به نام خدا

جلسه پنجم، ششم، هفتم

فصل سوم - تعادل (Equilibrium)

سرفصل مطالب : - تعریف تعادل

- مراحل بررسی تعادل

- معادلات تعادل

- پدیده‌های فیزیکی عمدتاً پویا (Dynamics) و متغیر با زمان هستند. این پدیده‌ها معمولاً، معادلات دیفرانسیل PDE یا ODE حل می‌شوند؛ با حل این معادلات، رفتار سیستم مورد نظر تخمین زده می‌شود.

* تعادل در معنای عمومی :

- منظور از تعادل چیست ؟

بسیاری از تعادل‌ها غیر متغیر با زمان را تعادل و یا تعادل حالت پایا (steady state) گویند

در حالت تعادل مشتقات زمانی ($\frac{d}{dt}$) هر چیز صورت.

- چند مثال از سیستم‌های دینامیکی :

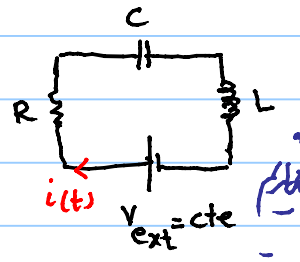
۱) سیستم مکانیکی :

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mg$

تعادل : $\dot{x} = 0,\ \ddot{x} = 0 \rightarrow x = \frac{mg}{k}$

x (تغییر شده از طول آزاد فنر)

2) مدار الکتریکی:



$$V_{ext} - Ri - \frac{1}{C}\int i\,dt - L\frac{di}{dt} = 0$$

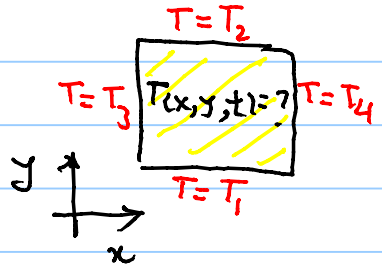
مشتق‌گیری

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$$

حل تعادلی در حالت تعادل را (ساده‌ترین حالت) $i = 0$ در نظر بگیرید:

حل: $\frac{di}{dt} = \frac{d^2i}{dt^2} = 0 \Rightarrow i = 0$

3) انتقال حرارت:

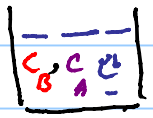


پارامتر بدون بعد

$$\frac{\partial T}{\partial t} - c\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = 0$$

حل $\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ → معادله‌ی لاپلاس

4) واکنش شیمیایی:



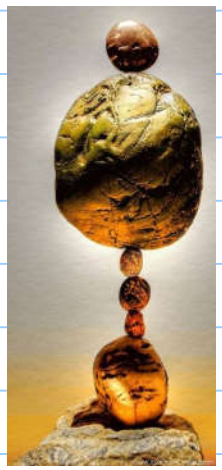
$A \underset{k_2 \text{ ثابت}}{\overset{k_1 \text{ ثابت}}{\rightleftharpoons}} B$

$$V\frac{dC_B}{dt} = -k_1 C_A V + k_2 C_B V$$

حل: $\frac{d}{dt}C_B = 0 \rightarrow -k_1 C_A V + k_2 C_B V = 0 \rightarrow$ "حالت تعادل در دانش"

و آن ...

تعادل به معنای ایستایی:



- استاتیک در درجه اول، شرایط لازم برای حفظ و باقی ماندن اجسام (سازه‌های مهندسی و...) در حال تعادل (به صورت خاص سکون) سروکار دارد.

* طبق قانون اول نیوتن، اگر برایند نیروها و گشتاورهای وارد بر جسم در حال سکون باشد، جسم ساکن باقی می‌ماند.

* تعادل از دیدگاه قانون دوم: می‌دانیم معادلات حرکت نیوتن - اویلر برای یک جسم صلب بدین شکل است:

$$\sum \vec{F}_i = m\ddot{\vec{r}}_G$$

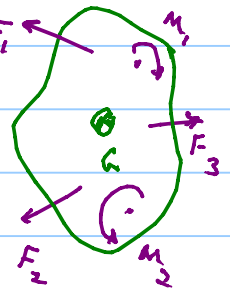
$$\sum \vec{M}_G = \frac{d}{dt}(I_G \omega) \begin{cases} \text{در دوبعد}: I_{1\times1}, \omega_{1\times1} \\ \text{در سه‌بعد}: I_{3\times3}, \omega_{3\times1} \end{cases}$$

در حالت تعادل مشتق زمانی ($\frac{d}{dt}$) هم‌چنین صفر است.

تعادل: $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$

$$\sum \vec{M}_G = \sum (\vec{r}_{i/G} \times \vec{F}_i + \vec{M}_i) = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ شرط لازم و کافی برای تعادل



- برای حفظ سکون، باید سرعت اولیه اجسام و دوران جسم نیز صفر باشد.

$$\dot{r}(t=0) = \vec{0}, \quad \vec{\omega}(t=0) = \vec{0}$$

تمام اعضا و اجزای یک جسم در حال سکون، خود در تعادل هستند.

