

ریاضیات مهندسی پیشرفته

دکتر محمود حصارکی - مسعود بیرامی امینلوئی - فرشته گاذری

۱۳۹۹

فهرست مطالب

پیشگفتار مؤلفان	۵
۱ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای روی میدان کرانه‌دار	۱
۱.۱ سری فوریه	۲
۲.۱ سری فوریه توابع زوج و فرد	۸
۳.۱ بسط در نیم دامنه	۱۴
۴.۱ سری فوریه مختلط	۲۶
۵.۱ مسئله اشترم-لیوویل	۳۳
۶.۱ روش جداسازی	۴۴
۷.۱ سری فوریه دوگانه و چندگانه	۵۱
۸.۱ مسائل چند متغیر مکان و تبدیلات فوریه متناهی	۵۸
۹.۱ روش‌های حل	۷۳
۱.۹.۱ روش حل با پایه	۷۳
۲.۹.۱ روش حل با تبدیلات فوریه متناهی	۸۱
۳.۹.۱ روش حل با سری فوریه دوگانه و سه‌گانه	۸۶
۱۰.۱ معادلات پاره‌ای روی میدان مستدیر	۹۳
۲ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای روی میدان بیکران	۱۰۹
۱.۲ تبدیلات و انتگرال‌های فوریه	۱۰۹
۲.۲ روش دالامبر	۱۲۰

۳.۲	مروری بر روش تبدیلات فوریه و روش دالامبر	۱۳۴
۴.۲	تبدیل لاپلاس و اصل دوهمامل	۱۴۸

۳	توابع تحلیلی	۱۵۹
۱.۳	اعداد مختلط	۱۵۹
۲.۳	توابع تحلیلی	۱۶۸
۳.۳	توابع مقدماتی	۱۸۱
۴.۳	مروری بر توابع تحلیلی	۱۹۲
۵.۳	مروری بر توابع مقدماتی مختلط	۲۰۴

۴	انتگرال مختلط	۲۱۳
۱.۴	انتگرال مختلط	۲۱۴
۲.۴	سری تیلر و سری لران	۲۲۹
۳.۴	مانده و انتگرال های حقیقی	۲۴۲
۴.۴	اصل آوند و قضیه روشه	۲۵۸
۵.۴	مروری بر انتگرال مختلط-سری لران و مانده	۲۶۴

۵	نگاشت های همدیس	۲۸۱
۱.۵	نگاشت های همدیس	۲۸۲
۲.۵	تبدیل مبیوس	۲۹۷
۳.۵	کاربرد نگاشت های همدیس در حل معادلات پاره ای	۳۲۱
۴.۵	فرمول های انتگرال پوآسن	۳۴۰
۵.۵	مروری بر نگاشت های همدیس و کاربرد آن ها	۳۶۴

۶	فرم های جردن ماتریس ها	۳۸۹
۱.۶	جبر ماتریس ها	۳۸۹
۲.۶	فرآیند گرام-اشمیت	۳۹۹
۳.۶	حل دستگاه معادلات خطی	۴۰۴

۴۱۴	فرم جردن ماتریس‌های متقارن و کاربردهای آن	۴.۶
۴۲۹	فرم جردن ماتریس‌های مختلط	۵.۶
۴۴۱	۷ حساب تغییرات با نقاط ثابت انتهایی	
۴۴۱	پیدایش حساب تغییرات و مثال‌ها	۱.۷
۴۴۸	معادله اویلر-لاگرانژ	۲.۷
۴۶۲	چند تعمیم از ساده‌ترین مسئله حساب تغییرات	۳.۷
۴۷۹	۸ مسائل تغییراتی مقید و کرانه‌های متغیر	
۴۸۰	مسائل تغییراتی مقید همدوری (هم‌محیط)	۱.۸
۴۹۷	قیود تابعی و دیفرانسیلی	۲.۸
۵۱۰	شرایط مرزی طبیعی	۳.۸
۵۲۱	شرایط مرزی جابه‌جا شونده	۴.۸
۵۳۷	۹ مسئله معکوس و روش‌های مستقیم	
۵۳۷	مسئله معکوس	۱.۹
۵۴۳	روش مستقیم ریتز	۲.۹
۵۴۹	مراجع	

پیشگفتار مؤلفان

فصل ۱

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای روی میدان کرانه‌دار

اندکی بعد از پیدایش قانون حرکت نیوتن، معادله حرکت تار مرتعش توسط دالامبر نوشته شد و با روش ابداعی او حل شد. با ظهور به کارگیری نیروی بخار، معادله انتقال حرارت توسط فوریه نوشته شد. حل این معادله با استفاده از روش دالامبر مقدور نشد. برای حل این معادله فوریه سری‌هایی با پایه‌های توابع سینوس و کسینوس معرفی نمود که علاوه بر حل معادله انتقال حرارت حل معادله تار مرتعش و پوسته مرتعش را نیز ممکن می‌نمود. با تعمیم‌هایی که بعدها بر روی این ابزار حل انجام شد حل خانواده وسیعی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای ممکن گردید. هدف از این فصل معرفی سری فوریه و تعمیم‌های آن و استفاده از آنها برای حل معادلات پاره‌ای است.

در بخش ۱.۱ به معرفی سری فوریه و نحوه محاسبه آن می‌پردازیم. در بخش ۲.۱ به محاسبه سری فوریه توابع زوج و فرد می‌پردازیم. در بخش‌های بعدی تعمیم‌های سری فوریه و استفاده‌هایی از آن را داریم.

۱.۱ سری فوریه

هدف از این بخش معرفی سری فوریه و محاسبه آن است. قبل از شروع به انجام این کار به یادآوری مطالب مورد نیاز می‌پردازیم.

تابع تناوبی: تابع $f(x)$ با دامنه $\mathbb{R}$ را تناوبی با دوره تناوب $T > 0$ گوییم اگر برای کلیه مقادیر x داشته باشیم $f(x+T) = f(x)$. توجه کنید که اگر $T > 0$ دوره تناوب f باشد در این صورت $2T, 3T, \dots, nT$ برای هر عدد طبیعی n نیز یک دوره تناوب است.

مثال ۱.۱. تابع $f(x) = \sin x$ تناوبی با دوره‌های تناوب $2\pi, 4\pi, \dots, 2n\pi$ است.

تعریف ۱.۱. کوچک‌ترین دوره تناوب را، در صورت وجود دوره تناوب اولیه گویند.

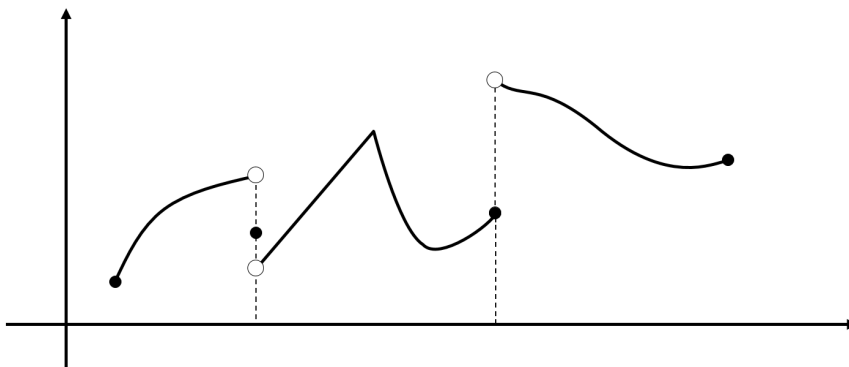
مثال ۲.۱. تابع $f(x) = \sin x$ دارای دوره تناوب اولیه 2π و تابع $g(x) = 5$ فاقد دوره تناوب اولیه است چون هر عدد مثبت یک دوره تناوب آن است.

تذکره. تعریف تابع تناوبی فوق با تعریف تابع تناوبی استاندارد متفاوت است. طبق آن تعریف تابع ثابت تناوبی نیست و کوچک‌ترین دوره تناوب، دوره تناوب تابع منظور می‌گردد. علت این امر این است که با مفهوم فوق، مجموعه توابع تناوبی با دوره تناوب T یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است. این فضای برداری به درک اهمیت سری فوریه و کاربرد آن کمک می‌کند.

مفهوم مورد نیاز دیگر در تعریف زیر می‌آید.

تابع قطعه‌به‌قطعه پیوسته: تابع $g(x)$ را قطعه‌به‌قطعه پیوسته گوییم اگر نقاط ناپیوستگی آن از نوع جهشی باشد. یعنی حد چپ و راست در این نقاط موجود و متناهی ولی متفاوت باشد. به علاوه در هر بازه بسته و کرانه‌دار تعداد آنها متناهی باشد. (به شکل ۱.۱ توجه کنید.)

سری فوریه: سری فوریه ابزاری برای نوشتن توابع متناوب بر حسب سینوس‌ها و کسینوس‌ها است. به عبارت دقیق‌تر اگر $f(x)$ یک تابع تناوبی و قطعه‌به‌قطعه پیوسته با



شکل ۱.۱: تابع قطعه به قطعه پیوسته

دوره تناوب $T = 2p > 0$ باشد و دنباله‌های $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ و $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ موجود باشد به طوری که به جز احتمالاً در تعدادی متناهی نقطه داشته باشیم:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right).$$

سری فوق را سری فوریه تابع $f(x)$ گویند.

تذکره. تساوی بین تابع و سری فوریه آن، تساوی نقطه وار به جز احتمالاً در تعدادی متناهی نقطه خواهد بود.

توجه کنید برای تعیین سری فوریه می‌بایستی a_n ها و b_n ها را محاسبه کنیم.

محاسبه a_0 : از طرفین سری فوریه از 0 تا $2p$ انتگرال بگیرید. (با فرض تعویض Σ و $\int$ که برای سری فوریه همیشه مقدور است) به دست آورید:

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) dx.$$

محاسبه a_n : طرفین سری فوریه را در $\cos \frac{m\pi x}{p}$ ، $m \neq 0$ ثابت ضرب و از 0 تا $2p$ انتگرال

بگیرید. با توجه به اتحادهای مثلثاتی

$$\begin{aligned}\cos A \cdot \cos B &= \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)] \\ \sin A \cdot \cos B &= \frac{1}{2} [\sin(A - B) + \sin(A + B)]\end{aligned}$$

به دست می‌آورید:

$$a_m = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \cos \frac{m\pi x}{p} dx.$$

تذکره. توجه کنید این فرمول a_m فرمول a_0 را نیز دربر دارد، لیکن برای محاسبه a_0 می‌بایستی ابتدا قرار دهیم $m = 0$ و سپس به محاسبه اقدام کنیم.

