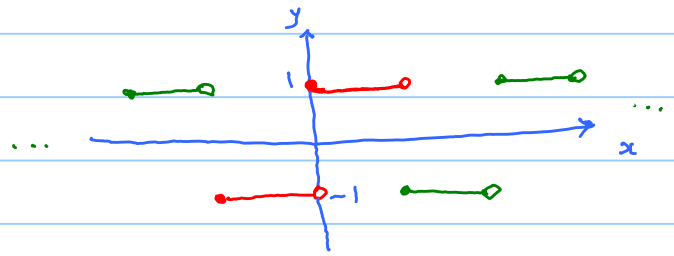
به نام خدا

مطالب تکمیلی مطرح شده در کلاس ریاضی مهندسی ۱ - عیوض ضحری - دانشگاه صنعتی شریف

مثال ۱: مطلوبست محاسبه سری فوریه تابع متناوب زیر: کد مربوطه: ex_01.m

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\leq x<0\\ 1 & 0\leq x<\pi\end{cases},\quad f(x+2\pi)=f(x)$$

دوره تناوب $T=2p=2\pi \Rightarrow p=\pi$



$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\pi}+b_n\sin nx\right)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{-\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}+\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}\right)=0\qquad (n=1,2,\dots)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\,dx=0\qquad (n=0)$$

$\Rightarrow a_n=0 \rightarrow$ به علت فرد بودن تابع f قابل انتظار بود

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}(1)\sin nx\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{0}-\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{0}^{\pi}\right]=$$

$$\frac{1}{n\pi}\Big(1-\underbrace{\cos(-n\pi)}_{(-1)^n}-\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}+1\Big)\Rightarrow$$

$$b_n=\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}\frac{4}{n\pi} & (n \text{ فرد})\\ 0 & (n \text{ زوج})\end{cases}$$

به علت ناپیوستگی f، n در مخرج با توان ۱ (هم) ظاهر شد

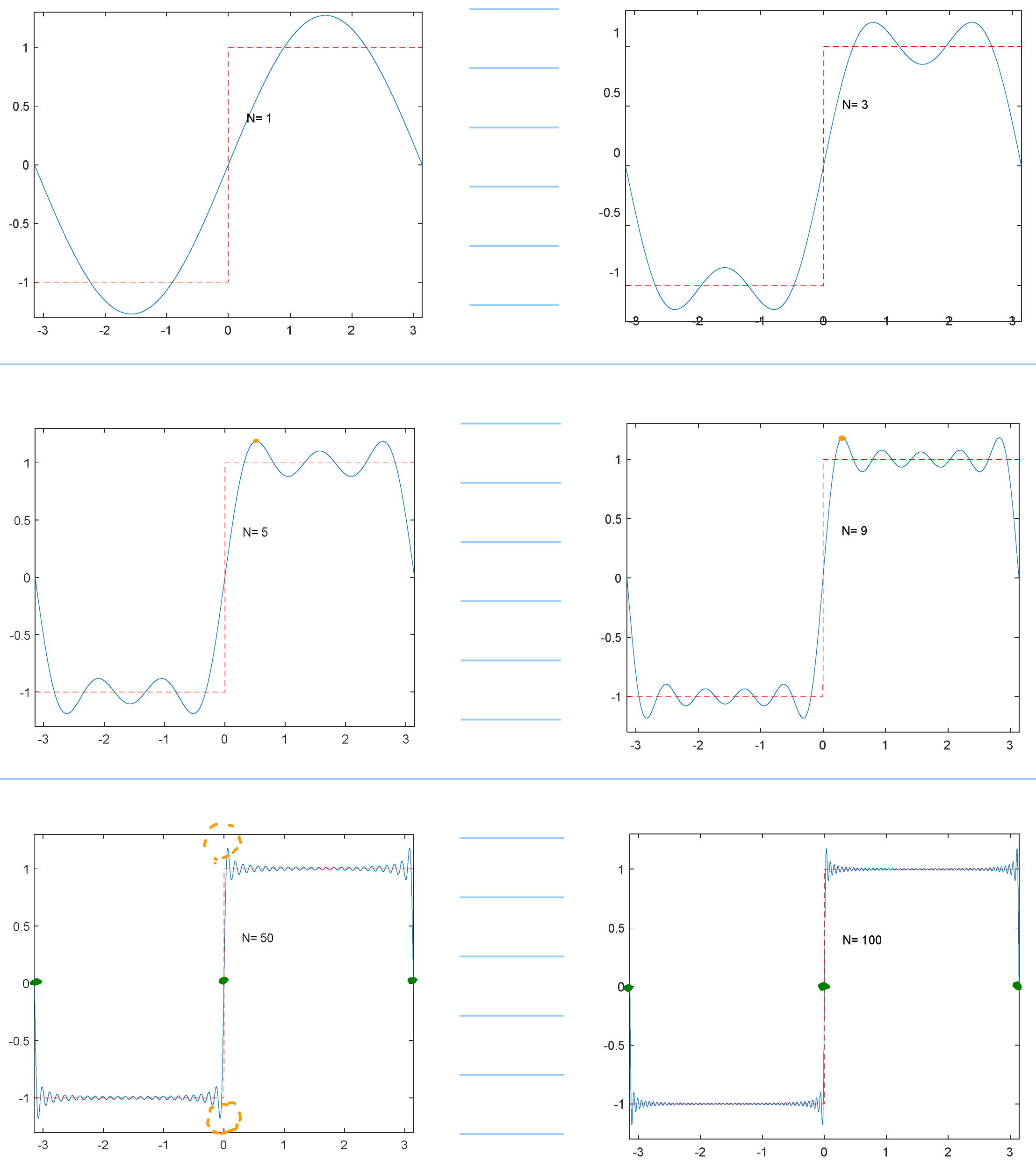
$$\rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx$$