سوال: تا همیشه برای حل مسائل تعادل، باید جرم در جرم استاتیکی کرد؟ نه.

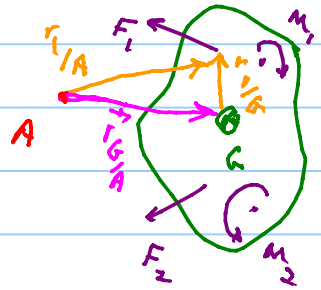
اثبات: فرض کنیم جسمی داریم در حال تعادل باشد؛ یعنی $\sum \vec{F}=\vec{0}$ و $\sum \vec{M}_G=\vec{0}$

$$\sum \vec{M}_A = \sum (r_{i/A} \times F_i + M_i) =$$

$$\sum \left((r_{G/A} + r_{i/G}) \times F_i + M_i \right) =$$

$$\sum \left(r_{G/A} \times F_i + (r_{i/G} \times F_i + M_i) \right) = r_{G/A} \times \underbrace{\sum F_i}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

$\sum M_G = \vec{0}$



* شرط لازم و کافی برای تعادل: شرط لازم و کافی برای تعادل

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow \text{tranlational equil.} \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \rightarrow \text{rotational equil.} \end{cases}$$

حول هر نقطه‌ی دلخواه

یک سوال خودمانی: در بررسی‌های ما روی اجسام (در درس)، با این برابری‌ها واقعاً صورت؟

در حقیقت خیر، چون تا حدودی که در درس گفته شد مطلق عمل صفر دارند. ولی این گفته‌ها تا حدی توجیه دارند و در بررسی‌های مهندسی برای برقراری معادلات تعادل کاملاً مفید است!

- مراحل بررسی تعادل :

۱) انتخاب جسم مورد نظر (جسم مورد نظر می تواند یک یا مجموعه ای از اجسام متصل / غیرمتصل به هم) باشد.

2) رسم شکل ساده از جسم و جدا کردن آن از محیط اطراف و نامگذاری نیروها و زاویه های وارد بر آن (رسم پرسمی آزاد (Free Body Diagram (F.B.D.)

3) نوشتن معادلات تعادل

4) حل معادلات و یافتن پاسخ ها (شامل نیروها و زاویه های مجهول یا موقعیت زاویه های تعادلی)

5) بررسی صحت جواب ها (استفاده از حس مهندسی)

- رسم پرسمی آزاد : در آن جدا کردن جسم از محیط اطراف، نیروها و زاویه های آن از محیط بر جسم وارد می شوند که عموماً شامل نیروهای ناشی از میدان ها (وزن، مغناطیسی و...)، نیروهای خارجی تماسی و نیروهای اتصالات و تکیه گاه ها هست.

- سایر این پاسخی، نحوه کار اتصالات و انواع آن را بررسی کنیم.

- عکس های مقابل از کدام است:

۷۵۰

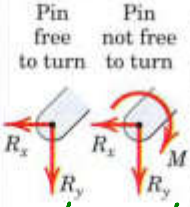
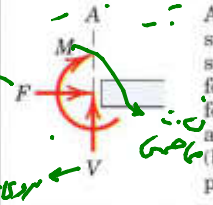
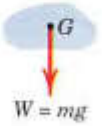
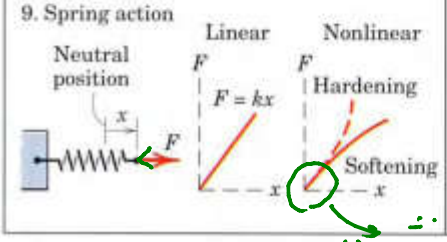
۱:

- مدل کردن نیروها و آشنایی با اتصالات در دینامیک :

MODELING THE ACTION OF FORCES IN TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS

Type of Contact and Force Origin	Action on Body to Be Isolated
1. Flexible cable, belt, chain, or rope Weight of cable negligible Weight of cable not negligible	Force exerted by a flexible cable is always a tension away from the body in the direction of the cable.
2. Smooth surfaces	Contact force is compressive and is normal to the surface.
3. Rough surfaces	Rough surfaces are capable of supporting a tangential component F (frictional force) as well as a normal component N of the resultant contact force R.
4. Roller support	Roller, rocker, or ball support transmits a compressive force normal to the supporting surface.
5. Freely sliding guide	Collar or slider free to move along smooth guides; can support force normal to guide only.

MODELING THE ACTION OF FORCES IN TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS (cont.)