محاسبه b_n : از ضرب طرفین سری فوریه در $\sin \frac{m\pi x}{p}$ و انتگرال‌گیری از 0 تا $2p$ ، با توجه به فرمول‌های مثلثاتی فوق و

$$\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

به دست می‌آید:

$$b_m = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \sin \frac{m\pi x}{p} dx.$$

فرمول‌های a_n و b_n فوق را فرمول‌های اولر فوریه گویند. همچنین a_n ها و b_n ها را ضرایب فوریه گویند.

مثال ۳.۱. سری فوریه تابع $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ و $f(x + 2\pi) = f(x)$ را به دست آورید.

حل. کفایت ضرایب فوریه را محاسبه کنیم. از $2p = 2\pi$ داریم $p = \pi$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \left. \frac{x^2}{2\pi} \right|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{n} \, dx \right] = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{n} \, dx \right] = -\frac{2}{n}$$

به این ترتیب به دست می آوریم:

$$f(x) = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin nx.$$

توجه کنید در نقطه $x = \pi$ به دست می آوریم $\pi = \pi$. در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ به دست می آوریم $\frac{\pi}{2} = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$ یا

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

برای $x = 0$ داریم $f(x) = 0$ لیکن مقدار سری فوریه برابر π است. پس در نقاط ناپیوستگی تساوی برقرار نیست.

حال به بیان شرایط فوریه برای سری فوریه می پردازیم.

خاصیت ۱.۱. اگر f و f' قطعه به قطعه پیوسته با دوره تناوب $2p > 0$ باشد آن گاه سری فوریه f موجود و ضرایب آن از فرمول های اولر-فوریه قابل حصول است. در نقاط پیوستگی f مقدار سری برابر با مقدار تابع و در نقاط ناپیوستگی مقدار سری برابر با میانگین حد چپ و راست است. به عبارت دقیق تر می توان نوشت:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right).$$

مثال ۴.۱. سری فوریه تابع $f(x) = (x-1)^2$, $0 \leq x \leq 2$ و $f(x+2) = f(x)$ را به دست آورید.

حل. ۲. $p = ۲$. پس ۱. $p = ۱$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{1} \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{(x-1)^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \\ a_n &= \frac{1}{1} \int_0^1 (x-1)^2 \cos n\pi x dx \\ &= (x-1)^2 \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \Big|_0^1 - \int_0^1 2(x-1) \frac{\sin n\pi x}{n\pi} dx \\ &= -2 \left[(x-1) \frac{\cos n\pi x}{-n^2 \pi^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{-n^2 \pi^2} dx \right] = \frac{4}{n^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{1} \int_0^1 (x-1)^2 \sin n\pi x dx \\ &= -(x-1)^2 \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \Big|_0^1 + \int_0^1 2(x-1) \frac{\cos n\pi x}{n\pi} dx \\ &= 2(x-1) \frac{\sin n\pi x}{n^2 \pi^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 2 \frac{\sin n\pi x}{n^2 \pi^2} dx = 0. \end{aligned}$$

تذکره. $b_n = 0$ بدون محاسبه قابل تشخیص است. چون $f(x)$ فوق تابعی زوج است.

بدین ترتیب به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x.$$

برای $x = 0$ به دست می‌آوریم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ و برای $x = 1$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

تذکره. (۱) سری فوریه مستقل از انتخاب دوره تناوب است.

(۲) اگر f پیوسته و f' قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشد درجه n در مخرج کسر a_n و b_n دوتا بیشتر از درجه صورت است. همچنین اگر f و f' تا مشتق m ام پیوسته و مشتق $m+1$ آن ناپیوسته باشد درجه مخرج $m+2$ تا بیشتر از درجه صورت است. عکس این مطلب نیز صحت دارد.

(۳) یکی از کاربردهای سری فوریه محاسبه سری های عددی است.

تمرین ۱.۱

۱. مجموعه دوره تناوب هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

(آ) $\sin nx \cos 2mx$ (ب) $\sin n\pi x \cos m\pi x$

۲. نشان دهید مجموعه توابع تناوبی با دوره T یک فضای برداری است.

۳. نشان دهید سری فوریه مستقل از انتخاب دوره تناوب است.

۴. نشان دهید اگر f پیوسته و f' قطعه به قطعه پیوسته باشد آن گاه درجه n مخرج کسر a_n و b_n دوتا بیشتر از درجه صورت کسر است.

۵. نشان دهید اگر درجه n در مخرج a_n و b_n حداقل $2 + m$ تا بیشتر از درجه صورت باشد آن گاه f تا مشتق m ام آن پیوسته است.

۶. با استفاده از سری فوریه $f(x) = x^2$ روی $|x| < \pi$ و $f(x + 2\pi) = f(x)$ مقادیر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ را محاسبه کنید.

۷. با استفاده از سری فوریه تابع $f(x) = |\cos x|$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ را محاسبه کنید.

۸. با استفاده از سری فوریه تابع $f(x) = |x|^3$, $|x| \leq 2$ و $f(x) = f(x + 4)$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ را محاسبه کنید.

۹. با استفاده از سری فوریه تابع $f(x) = x(1 - |x|)$, $|x| \leq 1$ و $f(x + 2) = f(x)$ سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ را محاسبه کنید.

۱۰. مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ را با استفاده از سری فوریه مناسب محاسبه کنید.

۲.۱ سری فوریه توابع زوج و فرد

برای توابع زوج و فرد محاسبه سری فوریه ساده‌تر محاسبه می‌گردد. علت این امر صفر بودن انتگرال تابع فرد روی دامنه قرینه است. در ابتدا به یادآوری مفاهیم و خواصی از توابع زوج و فرد می‌پردازیم.

تابع $g(x)$ را زوج گوییم اگر دامنه آن قرینه و $g(-x) = g(x)$.

تابع $h(x)$ را فرد گوییم اگر دامنه آن قرینه و $h(-x) = -h(x)$.

خاصیت ۲.۱.۱ حاصل ضرب دو تابع زوج یک تابع زوج است.

۲ حاصل ضرب دو تابع فرد نیز یک تابع زوج است.

۳ حاصل ضرب یک تابع زوج و یک تابع فرد یک تابع فرد است.

۴ اگر h فرد باشد آن گاه $\int_{-a}^a h(x) dx = 0$.

۵ اگر g زوج باشد آن گاه $\int_{-a}^a g(x) dx = 2 \int_0^a g(x) dx$.

مطلب مورد نیاز دیگر برای محاسبه سری فوریه توابع زوج و فرد خاصیت زیر است.

خاصیت ۳.۱ اگر $f(x)$ تابع تناوبی با دوره تناوب T باشد آن گاه برای هر عدد

حقیقی d داریم:

$$\int_d^{d+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

علت. با توجه به خواص انتگرال داریم:

$$\int_d^{d+T} f(x) dx = \int_d^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{T+d} f(x) dx.$$

از طرف دیگر با توجه به تناوبی بودن f و تغییر متغیر $x = t + T$ داریم:

$$\int_T^{T+d} f(x) dx = \int_0^d f(t+T) dt = \int_0^d f(t) dt.$$

پس $\int_d^{d+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$.

نتیجه ۴.۱. فرمول‌های اولر-فوریه به صورت زیر نیز قابل نمایش است.

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx.$$

با توجه به این که سینوس تابعی فرد و کسینوس تابعی زوج است، خاصیت زیر برقرار است.

خاصیت ۵.۱. (۱) اگر $g(x)$ زوج و با دوره تناوب $2p$ باشد، آن گاه

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx, \quad b_n = 0.$$

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{p}.$$

(۲) اگر $h(x)$ تابعی فرد با دوره تناوب $2p$ باشد، آن گاه

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p}.$$

تذکره. با توجه به این خاصیت می‌گویند سری فوریه تابع فرد سینوسی و سری فوریه تابع زوج کسینوسی است.

مثال ۵.۱. سری فوریه تابع $f(x) = x|x|$, $|x| < \pi$ و $f(x+2\pi) = f(x)$ را محاسبه کنید.

حل. این تابع فرد است. پس $a_n = 0$ و $2p = 2\pi$ یا $p = \pi$ و

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[x^2 \frac{\cos nx}{-n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \frac{\cos nx}{-n} dx \right]$$

$$= \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi} \left[x \frac{\sin nx}{n^2} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n^2} dx \right]$$

$$= \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3} [(-1)^n - 1].$$

پس

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3} [(-1)^n - 1] \right\} \sin nx.$$

برای $x = \frac{\pi}{4}$ داریم:

$$\frac{\pi^2}{4} = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

همچنین با استفاده از سری فوریه $f(x) = x$, $|x| \leq \pi$ به دست می‌آوریم $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$. بدین ترتیب به دست می‌آوریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

با استفاده از تساوی پارسیوال محاسبه سری‌های عددی بیشتری مقدور است این خاصیت را به صورت زیر داریم.

خاصیت ۶.۱. فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ با دوره‌های تناوبی $2p$ دارای سری‌های زیراند.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

$$g(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos \frac{n\pi x}{p} + d_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

آن‌گاه

$$\frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n) = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) g(x) dx.$$

علت. طرفین سری فوریه $f(x)$ را در $g(x)/p$ ضرب و از $-p$ تا p انتگرال بگیرید. با تعویض محل $\sum$ و $\int$ انتگرال‌های حاصل، c_n و d_n را به دست می‌دهند.

مثال ۶.۱. برای دو تابع $f(x) = x$, $|x| < \pi$ و $g(x) = x^2$ با دوره تناوب 2π سری های سینوسی زیر به دست می آید.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi^2}{n} (-1)^{n+1} + \frac{12(-1)^n}{n^3} \right] \sin nx.$$

با استفاده از تساوی پارسیوال به دست می آوریم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \left[\frac{2\pi^2}{n} (-1)^{n+1} + \frac{12(-1)^n}{n^3} \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^4}{5}$$

یا

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \frac{1}{12} \left[-\frac{\pi^4}{5} + 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right] \\ &= \frac{1}{12} \left[-\frac{\pi^4}{5} + 2\pi^2 \frac{\pi^2}{6} \right] = \frac{\pi^4}{90}. \end{aligned}$$

هر یک از دو سری فوریه سینوسی و کسینوسی خاصیت مخصوص به خود را دارند که آنها را ابزاری برای حل معادلات دیفرانسیل پاره ای می سازد. این خواص را در این جا بیان می کنیم.

