازی) برسید.

(د) برای حل مساله باید دو معادله که یکی از آن‌ها غیر خطی است را حل کنید. این کار راحتی نیست لذا به عنوان یک اطلاعات اضافی مقدار دمای داخل کولر را $T_c = ۲۸۵K$ بگیرید (دمای بیرون $T = ۳۰۰K$ است). با توجه به این موضوع مقدار عددی C_g را به دست آورید ($M_{H_۲O} = ۱۸\frac{gr}{mol}$ ، $p = ۱۰^۵pa$ ، $R = ۸/۳\frac{J}{Kmol}$ ، گرمای نهان تبخیر آب در فشار ۱ اتمسفر و دمای $۳۷۳K$: $L_\circ = ۲/۲ \times ۱۰^۶\frac{J}{kg}$ ، ظرفیت گرمای ویژه بخار آب $c_{steam} = ۲۰۰۰\frac{J}{Kkg}$ و ظرفیت گرمای ویژه آب $c_l = ۴۲۰۰\frac{J}{Kkg}$)

(ه) اکنون می‌خواهیم ببینیم دمای فرض شده برای T_C صحیح بوده است یا نه. اگر فرض کنیم مقدار غلظت بخار هوای بیرون ۴۰ درصد بخار به اشباع رسیده داخل کولر است، با استفاده از مقدار گرمای گرفته شده برای به اشباع رسیدن هوای داخل کولر، مقدار سرد شدن هوا و T_C را با استفاده از C_g که آن را به دست آورده‌اید پیدا کنید. هوا را گاز ایده‌آلی بامولکول‌های دو اتمی ($C_V = \frac{۵}{۲}nR$) در نظر بگیرید.

(و) پوشال‌های خیس این کمک را می‌کنند که هوای خشکی که از بیرون می‌آید سریعا به حالت اشباع می‌رسد و در نتیجه با وجود روشن بودن موتور و وجود جریان هوا می‌توان باز هم فرض کرد که بخار آب داخل کولر به صورت کامل و تعادلی به اشباع رسیده است. شما می‌توانید گرمای گرفته شده توسط یک متر مکعب هوای داخل کولر را پیدا کنید. کولر ۳۰۰۰ دارای موتوری با توان ۲۰۰ وات است و می‌تواند ۱ متر مکعب هوا در ثانیه وارد ساختمان کند. ابتدا توان سرمایش (گرمای گرفته شده در واحد زمان) را محاسبه کرده و سپس کارایی کولر را به دست بیاورید (کارایی کولر برابر گرمای گرفته شده توسط آن تقسیم بر کار لازم برای گرفتن این گرما است).

(ز) اگر یک کولر گازی (یخچال کارنو) بین دمای سرد (T_C) و دمای بیرون به میزان کولر آبی ۳۰۰۰ گرما بگیرد، کولر گازی چه توانی باید داشته باشد؟

۲. **نشت گاز** اگر حفره‌ای روی یک مخزن گاز (گاز ایده‌آل) ایجاد کنید، گاز بیرون خواهد آمد. در این مساله قرار است شما تقریبی از نرخ بیرون آمدن گاز بزنید.

(الف) قسمت کوچکی با سطح A از دیواره‌ی داخلی مخزن در نظر بگیرید. تعداد مولکول‌هایی که در بازه‌ی زمانی Δt بااین سطح برخورد می‌کنند را بر حسب p فشار، m جرم مولکول‌ها و $\overline{v_x}$ سرعت متوسط مولکول‌های برخورد کننده با دیواره در راستای x (راستای عمود بر دیوار) پیدا کنید.

(ب) محاسبه $\overline{v_x}$ کار راحتی نیست، اما با تقریب خوبی می‌توان آن را با $\sqrt{\overline{v_x^2}}$ یکی گرفت. مقدار $\sqrt{\overline{v_x^2}}$ را به دست آورید و با استفاده از آن نرخ مولکول‌های برخورد کننده را به صورتی بازنویسی کنید که فشار در آن حضور نداشته باشد.

(ج) حال اگر ما این قسمت دیوار را که در بخش‌های قبل مساله در نظر گرفته بودیم برداریم، مولکول‌هایی که به دیواره می‌خوردند از این حفره بیرون می‌روند. با فرض این که چیزی وارد حفره نشود، تغییرات تعداد مولکوهای داخل مخزن در هر لحظه را پیدا کنید و با استفاده از آن تعداد ذرات درون جعبه را در هر لحظه پیدا کنید (فرض کنید ابتدا داخل ظرف N_0 تا مولکول وجود داشته است).

۳. **ولگشت نامتقارن** ولگشتی یک بعدی در نظر بگیرید که در هر قدم با احتمال $\frac{1}{2}$ به سمت راست و با احتمال $\frac{1}{2}$ به سمت چپ حرکت می‌کند. اما طول گام‌های ولگشت نا همسانگرد است یعنی طول گام‌های به سمت راست آن با طول گام‌های به سمت چپ آن متفاوت است. فرض کنید طول قدم‌های سمت راست این ولگرد l_r باشد و طول قدم‌های سمت چپ آن l_l باشد. در ابتدا این ولگرد در مبدا قرار دارد و شروع به حرکت می‌کند.

(الف) متوسط جابجایی این ولگشت را پس از N قدم حساب کنید.

(ب) انحراف از معیار جابجایی این ولگشت را پس از N قدم حساب کنید.

(ج) با توجه به این که N زیاد است می‌توان از قضیه حد مرکزی استفاده کرد. تابع توزیع مکان ولگشت را بعد از N گام پیدا کنید.

موفق باشید
اجتهادی