ضربه و مومنتوم (Impulse & Momentum)

مومنتوم: (Linear Momentum or Momentum)

★ مومنتوم خطی / ممنتم یا مومنتوم

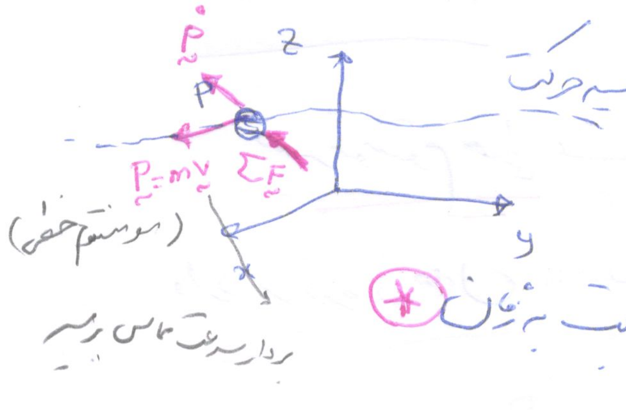
خطی یک ذره طبق تعریف برابر با حاصلضرب جرم و بردار سرعت آن ذره است.

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{P} = m\,\underset{\sim}{v}$$

(برخی منابع مومنتوم خطی را با $\underset{\sim}{L}$ نشان می‌دهند!)

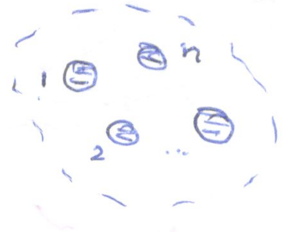
با در نظر گرفتن قانون دوم نیوتن داریم:

$$\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{a} = m\dot{\underset{\sim}{v}} = \frac{d}{dt}(m\underset{\sim}{v}) = \dot{\underset{\sim}{P}} \Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{F} = \dot{\underset{\sim}{P}}}$$ ⊛



اصل مومنتوم (Momentum Principle):

برآیند کلیه نیروهای وارد بر یک ذره برابر است با میزان تغییرات مومنتوم خطی نسبت به زمان ⊛



اصل مومنتوم برای سیستمی از ذرات:

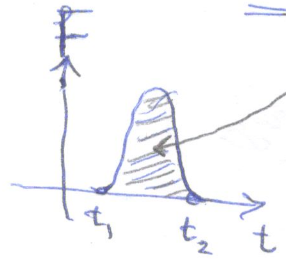
$$\sum \underset{\sim}{F} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\underset{\sim}{P}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\underset{\sim}{v}}_i$$

← برآیند نیروهای خارجی وارد بر سیستم

بیان اصل مومنتم بصورت انتگرال : فرض کنید نیروی برآیند وارد بر یک ذره ،

تابعی از زمان باشد ($\mathbf{F}=\mathbf{F}(t)$) ؛ داریم : [توجه شود که برخلاف کار و انرژی که انتگرال از نیرو برحسب مکان بوده، به دنبال انتگرال گیری برحسب زمان هستیم ← مفهوم ضربه و تغییر مومنتم خطی]

$$\mathbf{F}(t)=m\dot{\mathbf{v}}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\Longrightarrow \mathbf{F}(t)\,dt=m\,d\mathbf{v}=\dot{\mathbf{P}}\,dt$$



$$\Longrightarrow \mathcal{I}=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\dot{\mathbf{P}}\,dt=m\int_{v_1}^{v_2}d\mathbf{v}=m(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)=\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1$$

(linear Impulse of $\mathbf{F}$) $\equiv$ انتگرال کل ضربه خطی نیروی $\mathbf{F}$ در بازه t_1, t_2 $\equiv$ اگر Δt خیلی کوچک باشد، معادل اثر خطی نیروی F بر سیستم است.

اصل ضربه و مومنتم (Principle of Linear Impulse and Momentum) :

تغییر مومنتم خطی یک ذره در یک فاصله زمانی، برابر با ضربه کلی نیروهای خارجی وارد بر ذره در همان فاصله زمانی است.

$$\Longrightarrow \boxed{\mathcal{I}=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt=\mathbf{P}(t_2)-\mathbf{P}(t_1)=m\mathbf{v}_2-m\mathbf{v}_1}$$

(total impulse)

$\mathbf{v}_2$: بردار سرعت در زمان t_2

$\mathbf{v}_1$: بردار سرعت در زمان t_1

منجر به سه معادله مستقل اسکالری می‌شود

$$\begin{cases} m\dot{x}_1+\int_{t_1}^{t_2}F_x\,dt=m\dot{x}_2\\ m\dot{y}_1+\int_{t_1}^{t_2}F_y\,dt=m\dot{y}_2\\ m\dot{z}_1+\int_{t_1}^{t_2}F_z\,dt=m\dot{z}_2\end{cases}$$

★ توجه : اگر $\int F\,dt$ در هر جهتی صفر باشد، مومنتم خطی ذره در آن جهت ثابت می‌ماند!