خاصیت ۷.۱.۱. دنباله $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{p} \right\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه برای فضای برداری زیر است.

$$V_1 = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(mp) = 0, \forall p > 0, f \text{ فرد و تناوبی با دوره تناوب } 2p \right\}$$

$$\left\{ f \text{ پیوسته در نقاط } x = mp, m \in \mathbb{Z}, \text{ و } f' \text{ قطعه به قطعه پیوسته} \right\}$$

(۲) دنباله $\left\{ \cos \frac{n\pi x}{p} \right\}_{n=0}^{\infty}$ یک پایه برای فضای برداری زیر است.

$$V_2 = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f' \text{ زوج و پیوسته, } p > 0, \right. \\ \left. \text{قطعه‌به‌قطعه پیوسته, } f' \text{ در } x = mp \text{ پیوسته و } f'(mp) = 0, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

علت. (۱) طبق خاصیت ۱.۱، اگر $f \in V_1$ باشد سری فوریه f موجود است. چون f فرد است پس سری فوریه آن سینوسی است. یعنی:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p}, \quad b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx.$$

چون f در نقاط $x = mp$ پیوسته است پس تساوی سری فوریه در این نقاط برقرار است. (۲) چون f پیوسته و زوج و f' قطعه‌به‌قطعه پیوسته است پس:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{p}, \quad a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx.$$

چون درجه در مخرج کسر a_n دوتا بیشتر از درجه صورت است پس این سری همگرای یکنواخت و در نتیجه از آن می‌توان جمله‌به‌جمله مشتق گرفت و به‌دست آورد:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n\pi}{p} a_n \sin \frac{n\pi x}{p}.$$

چون f' در نقاط $x = mp$ پیوسته است پس در این نقاط مقدار سری فوریه f' برابر با خود تابع است یعنی شرط $f'(mp) = 0$ نیز برقرار است.

تذکره. (۱) اگر f, f' و f'' دارای دوره تناوب $p > 0$ ، f پیوسته و f' و f'' قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشند آن‌گاه سری فوریه f' از جمله‌به‌جمله مشتق‌گیری سری فوریه f قابل حصول است.

(۲) اگر f و f' قطعه به قطعه پیوسته با دوره تناوب $2p > 0$ باشد آن گاه انتگرال معین f با جمله به جمله انتگرال گیری از سری فوریه f قابل حصول است.

تمرین ۲.۱

۱. تعیین کنید کدام یک از توابع زیر فرد و کدام یک زوج است.

$x^3 + x^2$ (ه)	$e^{\cos x}$ (ج)	$x \sin x^2$ (آ)
$\ln x \tan x$ (و)	$\frac{x^3}{1+x^4}$ (د)	$x^4 \ln x $ (ب)

۲. با استفاده از سری فوریه $f(x) = x^2, |x| \leq \pi$ مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ را محاسبه کنید.

۳. با استفاده از سری فوریه $f(x) = \frac{\pi^2}{6}x - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3, |x| \leq \pi$ مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ را بیابید.

۴. با استفاده از سری فوریه $f(x) = x^4 - x^2, |x| \leq \pi$ مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$ را محاسبه کنید.

۵. نشان دهید:

$$\ln \left(2 \left| \sin \frac{x}{2} \right| \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx, \quad x \neq 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

$$\ln \left(2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos nx, \quad x \neq (2m+1)\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

با استفاده از آن‌ها نشان دهید:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2 \ln \left(2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| \right) dx \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2 \ln \left(2 \left| \sin \frac{x}{2} \right| \right) dx \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} x^2 \ln \left(\left| \tan \frac{x}{2} \right| \right) dx.\end{aligned}$$

۳.۱ بسط در نیم دایره

در کاربرد سری فوریه نیاز است تابعی قطعه‌به‌قطعه پیوسته که فقط روی $[0, p]$ تعریف شده را به صورت سری فوریه بنویسیم. دو طریق زیر با استفاده از سری فوریه سینوسی و کسینوسی مفید است.

طریقه ۱: تابع $f(x)$ را به صورت فرد و تناوبی با دوره تناوب $2p > 0$ به صورت زیر بسط دهید. (به شکل ۲.۱ توجه کنید).

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < p \\ -f(-x) & -p < x < 0 \end{cases}$$

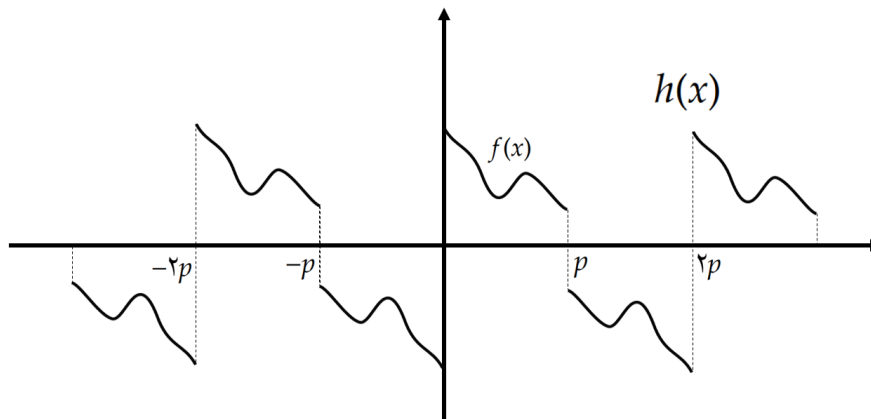
$$h(x + 2p) = h(x).$$

تابع $h(x)$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته و تناوبی با دوره $2p > 0$ فرد است. پس

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p}, \quad b_n = \frac{2}{p} \int_0^p h(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx.$$

روی بازه $[0, p]$ داریم:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p}, \quad b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx$$



شکل ۳.۱: گسترش فرد $f(x)$ در نیم دامنه $[0, p]$

این سری را بسط در نیم دامنه سینوسی f گوئیم.

طریقه ۲: این بار تابع $f(x)$ را به صورت زوج و تناوبی با دوره تناوب $2p > 0$ بسط دهید تا تابع $g(x)$ به دست آید. (به شکل ۳.۱ توجه کنید.)

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < p \\ f(-x) & -p < x < 0 \end{cases}$$

$$g(x + 2p) = g(x).$$

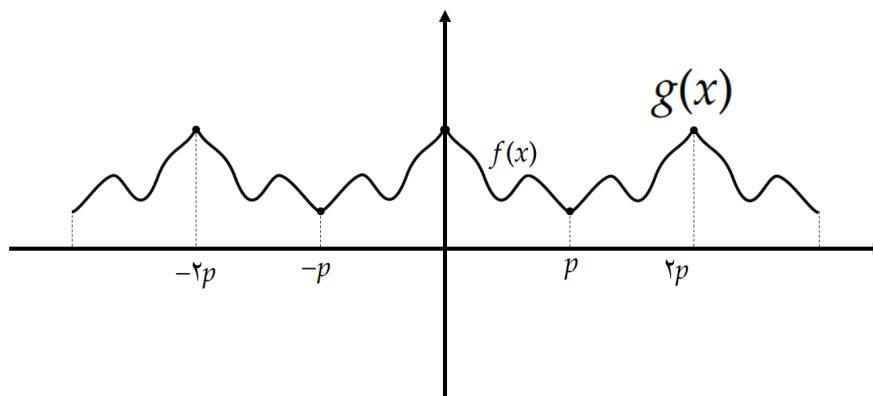
این تابع دارای سری فوریه کسینوسی است.

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{p}, \quad a_n = \frac{2}{p} \int_0^p h(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx.$$

روی بازه $[0, p]$ داریم:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{p}, \quad a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx$$

این سری را بسط در نیم دامنه کسینوسی $f(x)$ گویند.



شکل ۳.۱: گسترش زوج $f(x)$ در نیم دامنه $[0, p]$

مثال ۷.۱. بسط در نیم دامنه سینوسی و کسینوسی $0 \leq x \leq 1$ ، $f(x) = x$ را به دست آورید.

حل. (۱) سینوسی: داریم $p = 1$ و

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = 2 \left(-\frac{x}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x \, dx \right) \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \end{aligned}$$

پس

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

تذکر. در $x = 0$ تساوی برقرار است چون در این نقطه $h(x)$ ، یعنی گسترش فرد آن پیوسته است. لیکن در $x = 1$ تساوی برقرار نیست چون $h(x)$ آن در این نقطه ناپیوسته است.

(۲) **کسینوسی:** داریم $p = ۱$ و

$$\begin{aligned} a_0 &= ۲ \int_0^1 x \, dx = ۱ \\ a_n &= ۲ \int_0^1 x \cos n\pi x \, dx = ۲ \left(\frac{x}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x \, dx \right) \\ &= \frac{۲}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - ۱) \end{aligned}$$

پس

$$x = \frac{1}{۲} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{۲}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - ۱) \cos n\pi x, \quad 0 \leq x \leq ۱.$$

با توجه به مطالب فوق و خاصیت ۷.۱، خاصیت زیر برقرار است.

خاصیت ۸.۱. (۱) دنباله $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{p} \right\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه برای فضای برداری زیر است.

$$V_۳ = \left\{ f : [0, p] \rightarrow \mathbb{R} : f(0) = f(p) = 0 \text{ و } f \text{ قطعه به قطعه پیوسته و } \right\}$$

(۲) دنباله $\left\{ \cos \frac{n\pi x}{p} \right\}_{n=0}^{\infty}$ یک پایه برای فضای برداری زیر است.

$$\begin{aligned} V_۴ = \left\{ f : [0, p] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ پیوسته و } f' \text{ و } f'' \right. \\ \left. f'(0) = f'(p) = 0 \text{ و } \right\} \end{aligned}$$

تذکره. اهمیت اساسی خاصیت فوق برقراری تساوی بین تابع و سری فوریه آن در نقاط مرزی ۰ و p است.