Type of Contact and Force Origin	Action on Body to Be Isolated
6. Pin connection	 A freely hinged pin connection is capable of supporting a force in any direction in the plane normal to the axis; usually shown as two components R_x and R_y. A pin not free to turn may also support a couple M.
7. Built-in or fixed support	 A built-in or fixed support is capable of supporting an axial force F, a transverse force V (shear force), and a couple M (bending moment) to prevent rotation.
8. Gravitational attraction	 The resultant of gravitational attraction on all elements of a body of mass m is the weight $W = mg$ and acts toward the center of the earth through the center mass G.
9. Spring action 	Spring force is tensile if spring is stretched and compressive if compressed. For a linearly elastic spring the stiffness k is the force required to deform the spring a unit distance.

- برای رسم آزاد :

۱) جسم خود را تنها سازی کرده و از محیط اطراف کاملا جدا کنید.

۲) محورهای مختصات مناسب را انتخاب کنید.

۳) تمام نیروهای که متداول نیز هر جسم بوده است ، در شکل رسم شوند.

* راستای نیروها را دقیت انتخاب کنید. (حتی از صفر یک شخص دقیق جهت آن را بدانید!)

- یک قانون سرد تی : وقتی می خواهیم سیستم از محیط اطراف کاملا جدا شده به آزاد بت نقطه از جسم شروع کرده و روی هر محیط آن یک جسم ، نیروهای وارد بر آن را بر روی آن بکشیم!

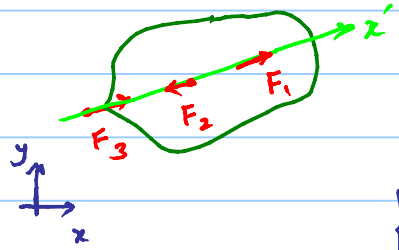
سیستم های نیروی متعادل در دو بعد :

- معادلات تعادل در دو بعد :

$$\sum F_x = 0 \,,\quad \sum F_y = 0 \,,\quad \sum M_z = 0$$

- معادله با حداکثر (!!) سه مجهول محاسبه می‌شوند ← ؟

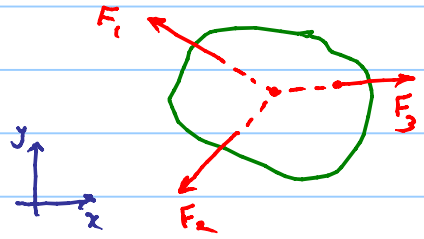
1) نیروهای هم راستا و هم خط



$$\sum F_{x'} = 0$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$ ← این ۲ معادله مستقل نیستند

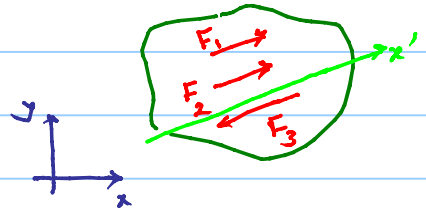
2) نیروهای متقارب



$$\sum F_x = 0 \,,\quad \sum F_y = 0$$

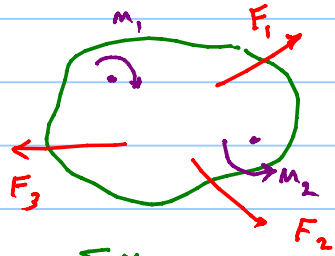
$$\sum M = 0$$ حول هر نقطه دلخواه ← در هر صورت ۲ معادله با لا، معادله جدیدی به ما نمی دهد.

3) نیروهای موازی (و غیر هم خط)



$$\begin{cases} \sum F_{x'} = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$ ← ۲ مجهول را می دهد

4) حالت کلی سیستم نیروی



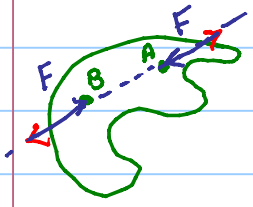
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$ ← ۳ مجهول را می دهد

$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases}$$ ← A و B و C نباید روی یک خط راست باشند

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$$ ← با AB عمود نباشد (چرا؟)

* اجسام خاص :

- جسم دو نیرویی : اجسامی که فقط 2 نیرو به آن‌ها وارد شود (حداقل سه نیرو لازم است)

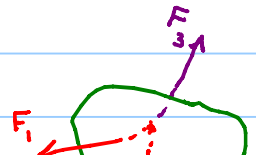


- جهت برآیند تعادل این جسم ، نیروها باید مساوی ، مخالف الجهت و هم خط و در امتداد دو نقطه اعمال نیرو باشند. (جهت نیروها مهم است در این نوع اجسام به هندسه جسم ارتباطی ندارد)

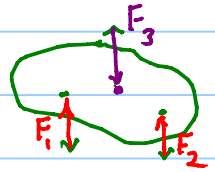
- جسم سه نیرویی : اجسامی که فقط 3 نیرو به آن‌ها وارد شود.