هم‌چنان پیوسته به جز $x=k\pi$ (به صورت خاص $x=0$)

* توجه: با افزایش n، جملات دنباله a_n و b_n به سمت صفر میل می‌کنند $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0\right)$

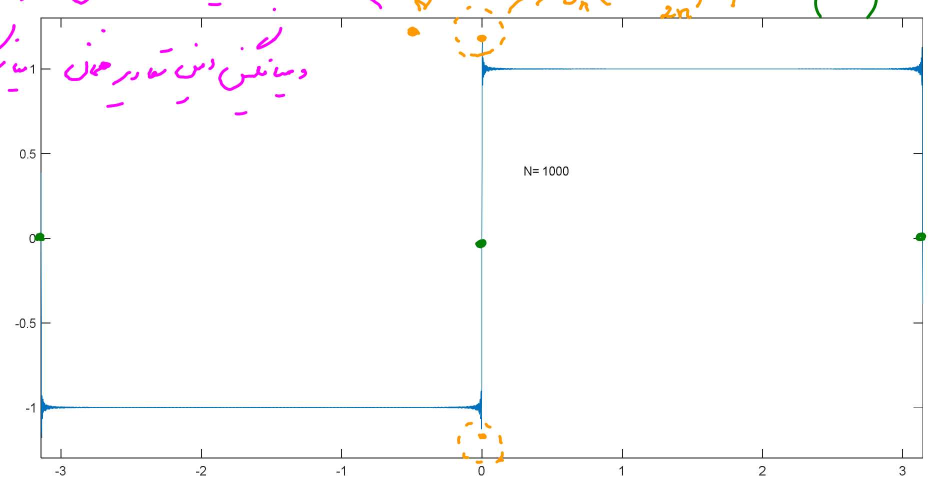
نتیجه اخلاقی: در تقریب زدن هایی با تعداد محدود جمله از سری فوریه، محاسبه صحیح جملات اول بسیار مهم‌اند!

عکس‌هایی از تقریب تابع f برای N جمله محدود از سری فوریه در ادامه آورده شده است.



خوشبختانه میزان واجهش و فروجهش در 0^+ و 0^- باهم برابر است و میانگین این دو در همان نقطه برابر با $\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}$ می‌شود.

$\to S_n(x=\frac{\pi}{2n}) \neq 1$ (:-)



توجه 2 : بررسی همگرایی نقطه‌ای در سری‌های فوریه: اگر f متناوب (با دوره تناوب $2p$) و قطعه‌قطعه پیوسته باشد، در هر نقطه‌ای که هر دو مشتق یک طرفه $f'_L(x_0)$ (چپ) و $f'_R(x_0)$ (راست) موجود باشند، سری فوریه تابع f در آن نقطه به میانگین حد چپ و راست تابع همگراست.

← در مثال ۱، سری فوریه در نقاط ناپیوستگی $x=k\pi$ (مثل $x=0$)، مقدار صفر (میانگین حد چپ و راست f در آن نقاط) را به خود می‌گیرد و در سایر نقاط با $f(x)$ برابر است.