اکنون امکانات حل بعضی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مهیا است. در این جا مثالی از انتقال حرارت را می‌آوریم.

مثال ۸.۱. مطلوبست حل مسئله با شرایط اولیه-مرزی انتقال حرارت:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{xxt} - u = xt, & 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \\ u(x, 0) = x, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \end{cases}$$

اگرچه ما به دنبال حل این مسئله هستیم، لیکن خاصیت زیر که علت آن را در کتاب‌های پیشرفته معادلات دیفرانسیل پاره‌ای می‌توان یافت و خاصیت مشابه آن برای کلیه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای که در این فصل مطرح می‌گردد، برقرار است. در تساوی اول، معادله دیفرانسیل پاره‌ای معرفی شده است. در تساوی دوم شرط اولیه یا وضعیت جواب مطلوب در $t = 0$ داده شده است. در تساوی‌های سوم شرایط مرزی یا وضعیت جواب مطلوب در دو انتهای بازه مکان داده شده است.

خاصیت ۹.۱. مسائل انتقال حرارت با معادلات خطی و ضرایب ثابت همراه با شرایط اولیه و مرزی دارای خواص زیراند.

(۱) این گونه مسائل دارای جواب یگانه‌اند.

(۲) این جواب نسبت به داده‌ها به صورت پیوسته تغییر می‌کند.

(۳) اگر ناهمواری در داده‌ها باشد این ناهمواری در بالاترین مشتق ظاهر می‌گردد و مشتقات مرتبه پایین‌تر هموار هستند.

حل. شرایط مرزی اولین مطلبی است که در حل معادلات پاره‌ای می‌بایستی برقرار شود. این کار با انتخاب پایه مناسب انجام می‌پذیرد. شرایط مرزی دیریکله همگن است، یعنی:

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0.$$

با گرفتن $p = ۱$ در پایه سینوسی جواب مسئله را بر حسب سری فوریه سینوسی به صورت زیر می توان در نظر گرفت. توجه کنید در این صورت شرایط مرزی برقرار است.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin n\pi x$$

این تابع در شرایط مرزی صدق می کند. حال می بایستی $T_n(t)$ ها را طوری تعیین کنیم تا در معادله و شرط اولیه صدق کند. چون u مشتق پذیر است پس سری به طور یکنواخت همگرا است. به این ترتیب جای $\sum$ و مشتق قابل تعویض است. از قرار دادن آن در معادله و شرایط اولیه به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n(t) \sin n\pi x - \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \pi^2 T_n(t) \sin n\pi x - \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \pi^2 \dot{T}_n(t) \sin n\pi x \\ - \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t \sin n\pi x \end{aligned}$$

9

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x$$

که در آنها

$$\begin{aligned} c_n &= 2 \int_0^1 x \sin n\pi x dx = 2x \frac{\cos n\pi x}{-n\pi} \Big|_0^1 - \int_0^1 2 \frac{\cos n\pi x}{-n\pi} dx \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}. \end{aligned}$$

چون پایه کلیه سری های فوق $\{\sin n\pi x\}_{n=1}^{\infty}$ است. پس بایستی تساوی بین ضرایب طرفین تساوی برقرار باشد. به این ترتیب به دست می آوریم:

$$\begin{cases} (1 + n^2 \pi^2) \dot{T}_n(t) + (n^2 \pi^2 - 1) T_n(t) = c_n t \\ T_n(0) = c_n. \end{cases}$$

مسئله فوق یک معادله دیفرانسیل عادی مرتبه اول خطی با ضرایب ثابت است. جواب عمومی معادله را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$T_n(t) = A_n e^{\frac{1-n^2\pi^2}{1+n^2\pi^2}t} + \frac{c_n}{n^2\pi^2-1} \left(t - \frac{1+n^2\pi^2}{1-n^2\pi^2} \right).$$

با اعمال شرایط اولیه به دست می‌آوریم.

$$A_n = c_n \left(\frac{1+n^2\pi^2}{(n^2\pi^2-1)^2} + 1 \right)$$

به این ترتیب جواب مسئله را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1+n^2\pi^2}{(n^2\pi^2-1)^2} + 1 \right) e^{\frac{1-n^2\pi^2}{1+n^2\pi^2}t} + \frac{t - \frac{1+n^2\pi^2}{1-n^2\pi^2}}{n^2\pi^2-1} \right\} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\pi x.$$

مثال ۹.۱. مسئله با شرایط اولیه و مرزی تار مرتعش زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u = xt, & 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0 \\ u(x, 0) = x, & u_t(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) = 0, & u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

حل. شرایط مرزی این مسئله نیومن همگن است. یعنی:

$$u_x \Big|_{x=0} = 0, \quad u_x \Big|_{x=\pi} = 0.$$

هر یک از عناصر پایه کسینوسی با $p = \pi$ ، یعنی $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ ، در شرایط مرزی صدق می‌کند. پس انتظار می‌رود جواب این مسئله را بر حسب این پایه بتوان نوشت. پس می‌گیریم:

$$u(x, t) = \frac{T_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos nx$$

توجه کنید این $u(x, t)$ در شرایط مرزی همگن مسئله صدق می‌کند. حال باید $T_n(t)$ ها را طوری تعیین کنیم تا در معادله و شرایط اولیه صدق کنند. برای این منظور آن را در معادله و شرایط اولیه قرار می‌دهیم. ابتدا با جاگذاری در معادله به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{T}_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n(t) \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 T_n(t) \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ddot{T}_n(t) \cos nx \\ + \frac{T_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos nx = \frac{c_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n t \cos nx \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi \\ c_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

چون در تساوی فوق کلیه سری‌ها بر حسب پایه $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ است. پس باید

$$\begin{cases} \ddot{T}_0(t) + T_0(t) = c_0 t \\ (1 + n^2) \ddot{T}_n(t) + (1 + n^2) T_n(t) = c_n t. \end{cases}$$

جواب عمومی این معادله‌ها را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$T_n(t) = A_n \cos nt + B_n \sin nt + \frac{c_n}{1 + n^2} t, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

حال در شرایط اولیه قرار می‌دهیم.

$$u(x, 0) = \frac{T_0(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos nx = x = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx$$

$$u_t(x, 0) = \frac{\dot{T}_0(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_n(0) \cos nx = 0$$

پس باید

$$\begin{cases} T_n(\circ) = c_n & n = 0, 1, 2, \dots \\ \dot{T}_n(\circ) = 0 & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

با اعمال این شرایط اولیه بر جواب عمومی $T_n(t)$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} T_0(\circ) = A_0 = c_0 \\ T_n(\circ) = A_n = c_n \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{T}_0(\circ) = B_0 + c_0 = 0 \\ \dot{T}_n(\circ) = nB_n + \frac{c_n}{1+n^2} = 0 \end{cases}$$

به این ترتیب به دست می‌آوریم:

$$A_0 = c_0, \quad B_0 = -c_0, \quad A_n = c_n, \quad B_n = -\frac{c_n}{n(1+n^2)}$$

$$T_0(t) = c_0 \cos t - c_0 \sin t + c_0 t$$

$$T_n(t) = c_n \cos nt - \frac{c_n \sin nt}{n(1+n^2)} + \frac{c_n}{1+n^2} t$$

در نتیجه جواب نهایی به صورت زیر است.

$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} (\cos t - \sin t + t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\cos nt - \frac{\sin nt}{n(1+n^2)} + \frac{t}{1+n^2} \right) \cos nx.$$

تذکره. در دو مثال فوق بعد از قرار دادن سری فوریه جواب کلیه سری‌ها بر حسب یک پایه ظاهر شده‌اند. علت این امر این است که مشتقات از مرتبه زوج سینوس و کسینوس از جنس خودشان است و در این معادلات مشتق از مرتبه فرد نسبت به x وجود نداشته است.

تذکره (۱) پایه سینوسی مناسب حل مسائل با شرایط مرزی همگن دیریگله است مشروط بر این که در معادلات مشتق از مرتبه فرد نسبت به x ظاهر نشده باشد.

تذکره (۲) پایه کسینوسی مناسب حل مسائل با شرایط مرزی همگن نیومن است مشروط بر این که در معادلات مشتق از مرتبه فرد نسبت به x ظاهر نشده باشد.

(۳) چنانچه شرایط مرزی غیر همگن باشد ابتدا تابع $u_q(x, t)$ را طوری انتخاب کنید تا در شرایط مرزی غیر همگن صدق کند. سپس بگیرید:

$$u(x, t) = u_q(x, t) + v(x, t)$$

حال مسئله را با تابع مجهول جدید یعنی $v(x, t)$ بنویسید. در این صورت شرایط مرزی همگن است.

(۴) برای $u_q(x, t)$ بینهایت انتخاب وجود دارد. بهتر آن‌ها به صورت زیر است.

(آ) برای شرایط مرزی دیریکله بگیرید $u_q(x, t) = A(t)x + B(t)$ و $A(t)$ و $B(t)$ را طوری انتخاب کنید تا شرایط مرزی غیر همگن برقرار شود.

(ب) برای شرایط مرزی نیومن بگیرید $u_q(x, t) = A(t)x^2 + B(t)x$ و $A(t)$ و $B(t)$ را طوری تعیین کنید تا شرایط مرزی غیر همگن برقرار شود.

مثال ۱۰.۱. مسئله با شرایط مرزی غیر همگن زیر را به مسئله با شرایط مرزی همگن تبدیل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u = xt, & 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \\ u(x, 0) = x, & u_t(x, 0) = 2, \\ u(0, t) = t, & u(1, t) = 1 \end{cases}$$

حل. ابتدا $u_q(x, t)$ را تعیین می‌کنیم. شرایط مرزی دیریکله است.

$$u_q(x, t) = Ax + B$$

$$u_q(0, t) = B = t, \quad u_q(1, t) = A + B = 2$$

پس $B = t$ و $u(x, t) = (2 - t)x + t + v(x, t)$ و آن را در مسئله قرار دهید تا مسئله را

برای تابع مجهول $v(x, t)$ به صورت زیر به دست آورید.

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} + v = xt - (2-t)x - t = 2xt - t - 2x, & 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \\ v(x, 0) = x - 2x = -x, \\ v_t(x, 0) = 2 + x - 1 = x + 1, \\ v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0 \end{cases}$$

این مسئله دیگر با پایه سینوسی قابل حل است.