- جهت تعادل این جسم ، سه نیرو باید هم صفحه باشند

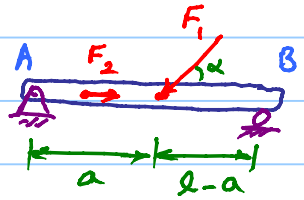
دو نیرو متقاطع باشند ← نیروی سوم هم از نقطه تقاطع دو نیرو می‌گذرد ← نیروها متلاقی‌اند



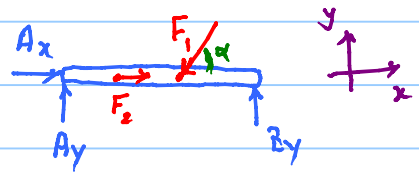
دو نیرو موازی باشند ← نیروی سوم هم با آن‌ها موازی است ← سیستم نیروی موازی



مثال - در شکل زیر ، نیروهای تکیه‌گاهی را محاسبه نمایید.



F.B.D :



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + F_2 - F_1 \cos\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = F_1 \cos\alpha - F_2}$$

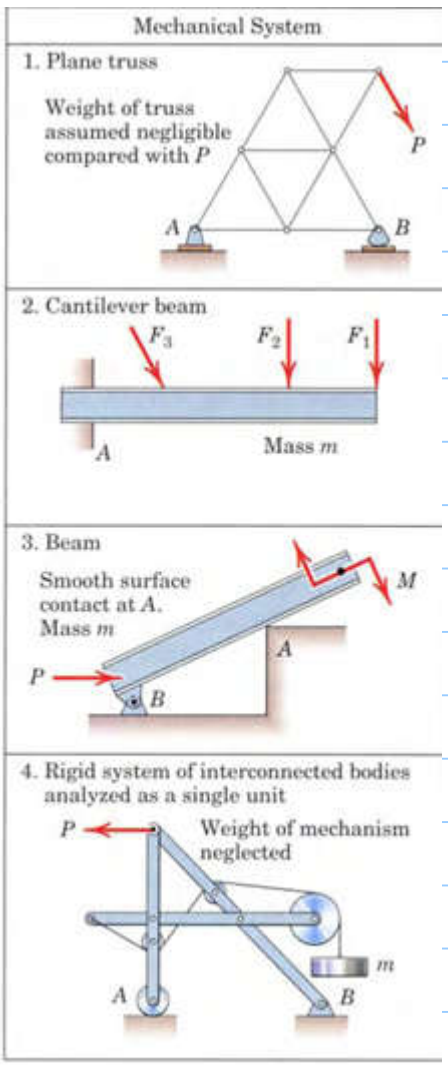
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - F_1 \sin\alpha = 0 \Rightarrow A_y + \frac{a}{l} F_1 \sin\alpha - F_1 \sin\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = \frac{l-a}{l} F_1 \sin\alpha}$$

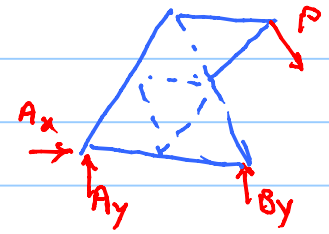
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \cdot l - (F_1 \sin\alpha)\, a = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = \frac{a}{l} F_1 \sin\alpha}$$

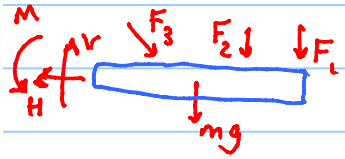
حالت حدی : $a \to 0$: $\begin{cases} A_y \to F_1 \sin\alpha \\ B_y \to 0 \end{cases}$ تمام نیروی عمودی را A_y تحمل می‌کند

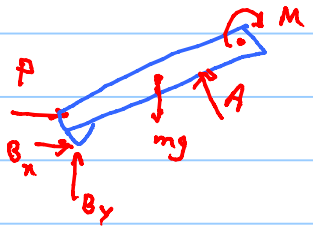
$a < \frac{l}{2} \to A_y > B_y$

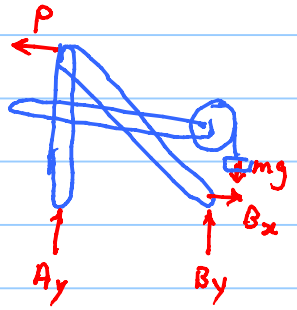
مثال - برای سیستم‌های نیروی نشان داده شده، دیاگرام آزاد (F.B.D.) را رسم نمایید.