نیروهای ضربه‌ای (Impulse Force): نیروهایی که بر یک جسم یا ذره در مدت زمان بسیار کوچکی وارد می‌شوند و سبب اتفاقات آنی بسیار بزرگی می‌شوند.

(مثل انفجار، برخورد، ضربه چکش و ...) ← در لحظه‌ی وقوع ضربه (و یا برخورد)، نیروهای محدود و مشخص

← نظیر نیروی وزن یا نیروی فنر در مقابل نیروهای ضربه‌ای می‌توانند کاملاً قابل صرف نظر باشند (اگرچه نیروهای تکیه‌گاهی می‌توانند ضربه‌ای عمل کرده و لزوماً نمی‌توان از اثرات آن‌ها صرف نظر کرد!)

اصل بقای مومنتوم (Principle of Conservation of Momentum): زمانی که انتگرال نیرو برحسب زمان (≡ ضربه) صفر شود، مومنتوم ثابت (پایستار) باقی می‌ماند.

Impulse Integral

(← به شکل واضح‌تر، اگر ضربه در هر جهتی صفر شود، در آن جهت پایستاری مومنتوم خطی را خواهیم داشت)

$$\mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \underset{\sim}{F}\, dt = 0$$

1) زمانی که $\underset{\sim}{F}=0$ باشد یعنی نیروی خارجی وارد نشود (شتاب صفر و سرعت ثابت خواهد بود)

2) زمانی که F محدود است یا $\int F dt$ در آن بازه زمانی قابل صرف نظر است. مثلاً انتگرال نیروی وزن در یک بازه زمانی بسیار کوچک

3) زمانی که $\underset{\sim}{F}$ تناوبی بوده (cyclic) و فاصله زمانی یک دوره تناوب کامل باشد.

اصل مومنتم برای سیستمی از ذرات (n ذره) :

ضربه

$$\sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{f}_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \underset{\sim}{F}_i \, dt = \sum_{i=1}^{n} m_i (\underset{\sim}{v}_i)_{2} - \sum_{i=1}^{n} m_i (\underset{\sim}{v}_i)_{1}$$

حالت خاص

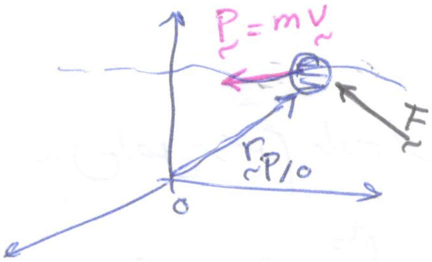
$$\boxed{\text{اگر } \sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{f}_i = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i (\underset{\sim}{v}_i)_{2} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\underset{\sim}{v}_i)_{1}}$$

مومنتوم زاویه‌ای / گشتاور مومنتوم (Angular Momentum / Moment of Momentum)

یادآوری: اصل مومنتوم خطی

$$\begin{cases} F = \dot{P} = m\dot{v} & \text{(برای یک ذره)} \\ F = \sum_{i=1}^{n} \dot{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{v}_i & \text{(برای سیستم ذرات)} \end{cases}$$

حرکت ذره‌ای به جرم m را در نظر بگیرید:



تعریف می‌کنیم مومنتوم زاویه‌ای ذره حول نقطه‌ی O:

① $$\boxed{H^O = r_{P/O} \times P} = r_{P/O} \times m v$$ ← گشتاور مومنتوم خطی حول نقطه‌ی O

(گشتاور مومنتوم ذره یا مومنتوم زاویه‌ای ذره حول O) ←

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

از طرفی داریم:

$$F = ma = \dot{P} = m\dot{v} = m\ddot{r}_{P/O}$$

برآیند گشتاورهای F حول O ⟶

$$M^O = r_{P/O} \times F = r_{P/O} \times ma = r_{P/O} \times \dot{P} = M^O \quad ②$$

به نظر می‌آید ① و ② با هم مرتبط اند!!

از ① نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\dot{H}^O = \frac{d}{dt}(r_{P/O} \times P) = \dot{r}_{P/O} \times P + r_{P/O} \times \dot{P}$$

$$\dot{r}_{P/O} \times m\dot{r}_{P/O} = 0 \quad \text{(ضرب خارجی دو بردار موازی!)}$$

اصل مومنتوم زاویه‌ای (!)