تذکره ۱) اگر در معادله مشتق فرد ظاهر شده باشد یا شرایط مرزی غیر از دیریکله یا نیومن باشد پایه‌های فوق مفید نخواهد بود. برای این گونه مسائل می‌بایستی پایه مناسبی بسازیم. این کار تحت روش جداسازی و مسئله اشترم-لیوویل در آینده بررسی خواهد شد.

۲) از خود سری فوریه نیز به عنوان پایه استفاده می‌گردد. این پایه را در بخش بعدی معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲.۱. جواب معادله دیفرانسیل پاره‌ای که فقط در شرایط مرزی صدق کند را جواب عمومی مسئله گوییم.

تذکره. جواب عمومی مذکور حاوی ثابت‌هایی است که با اعمال شرایط اولیه مشخص و جواب یگانه مسئله به دست می‌آید.

مثال ۱.۱.۱. برای مثال ۸.۱ جواب عمومی به صورت زیر است:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n e^{\frac{1-n^2\pi^2}{1+n^2\pi^2}t} + \frac{2(-1)^{n+1}}{n(n^2\pi^2-1)} \left(t - \frac{1+n^2\pi^2}{1-n^2\pi^2} \right) \right] \sin n\pi x$$

در این جا A_n ها همان ثابت‌ها هستند که با اعمال شرط اولیه تعیین شده‌اند.

همچنین برای مثال ۹.۱ جواب عمومی عبارت است از

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \left(A_0 \cos t + B_0 \sin t + \pi t \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos nt + B_n \sin nt + \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2(1+n^2)} t \right\} \cos nx$$

در این جا A_n ها و B_n ها همان ثابت هستند که با اعمال شرایط اولیه تعیین شده اند.

تمرین ۳.۱

جواب عمومی معادلات همراه با شرایط مرزی زیر را به دست آورید.

$$۱. \quad u_{tt} - ۲u_t - u_{xx} = xt, \quad 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0$$

$$۲. \quad u_t - ۴u_{xx} = x^۲t, \quad 0 \leq x \leq ۱, t \geq 0 \\ u_x(0, t) = t, \quad u_x(1, t) = ۱ + t$$

$$۳. \quad u_{tt} + u_{xxxx} = xt, \quad 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0 \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = ۱ + t, \quad u_{xxx}(0, t) = 0, \quad u_{xxx}(\pi, t) = 0$$

مسائل با شرایط اولیه و مرزی زیر را حل کنید.

$$۴. \quad u_t - ۴u_{xxt} - u_{xx} + u = x^۲t, \quad 0 \leq x \leq ۱, t \geq 0 \\ u(x, 0) = x, \quad u_x(0, t) = t, \quad u_x(1, t) = 0$$

$$۵. \quad u_{tt} - ۴u_{xxt} - u_{xx} + u = x^۲t, \quad 0 \leq x \leq ۱, t \geq 0 \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = x^۲, \quad u(0, t) = t, \quad u(1, t) = ۱$$

$$۶. \quad u_{tt} + u_{xxxx} - ۲u_{xxtt} + ۴u = xt, \quad 0 \leq x \leq ۱, t \geq 0 \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = t, \quad u(1, t) = 0, \quad u_{xx}(0, t) = 0, \quad u_{xx}(1, t) = t$$

۴.۱ سری فوریه مختلط

یکی از کاربردهای اعداد مختلط ساده محاسبه کردن محاسبات حقیقی و فشرده‌سازی فرمول‌های مهم است. هدف از این بخش این است که با استفاده از اعداد مختلط فرمول فشرده‌ای برای سری فوریه به‌دست آوریم. خواهیم دید که محاسبه ضرایب فوریه نیز آسان‌تر می‌گردد. برای انجام این کار نیاز به مفاهیم نو است که ابتدا می‌آوریم.

تابع حقیقی-مختلط: تابع $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ که در آن $t \in \mathbb{R}$ و $f_1(t)$ و $f_2(t)$ دو تابع حقیقی‌اند را یک تابع حقیقی-مختلط گوییم. با توجه به تعریف مشتق و انتگرال متغیر حقیقی، مانند بردارها، خاصیت زیر برقرار است.

خاصیت ۱۰.۱. برای تابع حقیقی-مختلط مشتق و انتگرال را به‌صورت زیر داریم.

$$f'(t) = f_1'(t) + if_2'(t)$$

$$\int f(t) dt = \int f_1(t) dt + i \int f_2(t) dt$$

تذکر. کلیه قواعد و فرمول‌های مشتق و انتگرال تابع حقیقی برای این تابع، از جمله انتگرال‌گیری جزء به جزء برقرار است.

تابع نمائی موهومی: تابع حقیقی-مختلط $\cos t + i \sin t$ را تابع نمائی موهومی گوییم و با e^{it} نشان می‌دهیم. یعنی:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

تذکر. این تابع نمایی کلیه خواص تابع نمایی حقیقی را دارد. به‌خصوص

$$\frac{d}{dt} e^{it} = ie^{it}, \quad \int e^{it} dt = \frac{1}{i} e^{it} + C.$$

همچنین برای $a, b, t \in \mathbb{R}$ می‌گیریم:

$$e^{(a+ib)t} = e^{at} \cdot e^{ibt}.$$

این تابع نیز کلیه خواص تابع نمائی حقیقی را دارا است.

اکنون سری فوریه تابع تناوبی $f(x)$ با دوره تناوب $2p > 0$ را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx, \quad b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx.$$

با توجه به مطالب فوق داریم:

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t$$

در نتیجه

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

با قرار دادن این مقادیر سینوس و کسینوس در سری فوریه به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{\frac{in\pi x}{p}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{-\frac{in\pi x}{p}} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{\frac{in\pi x}{p}} + \sum_{-n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{-n}}{2} - \frac{b_{-n}}{2i} \right) e^{\frac{in\pi x}{p}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{p}}. \end{aligned}$$

که در آن

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} & n \geq 1 \\ \frac{a_0}{2} & n = 0 \\ \frac{a_{-n}}{2} - \frac{b_{-n}}{2i} & n \leq -1 \end{cases}$$

پس داریم:

$$c_0 = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) dx.$$

برای $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx + \frac{1}{2pi} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx \\
 &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{p} - i \sin \frac{n\pi x}{p} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) e^{-\frac{in\pi x}{p}} dx
 \end{aligned}$$

و برای $n \leq -1$:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{a_{-n}}{2} - \frac{b_{-n}}{2i} = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx + \frac{1}{2pi} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx \\
 &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) e^{-\frac{in\pi x}{p}} dx.
 \end{aligned}$$

بدین ترتیب

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{p}}, \quad c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) e^{-\frac{in\pi x}{p}} dx.$$

تذکره ۱) سری فوق را سری فوریه مختلط f و c_n ها را ضرایب فوریه مختلط گویند.**۲)** علامت منفی در تابع نمایی از فرمول c_n به فرمول سری فوریه قابل انتقال است.**۳)** محاسبه c_n را بعضاً می‌بایستی جداگانه محاسبه نمود.**۴)** همیشه مقصود از سری فوریه، سری فوریه مختلط است.**مثال ۱۲.۱.** سری فوریه تابع $f(x) = xe^x$, $-\pi \leq x \leq \pi$ و $f(x + 2\pi) = f(x)$ را

به دست آورید.

حل. کافیت c_n ها را محاسبه کنیم. چون $\Im p = \pi$ پس $p = \pi$.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{(1-in)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x}{1-in} e^{(1-in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{1-in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi e^{\pi} (-1)^n}{1-in} + \frac{\pi e^{-\pi} (-1)^n}{1-in} - \frac{1}{(1-in)^2} e^{(1-in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right). \end{aligned}$$

به این ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(-1)^n \cosh \pi}{1-in} - \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n}{(1-in)^2} \sinh \pi \\ f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-in} \left(\cosh \pi - \frac{\sinh \pi}{\pi(1-in)} \right) e^{inx}. \end{aligned}$$

حال به دنبال این هستیم که از سری فوریه مختلط برای حل مسائل معادلات پاره ای استفاده کنیم. خاصیت زیر راه گشا است.

خاصیت ۱۱.۱. دنباله $\left\{ e^{\frac{in\pi x}{p}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ یک پایه برای فضای برداری زیر است.

$$\begin{aligned} V_0 &= \left\{ f : [-p, p] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ پیوسته, } \Im p > 0, \right. \\ &\quad \left. f'(-p) = f'(p) \text{ و } f(-p) = f(p), \text{ قطعه به قطعه پیوسته, } \right\} \end{aligned}$$

علت. بگیرید $g(x) = f(x)$, $-p \leq x \leq p$ و $g(x + \Im p) = g(x)$. در این صورت $g(x)$, $g'(x)$ و $g''(x)$ تناوبی با دوره تناوب $\Im p$ است. به علاوه g پیوسته و g' و g'' قطعه به قطعه و g' در نقاط $\pm np$, $n \in \mathbb{N}$, پیوسته است. بنابراین

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{p}}, \quad g'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{in\pi}{p} e^{\frac{in\pi x}{p}}$$

و تساوی در نقاط $\pm np$ برقرار است. بدین ترتیب به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{p}}, \quad f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{in\pi x}{p} e^{\frac{in\pi x}{p}}$$

و تساوی در نقاط $\pm np$ برقرار است. پس $\left\{e^{\frac{in\pi x}{p}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ یک پایه برای V_5 است.

تذکره. پایه نمایی فوق مناسب حل مسائل با شرایط مرزی متناوب است.

شرایط مرزی متناوب: چنانچه دامنه متغیر x در یک مسئله معادله دیفرانسیل بازه

$[a, b]$ و u تابع مجهول آن مسئله باشد. شرایط مرزی

$$u|_{x=a} = u|_{x=b}, \quad u_x|_{x=a} = u_x|_{x=b}$$

را شرایط مرزی متناوب گویند.