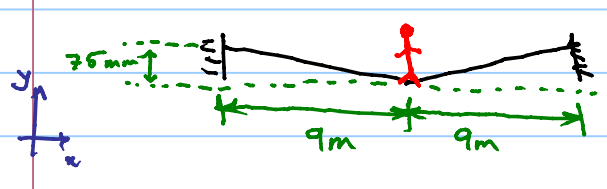


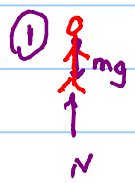


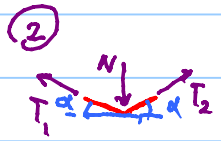




مثال - یک تندبار به جرم 50 kg، مطابق شکل روی فنری در حال تعادل است. نیروی کشش فنر چقدر است؟





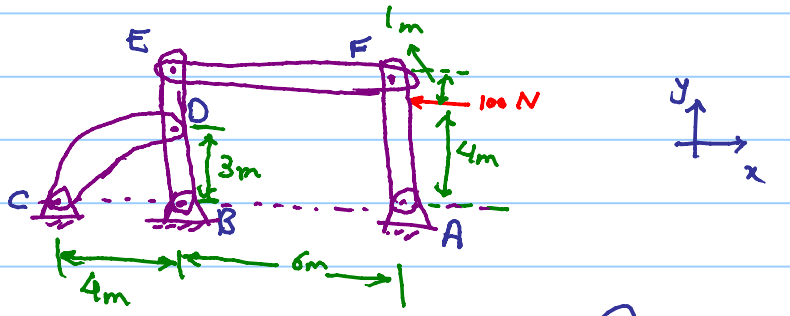


① $\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$

② $\sum F_x = 0 \rightarrow -T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\alpha = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$

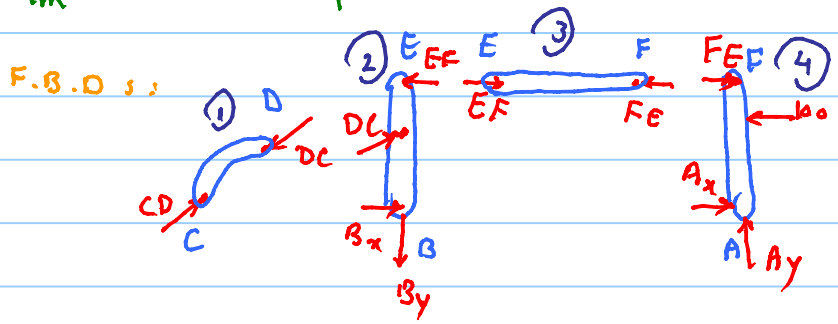
$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2T_1 \sin\alpha - N = 0 \rightarrow T_1 = \frac{mg}{2\sin\alpha} = \frac{50 \times 9.81}{2 \times \frac{0.075}{9}} \Rightarrow T_1 = 29.43\ kN$

مثال ـ در شکل زیر، نیروهای تکیه‌گاهی A، B و C را محاسبه نمایید. (اعضا صلب فرض شوند)



* اعضای CD و EF اعضای دو نیرویی هستند:

F.B.D's:



① $\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow CD = DC$ ، ③ $FE = EF$

④ $\sum F_x = 0 \Rightarrow FE + A_x - 100 = 0 \Rightarrow A_x = 100 - 80 \Rightarrow \boxed{A_x = 20\ N}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 0}$

$\sum M_A = 0 \Rightarrow FE \times 5 - 100 \times 4 = 0 \Rightarrow \boxed{FE = 80\ N}$

② $\sum M_B = 0 \Rightarrow -80 \times 5 + (DC \times \frac{4}{5}) \times 3 \Rightarrow \boxed{DC = \frac{500}{3} = 166.7\ N}$

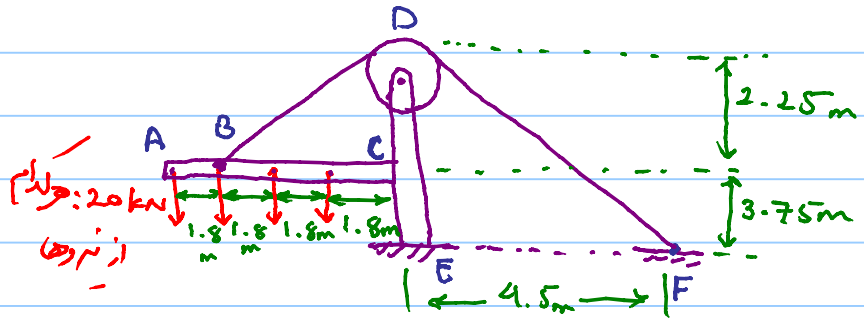
$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{500}{3} \times \frac{3}{5} - B_y = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = 100\ N}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{500}{3} \times \frac{4}{5} + B_x - 80 = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = -53.3\ N}$

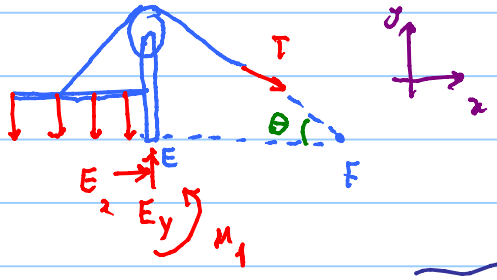
$\Rightarrow |A| = 20\ N$ ، $\begin{cases} |B| = 113.3\ N \\ \theta = -118^\circ \end{cases}$

ـ منفی شدن B_x به این معنی است که جهت نیروی رسم شده در شکل، خلاف جهت نیروی واقعی است.