ارتباط فوق‌العاده قوی در حل مسائل دینامیک دوره‌ی بعدی ⟸

$$\Rightarrow \dot{H}^O = r_{P/O} \times \dot{P} \Rightarrow \boxed{\dot{H}^O = M^O} \; ⟶ \; \boxed{\text{معادل } \dot{P} = F}$$

اصل مومنتوم زاویه‌ای یا گشتاور مومنتوم (Moment of Momentum Principle):

- میزان تغییر مومنتوم زاویه‌ای یک ذره نسبت به زمان حول مرکز گشتاور ثابت O در فضا برابر است با برآیند گشتاور نیروهای وارد بر ذره حول همان مرکز گشتاور

$$\Rightarrow \underset{\sim}{M}^{O} = \dot{\underset{\sim}{H}}^{O} = \frac{d\underset{\sim}{H}^{O}}{dt}$$

بیان اصل مومنتوم زاویه‌ای به صورت انتگرال:

از طرفین $\int_{t_1}^{t_2}$ می‌گیریم:

$$\mathcal{M} = \int_{t_1}^{t_2} \underset{\sim}{M}^{O}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} d\underset{\sim}{H}^{O} = \underset{\sim}{H}^{O}(t_2) - \underset{\sim}{H}^{O}(t_1) \quad (**)$$

ضربه زاویه‌ای (Angular Impulse)

* اگر ضربه زاویه‌ای صفر شود (مثلاً گشتاوری به جسم وارد نشود یا ...)، مومنتوم زاویه‌ای ثابت یا پایسته باقی می‌ماند ⟸ اصل بقای مومنتوم زاویه‌ای

$$\Rightarrow \text{اگر} \int_{t_1}^{t_2} \underset{\sim}{M}^{O}\, dt = 0 \Longrightarrow \underset{\sim}{H}^{O}(t_1) = \underset{\sim}{H}^{O}(t_2)$$

(**) نکته: فرم برداری معادله ذکر شده، سه معادله مستقل آن است که به صورت روبرو قابل بیان است:

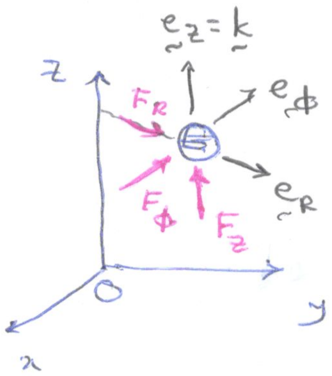
$$\begin{cases} H_x^{O}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} M_x^{O}\, dt = H_x^{O}(t_2) \\ H_y^{O}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} M_y^{O}\, dt = H_y^{O}(t_2) \\ H_z^{O}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} M_z^{O}\, dt = H_z^{O}(t_2) \end{cases}$$

در راستای هر یک از محورها

اگر گشتاور حول نقطه ثابت O صفر شود، مومنتوم زاویه‌ای حول آن محور ثابت می‌ماند

ما در صفحه فقط در این راستا گشتاور داریم.

مومنتوم زاویه‌ای در مختصات استوانه‌ای :



ذره P را که حول محور ثابت z تحت
تأثیر نیروهای F_R ، F_ϕ و F_z در حال حرکت
(دوران) است در نظر بگیرید. گشتاور این نیروها حول محور z عبارت است از:

$$\underset{\sim}{M}_{z_{\text{محور}}} = \left(\left(\underset{\sim}{r}_{P/O} \times \underset{\sim}{F} \right) \cdot \hat{k} \right) \hat{k}$$

گشتاور حول محور

F_R : گشتاور ندارد چون محور z را قطع می‌کند

F_z : گشتاور ندارد چون موازی محور z است ($\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{r} = 0$)

F_ϕ : گشتاور دارد و بازوی گشتاورش حول محور z ، R است

$$\Rightarrow M^O_z = \cancel{\;} \left(\underset{\sim}{r}_{P/O} \times \underset{\sim}{F} \right)_z = \overbrace{\left(R\, \underset{\sim}{e}_R \times F_\phi\, \underset{\sim}{e}_\phi \right)_z}^{(R F_\phi \underset{\sim}{k})_z}$$

$$\Rightarrow \boxed{M^O_z = R F_\phi} \quad \text{I}$$

از طرفی:

$$(\underset{\sim}{H}^O)_z = (\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{P})_z = (\underset{\sim}{r} \times m \underset{\sim}{v})_z = (\underset{\sim}{r} \times m v_\phi\, \underset{\sim}{e}_\phi)_z$$

$$\Rightarrow (\underset{\sim}{H}^O)_z = (R\, \underset{\sim}{e}_R \times m v_\phi\, \underset{\sim}{e}_\phi)_z = (R m v_\phi\, \hat{k})_z$$

$$\Rightarrow \boxed{H^O_z = R m v_\phi} \quad \text{II}$$

$$\boxed{F_\phi = m a_\phi = m(R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi})} \qquad \boxed{v_\phi = R\dot{\phi}}$$

$$\text{II}, \text{I} \longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} M^O_z\, dt = H^O_z(t_2) - H^O_z(t_1) \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} R F_\phi\, dt = m R_2 (v_\phi)_2 - m R_1 (v_\phi)_1$$