مثال ۱۳.۱. مطلوب است حل مسئله انتقال حرارت

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u_{xt} - u + xt, & -\pi \leq x \leq \pi, t \geq 0 \\ u(x, 0) = x, \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t), \quad u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) \end{cases}$$

حل. شرایط مرزی مسئله همگن متناوب است. پس پایه مناسب حل آن پایه نمایی با

$p = \pi$ است. یعنی $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

حال می‌گیریم:

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(t) e^{inx}$$

از قرار دادن آن در معادله به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{T}_n(t) e^{inx} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 T_n(t) e^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\dot{T}_n(t) i n e^{inx} \\ &\quad - \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(t) e^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n t e^{inx} \end{aligned}$$

که در آن

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[x \frac{e^{-inx}}{-in} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx \right]$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{(-1)^{n+1}}{in} & n \neq 0. \end{cases}$$

کلیه جملات بر حسب پایه نمائی است، پس

$$\dot{T}_n(t) = -n^2 T_n(t) + in \dot{T}_n(t) - T_n(t) + c_n t$$

یا

$$(1 - in) \dot{T}_n(t) + (n^2 + 1) T_n = c_n t.$$

اگرچه در این معادله i ظاهر شده است لیکن حل آن مانند معادله خطی مرتبه اول با ضرایب حقیقی ثابت قابل انجام است. معادله مشخصه $0 = (1 - in)r + n^2 + 1$ و

$$r = \frac{1 + n^2}{in - 1}.$$

پس جواب عمومی آن می‌شود:

$$T_n(t) = A_n e^{\frac{1+n^2}{1-in}t} + \frac{c_n}{n^2+1} \left(t - \frac{1-in}{n^2+1} \right).$$

به این ترتیب جواب عمومی مسئله به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ A_n e^{\frac{1+n^2}{1-in}t} + \frac{c_n}{n^2+1} \left(t - \frac{1-in}{n^2+1} \right) \right\} e^{inx}.$$

برای تعیین جواب مطلوب مسئله می‌بایستی شرایط اولیه را بر این جواب عمومی اعمال کنیم.

$$u(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(A_n - c_n \frac{1-in}{(n^2+1)^2} \right) e^{inx} = x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

به این ترتیب $A_n = c_n \left(1 + \frac{1-2in}{(n^2+1)^2} \right)$ و

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ c_n \left(1 + \frac{1-2in}{(n^2+1)^2} \right) e^{\frac{1+n^2}{1-2in}t} + \frac{c_n}{n^2+1} \left(t - \frac{1-2in}{n^2+1} \right) \right\} e^{inx}.$$

نکته. اگرچه در این جواب i ظاهر شده است لیکن این تابع یک تابع حقیقی است.

تذکر. تابع $u_q(x, t)$ مناسب شرایط مرزی متناوب از فرمول زیر قابل حصول است.

$$u_q(x, t) = A(t)x^2 + B(t)x.$$

تذکر. چون کلیه مشتقات پایه نمائی از جنس خودش است بنابراین این پایه برای هر معادله خطی با ضرایب ثابت و شرایط مرزی متناوب مناسب است.

تمرین ۴.۱

جواب عمومی معادلات همراه با شرایط مرزی زیر را به دست آورید.

۱. $u_t - 4u_{xx} = 5e^{-2x}, \quad -1 \leq x \leq 1, t \geq 0.$

$$u(-1, t) = t + u(1, t), \quad u_x(-1, t) = u_x(1, t)$$

۲. $u_{tt} - u_{xx} + u_{xt} + u = xt, \quad -\pi \leq x \leq \pi, t \geq 0.$

$$u(-\pi, t) = u(\pi, t) + t, \quad u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) - t$$

۳. $u_{tt} + u_{xxxx} - u_{xxtt} + 4u = e^x t, \quad -1 \leq x \leq 1, t \geq 0.$

$$u(-1, t) = u(1, t) + t, \quad u_x(-1, t) = u_x(1, t) - t,$$

$$u_{xx}(-1, t) = u_{xx}(1, t) + 1, \quad u_{xxx}(-1, t) = u_{xxx}(1, t)$$

مسائل با شرایط اولیه و مرزی زیر را حل کنید.

$$۴. \quad u_t - u_{xx} + ۴u_{xt} + u = e^{۳x}, \quad -۱ \leq x \leq ۱, t \geq ۰$$

$$u(x, ۰) = x,$$

$$u(-۱, t) = e^t + u(۱, t), \quad u_x(-۱, t) = u_x(۱, t)$$

$$۵. \quad u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u = e^t x, \quad -\pi \leq x \leq \pi, t \geq ۰$$

$$u(x, ۰) = e^x, \quad u_t(x, ۰) = e^{-x},$$

$$u(-\pi, t) = t + u(\pi, t), \quad u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) + ۱$$

$$۶. \quad u_{tt} + u_{xxxx} + u = xe^t, \quad ۰ \leq x \leq ۲, t \geq ۰$$

$$u(x, ۰) = x, \quad u_t(x, ۰) = e^x,$$

$$u(۰, t) = u(۲, t), \quad u_x(۰, t) = u_x(۲, t) + t,$$

$$u_{xx}(۰, t) = u_{xx}(۲, t) + ۱, \quad u_{xxx}(۰, t) = u_{xxx}(۲, t)$$

۵.۱ مسئله اشترم-لیوویل

تا به حال در بخش‌های گذشته سه نوع پایه به دست آوردیم که هر یک از آن‌ها دسته خاصی از مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را حل می‌کند.

(۱) پایه سینوسی مناسب حل مسائل با شرایط مرزی دیریکله بدون حضور مشتق از مرتبه فرد نسبت به x در معادله است.

(۲) پایه کسینوسی مناسب حل مسائل با شرایط مرزی نیومن بدون حضور مشتق از مرتبه فرد نسبت به x در معادله است.

(۳) پایه نمایی مناسب حل مسائل با شرایط مرزی متناوب است.

لیکن مسائل زیاد دیگری وجود دارد که پایه‌های فوق برای آن‌ها قابل کاربرد نیست. هدف از این بخش این است که روشی را ارائه دهیم تا پایه مناسب شرایط مرزی گوناگون را تولید کند. ابزار این کار مسئله اشترم-لیوویل است.

معادله مرتبه دوم

$$a_1(x)y'' + a_2(x)y' + (a_3(x) + \lambda) = 0, \quad a \leq x \leq b$$

که در آن $a_1(x) > 0$ و $a_2(x)$ و $a_3(x)$ توابعی پیوسته و λ یک پارامتر است، معادله اشترم-لیوویل گوییم. علت این نامگذاری به خاطر حضور پارامتر λ در آن است. همچنین شرایط مرزی همگن

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

را شرایط مرزی اشترم-لیوویل گوییم که در آن $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ مقادیری ثابت هستند و $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$ و $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$. معادله اشترم-لیوویل همراه با شرایط مرزی اشترم-لیوویل را مسئله اشترم لیوویل (منظم) گویند. مقصود از حل این مسئله تعیین کلیه مقادیر λ است که به ازای هر یک از آنها این مسئله جواب غیر صفر دارد و تعیین این جواب غیر صفر است. این کار یک کار مقدماتی است و با تعیین جواب عمومی معادله و اعمال شرایط مرزی این مقادیر λ و این جواب‌های خاص قابل تعیین است.

مثال ۱۴.۱. مسئله اشترم-لیوویل زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 \leq x \leq p \\ y(0) = 0, & y'(p) = 0 \end{cases}$$

حل. بسته به مقدار λ صورت جواب عمومی معادله فوق عوض می‌شود.

حالت ۱: $\lambda = 0$. در این حالت صورت جواب عمومی می‌شود:

$$y = c_1 x + c_2.$$

با اعمال شرایط مرزی برای جواب عمومی به دست می‌آوریم: $c_1 = c_2 = 0$. پس برای $\lambda = 0$ جواب غیر صفر نداریم.

حالت ۲: $\lambda = -\alpha^2 < 0$. در این حالت

$$y'' - \alpha^2 y = 0$$

$$r^2 - \alpha^2 = 0 \implies r = \pm \alpha$$

$$y = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \sinh \alpha x$$

$$y(0) = 0 \implies c_1 = 0$$

$$y'(p) = 0 \implies c_2 \cosh \alpha p = 0 \implies c_2 = 0$$

پس در این حالت نیز جواب غیر صفر نداریم.

حالت ۳: $\lambda = \beta^2 > 0$. در این حالت

$$y'' + \beta^2 y = 0$$

$$r^2 + \beta^2 = 0 \implies r = \pm i\beta$$

$$y = c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x$$

$$y(0) = 0 \implies c_1 = 0$$

$$y'(p) = 0 \implies c_2 \beta \cos \beta p = 0$$

برای داشتن جواب غیر صفر کفایت بگیریم $\cos \beta p = 0$ یا

$$\beta = \frac{\pi}{p} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

به این ترتیب به دست می آوریم:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2}{p^2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2, \quad y_n(x) = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{p} x.$$

که برای $n = 0, 1, 2, \dots$ بینهایت جواب متفاوت به دست می آید.

تذکره. خواهیم دید که $\left\{ \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{p} x \right\}_{n=0}^{\infty}$ یک پایه برای شرایط مرزی غیر دیریکله و

غیر نیومن

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=p} = 0$$

است. این شرایط مرزی را شرایط مرزی روبین چپ می نامیم.

دنبال این هستیم که از جواب‌های مسئله اشترم-لیوویل به‌عنوان پایه برای حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای استفاده کنیم. مطالب زیر را در این جهت داریم.

مقادیر خاص و توابع خاص: اگر برای $\lambda = \lambda_0$ در یک مسئله اشترم-لیوویل جواب غیر صفر $y_0(x)$ به‌دست آید. λ_0 را یک مقدار خاص یا یک مقدار ویژه این مسئله و $y_0(x)$ را یک تابع خاص یا یک تابع ویژه وابسته به این مقدار خاص گویند.

ضرب داخلی: فرض کنید $s(x) > 0$ یک تابع پیوسته با دامنه $[a, b]$ و مجموعه V فضای برداری توابع قطعه‌به‌قطعه پیوسته با دامنه $[a, b]$ باشد. برای $f, g \in V$ مقدار $\int_a^b s(x)f(x)g(x) dx$ را ضرب داخلی f و g نسبت به تابع وزن $s(x)$ گویند و با $\langle f, g \rangle$ نشان می‌دهند. می‌گویند f و g نسبت به این ضرب داخلی بر هم عموداند اگر $\langle f, g \rangle = 0$.