مثال ـ در شکل زیر، نیروی کشش در کابل شکل داده شده 150 kN است. عکس العمل‌های تکیه‌گاهی در نقطه‌ی E را بیابید.



F.B.D :



$\cos\theta = \frac{3}{5}$ ، $\sin\theta = \frac{4}{5}$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow E_x + 150 \times \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow \boxed{E_x = -90\ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow E_y - 4\times 20 - 150 \times \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow \boxed{E_y = +200\ kN}$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow M_1 + 20\left(4\times 1.8 + 3\times 1.8 + 2\times 1.8 + 1.8\right) - \left(150 \times \frac{4}{5}\right)\times 4.5 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_1 = +180\ kN.m}$$

سؤال: ـ از حذف عضو AC، در نقطه‌ی C، چه نیروهایی به عضو ED وارد می‌شود؟

ـ دوره را به صورت مجزا بررسی کرده و نیروی وارد شده در اثر آن و همچنین نیروی وارد شده بر بدن از طرف کابل را محاسبه کنید.

سیستم‌های سه‌بعدی متعادل در سه بعد :

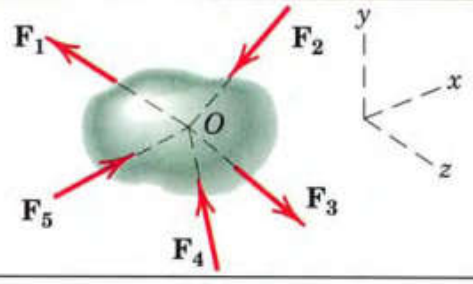
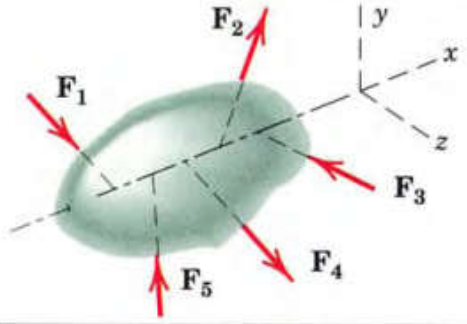
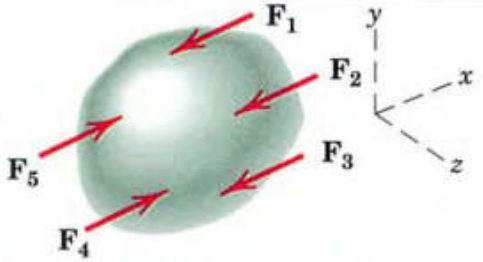
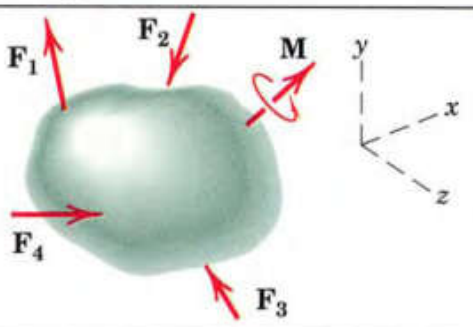
- معادلات تعادل در سه بعد :

$$\Sigma F_x = 0,\ \Sigma F_y = 0,\ \Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0,\ \Sigma M_y = 0,\ \Sigma M_z = 0$$

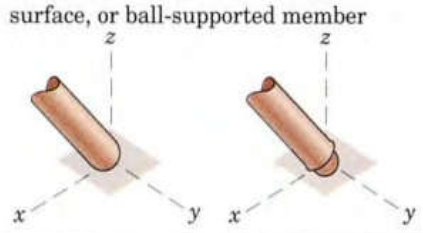
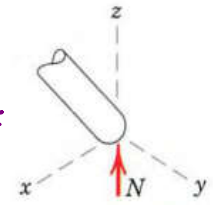
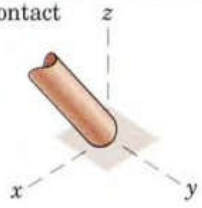
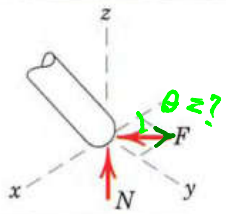
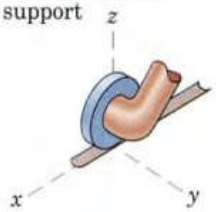
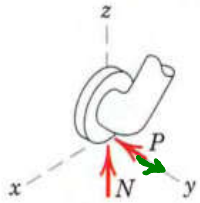
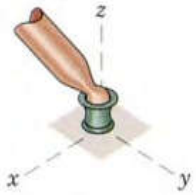
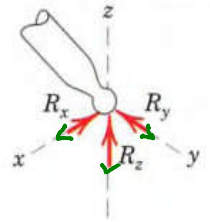
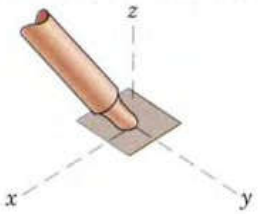
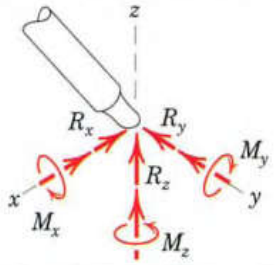
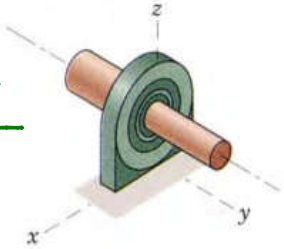
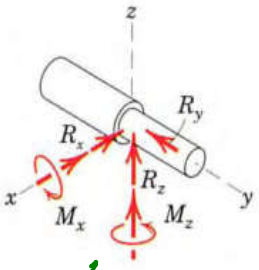
شش معادله ؛ حداکثر (!!) شش مجهول محاسبه می‌شوند