توجه 3 : بررسی همگرایی یکنواخت در سری‌های فوریه: یک سری فوریه همگرای یکنواخت است هرگاه میزان خطای $r_n=\max\limits_{x_1\le x\le x_2}\left|f(x)-S_n(x)\right|$ وقتی $n\to\infty$ میرود، به صفر میل کند ← این شرط معادل این است

جمع n جمله اول سری فوریه

که به ازای هر $\varepsilon>0$، عدد صحیح N_ε مستقل از x وجود داشته باشد که برای هر $x_1\le x\le x_2$ و $n>N_\varepsilon$، $\left|f(x)-S_n\right|<\varepsilon$ باشد. (همگرایی به مراتب قوی‌تر از همگرایی نقطه‌ای !)

← تضمین: اگر f پیوسته و متناوب ($T=2p$) و $f(p)=f(-p)$ و مشتق آن قطعه به قطعه پیوسته باشد، آنگاه سری فوریه به طور یکنواخت به f همگراست ← کمترین توان n در مخرج a_n و b_n، ≥ 2 خواهد بود (که برخلاف مثال ۱ که به علت ناپیوستگی شرایط همگرایی یکنواخت مشاهده نشد).

توجه 4 : اگر x_0 نقطه ناپیوستگی f و $S_n(x)$ مجموع جزئی n جمله اول سری باشد، رفتار اختلاف $S_n(x)$ با $f(x)$ در همسایگی x_0 به پدیده گیبس معروف است ($\lim\limits_{x\to x_0^+}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{p}+b_n\sin\frac{n\pi x}{p}\right)\neq f(x_0^+)$)

از راست نقطه ناپیوستگی

← نتیجه اخلاقی عملی: در تقریب یک تابع با جملات سری فوریه حوالی نقاط ناپیوستگی f، کاملاً احتیاط کنید.

توجه 5 : سری فوریه و طیف تابع + استخراج یک مفهوم از تساوی پارسیوال

می‌دانیم : $a\cos x + b\sin x = c\sin(x+\phi)$ ، $c \to \sqrt{a^2+b^2}$ ، $\phi \to tg^{-1}\frac{a}{b}$

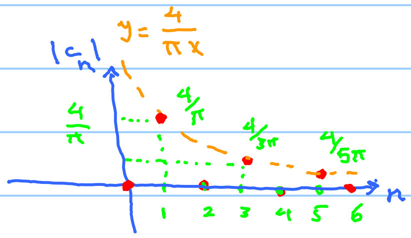
اثبات : $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\phi}\cos x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\phi}\sin x\right)$ $\Leftarrow \phi = tg^{-1}\frac{a}{b}$

$= \sqrt{a^2+b^2}\,(\sin x\cos\phi + \cos x\sin\phi) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\phi)$

$\Rightarrow$ بیان دیگری از سری فوریه $f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p} + \phi_n\right)$ ، $c_n \to \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ ، t : زمان

که در آن ، $c_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ اندازه یا بزرگی تابع f در فرکانس مربوط به n را نشان می‌دهد.

که در مثال ۱ ، $c_n = |b_n| = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & (n \text{ فرد}) \\ 0 & (n \text{ زوج}) \end{cases}$ بود :



- در مباحث مربوط به سیگنال‌های زمانی ($f = y(t)$) ، $\int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt$ نمادی از انرژی کل سیگنال پیوسته در زمان در بازه زمانی t_1 تا t_2 است.

حال اگر در تساوی پارسیوال به جای $g(t)$ ، همان $f(t)$ را قرار دهیم خواهیم داشت :

$$\underbrace{\frac{1}{T/2}\int_T |f(t)|^2 dt}_{} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2}_{}$$

$T/2 \to p$ (تمام یا نصف دوره تناوب سیگنال زمانی)

$c_n \to$ بزرگی تابع f در فرکانس‌های مختلف

(البته در مورد سری فوریه مختلط همین فرمول $\to \sum c_k^2$ با محدوده k از منفی بی‌نهایت تا بی‌نهایت بیان می‌شود + ضریب پشت انتگرال $\frac{1}{T}$ خواهد بود)

توان متوسط یا انرژی بر واحد زمان (یک دوره تناوب سیگنال) = مجموع توان متوسط تمام هارمونیک‌های آن تابع

$\Leftarrow$ (مفهومی از حفظ تعادل انرژی !)