توجه کنید ضرب داخلی فوق یک تابع از $V \times V$ به $\mathbb{R}$ است. این تابع در خواص زیر صدق می‌کند.

(۱) برای $a, b \in \mathbb{R}$ و $f_1, f_2, g \in V$ داریم:

$$\langle af_1 + bf_2, g \rangle = a\langle f_1, g \rangle + b\langle f_2, g \rangle.$$

(۲) برای $f, g \in V$ داریم $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$.

(۳) برای $f \in V$ داریم $\langle f, f \rangle \geq 0$ و $\langle f, f \rangle = 0$ تنها برای $f = 0$ برقرار است.

برای بیان خواص مقادیر خاص و توابع خاص مسئله اشترم-لیوویل نیاز به تابع $q(x)$ و $s(x)$ زیر است که از روی ضرایب معادله اشترم-لیوویل به‌دست می‌آید.

$$q(x) = \frac{a_2(x)}{a_1(x)}p(x), \quad s(x) = \frac{p(x)}{a_1(x)}$$

که در آن

$$p(x) = e^{\int_a^x \frac{a_2(x)}{a_1(x)} dx}.$$

با استفاده از این توابع معادله اشترم-لیوویل را به صورت زیر می توان نوشت. این معادله را فرم کانونیک معادله اشترم-لیوویل گویند.

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda s(x))y = 0$$

خواص مقادیر خاص و توابع خاص را به صورت زیر داریم.

خاصیت ۱۲.۱ (مقادیر خاص). کلیه مقادیر خاص یک مسئله اشترم-لیوویل اعداد حقیقی اند. این مجموعه از اعداد حقیقی شمارا و دارای حداقل مقدارند. آنها را به ترتیب صعودی می توان منظم نمود. یعنی آنها را به صورت دنباله $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ می توان نوشت و $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ به علاوه $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$.

خاصیت ۱۳.۱ (توابع خاص). به ازای هر مقدار خاص دقیقاً یک تابع خاص، صرف نظر از ضریب عددی، داریم. همچنین توابع خاص مقادیر خاص متفاوت نسبت به تابع وزن $s(x) = \frac{p(x)}{a_1(x)}$ برهم عمودند.

نتیجه اساسی را در خاصیت زیر داریم که بیانگر پایه بودن توابع خاص است.

خاصیت ۱۴.۱ (سری فوریه تعمیم یافته). فرض کنید $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ مقادیر خاص و $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ توابع خاص منطبق بر آن در یک مسئله اشترم-لیوویل باشد. آن گاه $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک پایه برای فضای برداری زیر است.

$$V = \left\{ f \text{ و } f' \text{ قطعه به قطعه پیوسته، } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \begin{aligned} &\beta_1 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0 \text{ و } \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f'(a) = 0 \end{aligned} \right\}$$

یعنی دنباله عددی $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ موجود است به طوری که

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x).$$

در نقاط پیوستگی f مقدار سری برابر با مقدار تابع و در نقاط ناپیوستگی f مقدار سری برابر با میانگین حد چپ و راست f در آن نقطه است. به علاوه c_n ها از فرمول زیر قابل حصول است.

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle}$$

تذکره ۱) سری فوق را سری فوریه تعمیم یافته f گویند. تساوی بین تابع و سری فوریه تعمیم یافته آن، تساوی نقطه‌وار به جز احتمالاً در تعدادی متنهای نقطه خواهد بود.

۲) اگر $f(x)$ در شرایط مرزی اشترم-لیوویل صدق کند در این صورت سری فوریه تعمیم یافته آن نیز در این شرایط مرزی صدق می‌کند. لیکن تساوی بین $f(x)$ و سری فوریه تعمیم یافته آن در نقاط مرزی ممکن است برقرار نباشد.

۳) c_n ها را ضرایب فوریه تعمیم یافته گویند.

مثال ۱۵.۱. تابع $f(x) = x, 0 \leq x \leq p$ را بر حسب توابع خاص مسئله اشترم-لیوویل زیر بسط دهید.

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y'(0) = 0, \quad y(p) = 0 \end{cases}$$

حل. ابتدا مقادیر خاص و توابع خاص را به دست می‌آوریم.

حالت ۱: $\lambda = 0$

$$y'' = 0 \implies y = c_1 x + c_2$$

$$y'(0) = 0 \implies c_1 = 0$$

$$y(p) = 0 \implies c_2 = 0$$

پس $\lambda = 0$ ، یک مقدار خاص نیست.

حالت ۲: $\lambda = -\alpha^2 < 0$. در این حالت جواب عمومی معادله می‌شود:

$$y = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \sinh \alpha x$$

$$y'(0) = 0 \implies \alpha c_2 = 0 \implies c_2 = 0$$

$$y(p) = 0 \implies c_1 \cosh \alpha p = 0 \implies c_1 = 0$$

پس مقدار خاص منفی نداریم.

حالت ۳: $\lambda = \beta^2 > 0$. در این حالت جواب عمومی به صورت زیر است.

$$y = c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x$$

$$y'(0) = 0 \implies \beta c_2 = 0 \implies c_2 = 0$$

$$y(p) = 0 \implies c_1 \cos \beta p = 0$$

در نتیجه برای جواب غیر صفر باید $\beta p = (n + \frac{1}{2})\pi$ یا

$$\beta = (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{p}, \quad \lambda = (n + \frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{p^2}$$

9

$$y_n(x) = \cos(n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{p}x.$$

پس پایه حاصل از این مسئله اشترم-لیوویل به صورت زیر است.

$$\left\{ \cos(n + \frac{1}{2})\frac{\pi x}{p} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

با توجه به خاصیت اخیر امکان بسط تابع قطعه به قطعه پیوسته f با دامنه $[0, p]$

بر حسب این پایه وجود دارد. یعنی:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n + \frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}$$

که در آن ضرایب به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$c_n = \frac{\int_0^p f(x) \cos(n + \frac{1}{2})\frac{\pi x}{p} dx}{\int_0^p \cos^2(n + \frac{1}{2})\frac{\pi x}{p} dx} = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos(n + \frac{1}{2})\frac{\pi x}{p} dx.$$

در نقاط مرزی بازه ممکن است تساوی بین سری و تابع برقرار نباشد.

به‌عنوان مثال برای تابع $f(x) = x$, $0 \leq x \leq p$

$$c_n = \frac{2}{p} \int_0^p x \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{p} dx = \frac{2}{p} \left\{ x \frac{p}{\pi(n + \frac{1}{2})} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{p} \right. \\ \left. - \int_0^p \frac{p}{\pi(n + \frac{1}{2})} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{p} dx \right\} = \frac{2p(-1)^n}{(2n+1)\pi} - \frac{\lambda p}{(2n+1)^2 \pi^2}.$$

بدین ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2p(-1)^n}{(2n+1)\pi} - \frac{\lambda p}{(2n+1)^2 \pi^2} \right] \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{p}, \quad 0 \leq x \leq p.$$

مشاهده می‌شود در دو نقطه مرزی تساوی برقرار نیست.

تذکره. نظر به این که کلیه مقادیر خاص $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ و توابع خاص وابسته به آنها $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ در معادله اشترم-لیوویل صدق می‌کند، یعنی داریم:

$$a_1(x)\phi_n''(x) + a_2(x)\phi_n'(x) + (a_3 + \lambda_n)\phi_n = 0$$

یا

$$a_1(x)\phi_n'' + a_2(x)\phi_n' = -a_3(x)\phi_n - \lambda_n\phi_n.$$

از این پایه برای مسائلی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای می‌توان استفاده کرد که شرایط زیر برقرار باشد.

(۱) شرایط مرزی مسئله با شرایط مرزی مسئله اشترم-لیوویل تطبیق داشته باشد.
یعنی:

$$\alpha_1 u + \alpha_2 u_x \Big|_{x=a} = 0$$

$$\beta_1 u + \beta_2 u_x \Big|_{x=b} = 0$$

(۲) مشتقات ظاهر شده نسبت به x در معادله به شکل فاکتورهایی از مشتقات ظاهر شده در معادله اشتورم-لیوویل وابسته باشد. یعنی به شکل:

$$a_1(x)u_{xx} + a_2(x)u_x$$

یا

$$(a_1(x)u_{xx} + a_2(x)u_x)_t \quad \text{و} \quad (a_1(x)u_{xx} + a_2(x)u_x)_{tt}$$

که در آن منظور از اندیس t مشتق نسبت به t است.

به عنوان مثال پایه $\left\{ \cos\left(n + \frac{1}{p}\right) \frac{\pi x}{p} \right\}_{n=0}^{\infty}$ مناسب حل مسایل زیر است.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = xt, & 0 \leq x \leq p, t \geq 0 \\ u_x(0, t) = t^2, \quad u(p, t) = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xxt} + u_{xxxx} - u_{xx} + u = xt, & 0 \leq x \leq p, t \geq 0 \\ u_x(0, t) = t, \quad u(p, t) = 1, \quad u_{xxx}(0, t) = t^2, \quad u_{xx}(p, t) = 2 \end{cases}$$

تذکر. پایه $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{p} \right\}_{n=1}^{\infty}$ توابع خاص مسئله اشترم-لیوویل زیر است.

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(p) = 0.$$

همچنین پایه $\left\{ \cos \frac{n\pi x}{p} \right\}_{n=0}^{\infty}$ توابع خاص مسئله اشترم-لیوویل زیر است.

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(p) = 0.$$

تا به حال پنج پایه به دست آورده ایم. در این جا درباره هر یک از آنها توضیحاتی داریم.

(۱) پایه سینوسی قدیم یعنی $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{p} \right\}_{n=1}^{\infty}$: این پایه مناسب حل مسائل با شرایط مرزی دیریکله یعنی، $u|_{x=0}$ و $u|_{x=p}$ است مشروط بر این که در معادله مشتق فرد نسبت به x ظاهر نشده باشد.

(۲) پایه کسینوسی قدیم یعنی $\left\{ \cos \frac{n\pi x}{p} \right\}_{n=0}^{\infty}$: این پایه مناسب حل مسائل با شرایط مرزی نیومن یعنی، $u_x|_{x=0}$ و $u_x|_{x=p}$ است مشروط بر این که در معادله مشتق فرد نسبت به x نداشته باشیم.