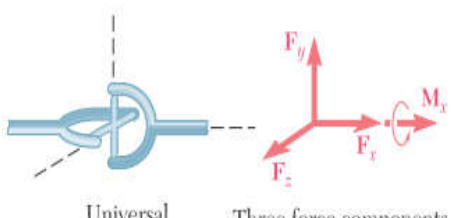
CATEGORIES OF EQUILIBRIUM IN THREE DIMENSIONS

Force System	Free-Body Diagram	Independent Equations
1. Concurrent at a point		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$
2. Concurrent with a line		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$ $\Sigma F_z = 0$
3. Parallel		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$
4. General		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$ $\Sigma M_z = 0$

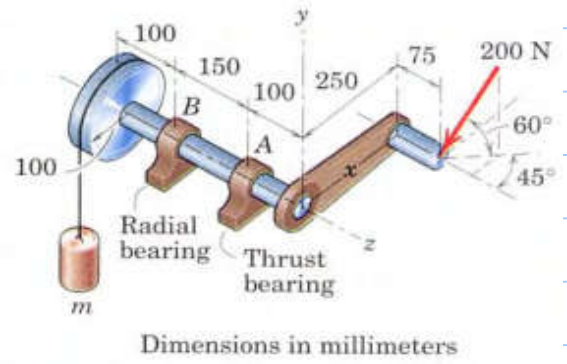
- مدل کردن نیروها و اتصالات در سه بعد :

MODELING THE ACTION OF FORCES IN THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS

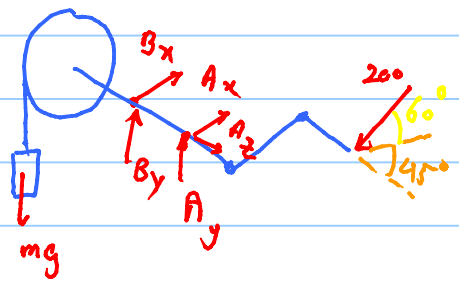
Type of Contact and Force Origin	Action on Body to Be Isolated
1. Member in contact with smooth surface, or ball-supported member 	 Force must be normal to the surface and directed toward the member.
2. Member in contact with rough surface 	 The possibility exists for a force F tangent to the surface (friction force) to act on the member, as well as a normal force N.
3. Roller or wheel support with lateral constraint 	 A lateral force P exerted by the guide on the wheel can exist, in addition to the normal force N.
4. Ball-and-socket joint 	 A ball-and-socket joint free to pivot about the center of the ball can support a force **R** with all three components.
5. Fixed connection (embedded or welded) 	 In addition to three components of force, a fixed connection can support a couple **M** represented by its three components.
6. Thrust-bearing support 	 Thrust bearing is capable of supporting axial force R_y as well as radial forces R_x and R_z. Couples M_x and M_z must, in some cases, be assumed zero in order to provide statical determinacy.



مثال - در شکل زیر، تکیه‌گاه B یک تکیه‌گاه غلطکی است و تکیه‌گاه A می‌تواند نیروی کلی را در
برشافت اعمال نماید. اگر سیستم در حال تعادل باشد، جرم m و نیروهای تکیه‌گاهی A و B را بدست آورید.