- فضای برداری (← تعمیم به توابع)

مثال: فضای برداری محدود (مثل R^2) یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی است و متناظر با صفحه دو بعدی است

- تعریف ضرب داخلی در این فضا:

$$\begin{cases} u=(u_1,u_2) \\ v=(v_1,v_2) \end{cases} \Rightarrow u\cdot v = \langle u,v\rangle = u_1v_1+u_2v_2$$

ضرب داخلی ذکر شده دارای چهار خاصیت اساسی است:

1) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

2) $\langle a u_1 + b u_2, v\rangle = a\langle u_1,v\rangle + b\langle u_2,v\rangle$

3) $\langle u,u\rangle \geq 0$

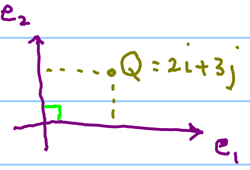
4) if $\langle u,u\rangle = 0 \Rightarrow u=0$

- اگر $\langle u,v\rangle = 0 \Longleftarrow u, v$ متعامدند

اندازه u: $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$

مثالی از پایه‌های متعامد برای این فضای برداری که با آن می‌توان تمام نقاط درون صفحه را ساخت: $\{(1,0),(0,1)\}$

مثال: $Q = 2i+3j$



معادل بردارها

مثال: فضای برداری تمام توابع از بازه $[-p,p]$ به اعداد حقیقی یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی است.

- مشابهاً اجازه دهید تعریف کنیم:

$$\begin{cases} f=f(x) \\ g=g(x) \end{cases} \longrightarrow \text{ضرب داخلی } f \text{ و } g = \langle f,g\rangle = \int_{-p}^{p} f\cdot g\, dx$$

- یک ضرب داخلی تعریف شده فوق نیز دارای همان چهار خاصیت است که:

1) $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$

2) $\langle a f_1 + b f_2, g\rangle = a\langle f_1,g\rangle + b\langle f_2,g\rangle$

3) $\langle f,f\rangle \geq 0$

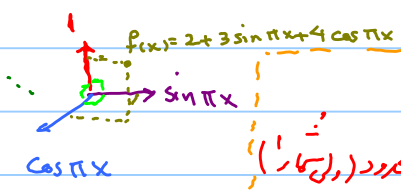
4) if $\langle f,f\rangle = 0 \Rightarrow f(x)=0$

اگر $\langle f,g\rangle = 0$ گوییم f و g متعامدند.

نرم f: $\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$

مثالی از پایه‌های متعامد برای این فضای برداری که می‌توان با آن تمام توابع متناوب قطعه‌قطعه پیوسته در بازه $(-\pi,\pi)$ را ساخت:

$$\{1, \sin\pi x, \cos\pi x, \sin 2\pi x, \cos 2\pi x, \dots\}$$



تفاوت اساسی:

تعداد پایه‌های محدود vs. تعداد پایه‌های نامحدود (بی‌شمار)

- جهت گسترش نقاط به ابعاد بالاتر (نظیر سه بعد) به پایه‌های دیگری نیاز است.

- جهت دستیابی به نقاط روی یک خط (نظیر محور xها)، از تعداد کمتری پایه می‌توان استفاده کرد ($\{(1,0)\}$)

- انتخاب پایه‌های متعامد فقط محدود به پایه‌های معرفی شده نیست و مثلاً با دوران محورها می‌توان پایه‌های متعامد دیگری ساخت

به عبارتی بی‌نهایت انتخاب برای مجموعه پایه‌های متعامد موجود است.

- جهت گسترش توابع قابل ساخت متنوع‌تر (نظیر توابع غیر متناوب) به پایه‌های دیگر نیاز است.

- جهت دستیابی به توابع با قیدهای بیشتر (نظیر توابع متناوب قطعه به قطعه فرد) از تعداد کمتری پایه می‌توان استفاده کرد ($\{\sin \pi x, \sin 2\pi x, \ldots\}$)

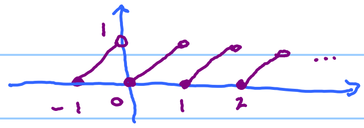
- انتخاب پایه‌های متعامد جهت ساخت توابع متناوب محدود به مجموعه پایه‌های معرفی شده نیست و در بحث مسائل اشتورم-لیوویل با تنوع آن‌ها آشنا خواهید شد.

- مثال 2) هدف یافتن سری فوریه برای تابع $f(x)=x$ در بازه $[0,1]$ است. چند انتخاب وجود دارد؟

بی‌شمار تابع (= سری فوریه) وجود دارند که در بازه $[0,1]$ تابع مورد نظر ما را داشته باشند اگرچه در خارج بازه مدنظر هیچ لزومی به شباهت به یکدیگر نداشته باشند. سه حالت متفاوت زیر را ببینید:

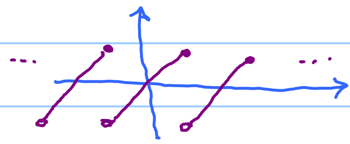
$\boxed{\text{ex\_02.m}}$ کد مربوطه

1) $f_1(x)=x \quad 0\le x\le 1 \quad , \quad f_1(x+1)=f(x) \;,\; p=\frac{1}{2}$



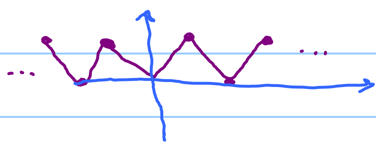
2) $f_2(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ x & -1\le x<0 \end{cases} \quad , \quad f_2(x+2)=f(x) \;,\; p=1$

بسط فرد



3) $f_3(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ -x & -1\le x<0 \end{cases} \quad , \quad f_3(x+2)=f(x) \;,\; p=1$

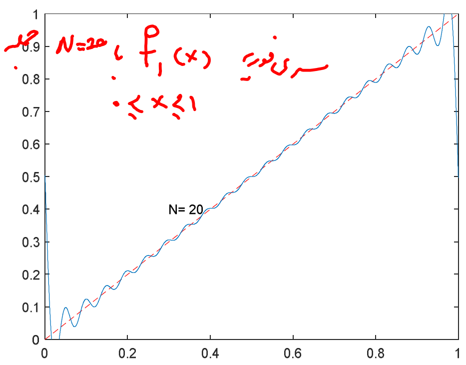
بسط زوج

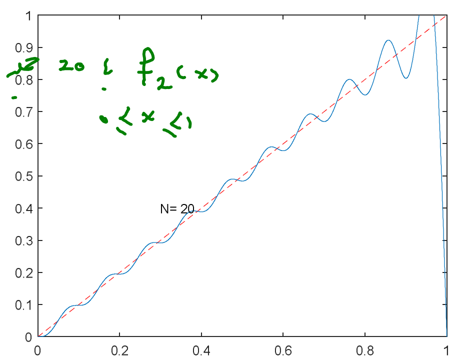


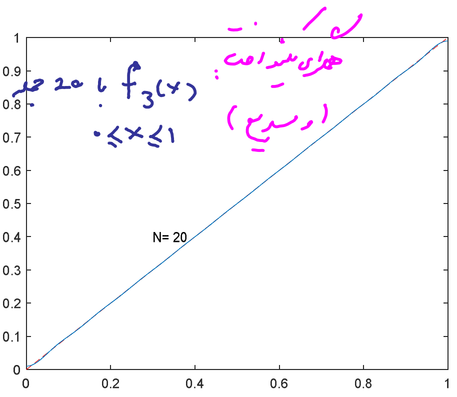
$$f_1(x)=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi x)$$ (حاوی a_n و b_n بصورت توأمان)

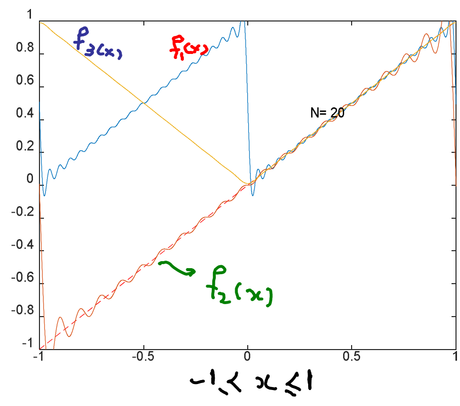
$$f_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi x)$$ (فقط حاوی جملات سینوسی)

$$f_3(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)\cos(n\pi x)$$ (فقط حاوی جملات کسینوسی)









مثال ۳) مطلوبست محاسبه سری فوریه مختلط تابع $f(x)=e^{x}$ برای $|x|<\pi$ ، $f(x+2\pi)=f(x)$. $(p=\pi)$

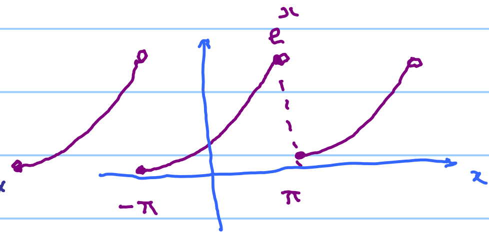
$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\,e^{\overset{+}{-}inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{x}\cdot e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(1-in)x}\,dx$$

می‌توان با توان + هم محاسبه کرد اما در بخش تشکیل سری از e^{-inx} بهره برد

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{1-in}}{1-in}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-in}\right)\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)\underbrace{e^{in\pi}}_{(-1)^n}$$

$$=\frac{(-1)^n(1+in)}{(1+n^2)\pi}\sinh\pi$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(1+in)}{(1+n^2)\pi}\sinh\pi\right)e^{\overset{+}{-}inx}$$



$$f\simeq\sum_{n=-N}^{N}c_n e^{inx}:$$

کد مربوطه ex_03.m