F.B.D:



$$\sum \vec{F} = \vec{0} \begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + B_x - 200\cos 60^\circ \sin 45^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow B_y + A_y - 9.81m - 200\sin 60^\circ = 0 \\ \sum F_z = 0 \Rightarrow A_z - 200\cos 60^\circ \cos 45^\circ = 0 \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{0} \Rightarrow (0,0,-0.15)\times(B_x, B_y, 0) +$$

$$(-0.1, 0, -0.25)\times(0, -9.81m, 0) +$$

$$(0.25, 0, 0.175)\times(-200c60^\circ s45^\circ, -200s60^\circ, -200c60^\circ s45^\circ) = \vec{0}$$

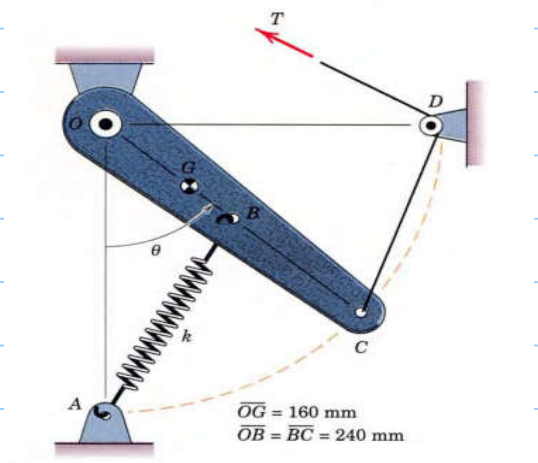
$$\rightarrow \begin{cases} m = 44.1\ kg \\ A_x = 35.4\ N \\ A_y = 86.8\ N \rightarrow A_r = 93.7\ N, \ A = 117.4\ N \\ A_z = 70.7\ N \end{cases}$$

$A_r = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ ، $A = \sqrt{A_r^2 + A_z^2}$

$$\begin{cases} B_x = 35.4\ N \\ B_y = 520\ N \end{cases} \Rightarrow B_r = 521\ N$$

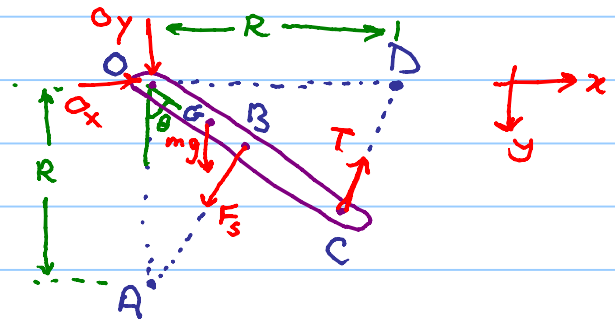
نکته: در این مثال محور AB و سایر اجسام را در راستای آن، جرم m به راحتی محاسبه می‌شود

مسئله ۲ - میله OC، دارای جرم ۱.۵ kg بوده و مرکز جرم آن در G واقع است. ثابت فنر $25\ \frac{N}{m}$ بوده و در $\theta = 0$ در طول آزاد خود قرار دارد. مقدار نیروی کشش طناب T برای تعادل استاتیکی میله در محدوده‌ی $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ را به صورت تابعی از θ بدست آورده و آن را رسم نمایید.



$\overline{OB} = \frac{R}{2}$, $\overline{OG} = \frac{R}{3}$

F.B.D :



$C = R\sin\theta\, i + R\cos\theta\, j$
$D = R\, i$
$\Rightarrow \vec{CD} = R(1-\sin\theta)\, i - R\cos\theta\, j$, $\hat{e}_{CD} = \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|}$ $\left(\theta \neq \frac{\pi}{2}\right)$

$\vec{T} = T\hat{e}_{CD} = T \cdot \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} \Rightarrow \vec{T} = \frac{R(1-\sin\theta)\, i - R\cos\theta\, j}{\sqrt{R^2(1-\sin\theta)^2 + R^2\cos^2\theta}} \cdot T$

$\vec{OC} = R\sin\theta\, i + R\cos\theta\, j$

$A = R\, j$
$B = \frac{R}{2}\sin\theta\, i + \frac{R}{2}\cos\theta\, j$
$\Rightarrow \vec{BA} = -\frac{R}{2}\sin\theta\, i + R\left(1 - \frac{1}{2}\cos\theta\right) j$

$\Rightarrow \hat{e}_{BA} = \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|}$

$$|\vec{F}_{spring}| = k\,(L(\theta) - L_0)$$

$$\triangle OBA : \quad L(\theta) = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - 2R\cdot\frac{R}{2}\cos\theta} \qquad , \quad L_0 = L(\theta=0) = \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{spring} = |\vec{F}_{spring}|\cdot \hat{e}_{BA}$$

$$\vec{OB} = \frac{R}{2}\sin\theta\, i + \frac{R}{2}\cos\theta\, j$$

$$\vec{W} = mg\, j$$

$$\vec{OG} = \frac{R}{3}\sin\theta\, i + \frac{R}{3}\cos\theta\, j$$

$$\Rightarrow \sum \vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{OC}\times\vec{T} + \vec{OB}\times\vec{F}_{spring} + \vec{OG}\times\vec{W} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ ✓ T قابل بررسی شود (با نوشتن برنامه MATLAB)

```
T= ((2*R^2 - 2*R^2*sin(theta))^(1/2)*((R^2*k*sin(theta))/2 - (R^3*k*sin(theta))/(4*((5*R^2)/4 - R^2*cos(theta))^(1/2))
   + (R*g*m*sin(theta))/3))/(R^2*cos(theta))
```

;)