(۳) پایه نمائی یعنی $\left\{ e^{\frac{in\pi x}{p}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$: این پایه مناسب حل هر مسئله با شرایط مرزی متناوب یعنی، $u|_{x=p} - u|_{x=-p}$ و $u_x|_{x=p} - u_x|_{x=-p}$ است.

(۴) پایه سینوسی جدید یعنی $\left\{ \sin(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi x}{p} \right\}_{n=0}^{\infty}$: این پایه مناسب حل مسائل با شرایط مرزی روبین چپ یعنی، $u_x|_{x=0}$ و $u|_{x=p}$ داده شده باشد و مشتق از مرتبه فرد نسبت به x در معادله نباشد.

(۵) پایه کسینوسی جدید یعنی $\left\{ \cos(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi x}{p} \right\}_{n=0}^{\infty}$: این پایه مناسب حل مسائل با شرایط مرزی روبین راست یعنی، $u|_{x=0}$ و $u_x|_{x=p}$ است مشروط بر این که مشتق از مرتبه فرد نسبت به x در معادله ظاهر نشده باشد.

تذکره. برای پایه‌های سینوسی‌ها و کسینوسی‌ها ضرایب فوریه از فرمول

$$c_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \phi_n(x) dx$$

به دست می‌آیند و برای پایه نمائی ضرایب فوریه از فرمول

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_{-p}^p f(x) \phi_n(x) dx.$$

محاسبه می‌شوند.

تذکره. پایه‌ای مناسب حل یک مسئله است اگر

(۱) در شرایط مرزی همگن آن مسئله صدق کند.

(۲) جواب مسئله را بر حسب این پایه بنویسیم و در معادله قرار دهیم کلیه سری‌های فوریه ظاهر شده بر حسب این پایه باشد.

مثال ۱۶.۱. پایه $\left\{ \sin\left(n + \frac{1}{\pi}\right)x \right\}_{n=0}^{\infty}$ مناسب حل مسئله زیر است.

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxxt} - u_{xxtt} - u_{xx} + u = xt, & 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0 \\ u(x, 0) = x, & u_t(x, 0) = x^2 \\ u(0, t) = t, & u_x(\pi, t) = t^2, \quad u_{xx}(0, t) = 1, \quad u_{xxx}(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

تذکر. مسائل اشترم-لیوویل مرتبه بالاتر نیز به صورت مشابه قابل تعریف است.

تمرین ۵.۱

مسائل اشترم-لیوویل زیر را حل کنید.

۱. $y'' + 2y' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

۲. $y'' + 2y' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$

۳. $y'' - 2y' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$

۴. $x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 0$

۵. $(1+x)^2 y'' + 2(1+x)y' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$

۶. تابع $f(x) = x^2$ را روی $[0, \pi]$ بر حسب توابع خاص مسئله اشترم-لیوویل زیر بسط دهید.

$$y'' + 2y' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

۶.۱ روش جداسازی

در بخش قبل تحت عنوان مسئله اشترم-لیوویل دیدیم چگونه برای هر شرط مرزی اشترم-لیوویل با استفاده از معادله آن، پایه تولید کنیم. در این بخش دنبال این هستیم که برای یک مسئله داده شده معادلات با مشتقات پاره‌ای با شرایط اولیه و مرزی چگونه مسئله اشترم-لیوویل مناسب آن را بنویسیم و با استفاده از پایه حاصل از این مسئله، مسئله معادله پاره‌ای را حل کنیم.

فرض کنید u تابع مجهول معادله و x یکی از متغیرهای مستقل مکان مسئله و بخواهیم معادله اشترم-لیوویل مربوط به x را بنویسیم. برای اینکار ابتدا کلیه جملات حاوی مشتق نسبت به x را از معادله جدا و کنار هم می‌نویسیم. سپس نسبت به مشتقات یکسان متغیرهای دیگر فاکتور می‌گیریم. هر یک از مشتقات نسبت به x را برابر $-\lambda u$ قرار می‌دهیم. به این ترتیب چند معادله اشترم-لیوویل به دست می‌آید. هر یک از این معادلات اشترم-لیوویل را با شرایط مرزی مسئله حل می‌کنیم. چنانچه پایه‌های حاصل یکسان باشد. این پایه مناسب حل مسئله است.

مثال ۱۷.۱. پایه مناسب مسئله زیر را بیابید.

$$\begin{cases} u_t + u_{xxxx} - u_{xxtt} + u = xt, & 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0 \\ u(x, 0) = x, & u_t(x, 0) = x^2, \\ u(0, t) = t, & u_x(\pi, t) = t^2, \quad u_{xx}(0, t) = 1, \quad u_{xxx}(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

حل. جملات مربوط به مشتقات x عبارتند از

$$u_{xxxx} \quad , \quad u_{xxtt}.$$

پایه باید طوری باشد که این مشتقات را بر حسب u بیان کند. پس مسئله اشترم-لیوویل باید طوری باشد که داشته باشیم:

$$u_{xxxx} = -\lambda u \quad , \quad u_{xxtt} = -\lambda' u_{tt}.$$

پس معادلات اشترم-لیوویل می شود:

$$y^{(4)} + \lambda y = 0, \quad y'' + \lambda' y = 0.$$

شرایط مرزی اشترم-لیوویل نیز به صورت زیر است.

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(\pi) = 0.$$

مسئله اشترم-لیوویل

$$y'' + \lambda' y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

دارای مقادیر خاص $\lambda'_n = (n + \frac{1}{4})^2$ و توابع خاص $\{\sin(n + \frac{1}{4})x\}_{n=0}^{\infty}$ می باشد. مسئله اشترم-لیوویل دیگر را به صورت زیر داریم.

$$\begin{cases} y^{(4)} + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(\pi) = 0. \end{cases}$$

حالت ۱: $\lambda = 0$. در این حالت جواب عمومی به صورت زیر است.

$$y = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4.$$

با اعمال شرایط مرزی به دست می آوریم، $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. پس $\lambda = 0$ مقدار خاص نیست.

حالت ۲: $\lambda = -\alpha^4 < 0$. در این حالت معادله عبارت است با

$$y^{(4)} + \alpha^4 y = 0$$

$$r^4 + \alpha^4 = 0 \implies r = \alpha \sqrt[4]{-1} = \pm \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

پس جواب عمومی را به صورت زیر داریم:

$$y = e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}x} \left(c_1 \cos \frac{\alpha}{\sqrt{2}}x + c_2 \sin \frac{\alpha}{\sqrt{2}}x \right) + e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}x} \left(c_3 \cos \frac{\alpha}{\sqrt{2}}x + c_4 \sin \frac{\alpha}{\sqrt{2}}x \right).$$

با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آوریم، $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. پس مقدار خاص منفی نداریم.

حالت ۳: $\lambda = \beta^4$. معادله را به صورت $y^{(4)} + y = 0$ داریم.

$$r^4 - \beta^4 = 0 \implies r = \pm\beta, \pm i\beta$$

$$y = c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x + c_3 \cosh \beta x + c_4 \sinh \beta x$$

$$y(0) = 0 \implies c_1 + c_3 = 0$$

$$y''(0) = 0 \implies -c_1 + c_3 = 0.$$

پس $c_1 = c_3 = 0$. همچنین

$$y'(\pi) = \beta c_2 \cos \beta \pi + \beta c_4 \cosh \beta \pi = 0$$

$$y'''(\pi) = -\beta^3 c_2 \cos \beta \pi + \beta^3 c_4 \cosh \beta \pi = 0.$$

به این ترتیب برای جواب غیر صفر به دست می‌آوریم.

$$c_4 \cosh \beta \pi = 0 \implies c_4 = 0$$

$$c_2 \cos \beta \pi = 0 \implies \beta \pi = (n + \frac{1}{2})\pi.$$

$$y_n = \sin(n + \frac{1}{2})x \text{ و } \lambda_n = (n + \frac{1}{2})^2, \beta_n = (n + \frac{1}{2})$$

پایه حاصل پایه $\{\sin(n + \frac{1}{2})x\}_{n=0}^{\infty}$ می‌باشد. پس این پایه مسئله را حل می‌کند. یعنی ابتدا می‌بایستی $u_q(x, t)$ را از روی شرایط مرزی تعیین کنیم. سپس با تغییر تابع مجهول $u(x, t) = u_q(x, t) + v(x, t)$ مسئله را برای v بنویسیم تا شرایط مرزی همگن گردد. در انتها می‌گیریم:

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin(n + \frac{1}{2})x.$$

از قرار دادن v در مسئله و تعیین $T_n(t)$ ها حل مسئله کامل می‌شود.

مثال ۱۸.۱. پایه‌های مناسب حل مسئله زیر را بیابید.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u_{xxyy} + u_{zz} + 2u_z + u + xyz t, & 0 \leq x, y, z \leq \pi, t \geq 0 \\ u(x, y, z, 0) = xyz, \\ u(0, y, z, t) = 0, \quad u_x(\pi, y, z, t) = 0, \\ u_y(x, 0, z, t) = 0, \quad u(x, \pi, z, t) = 0, \\ u(x, y, 0, t) = 0, \quad u(x, y, \pi, t) = 0 \end{cases}$$

حل. مشتقات مربوط به x را به صورت زیر داریم:

$$u_{xx} \quad , \quad u_{xxyy}.$$

پس مسئله اشترم-لیوویل باید تساوی‌های زیر را به دست دهد:

$$u_{xx} = -\lambda u \quad , \quad u_{xxyy} = -\lambda' u_{yy}.$$

پس مسئله اشترم-لیوویل x را به صورت زیر داریم.

$$X''(x) + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(\pi) = 0.$$

از حل این مسئله پایه سینوسی دوم با $p = \pi$ به دست می‌آید. یعنی:

$$\left\{ \sin\left(n + \frac{1}{4}\right)x \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

معادله اشترم-لیوویل y باید طوری باشد که برای آن داشته باشیم:

$$u_{xxyy} = -\lambda u_{xx}.$$

پس این مسئله باید به صورت زیر باشد.

$$y''(y) + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

از حل این مسئله پایه کسینوسی دوم، $p = \pi$ به دست می‌آید. یعنی:

$$\left\{ \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)y \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

معادله اشتروم-لیوویل مربوط به Z می‌بایستی طوری باشد تا تساوی زیر را برقرار کند.

$$u_{zz} + 2u_z = -\lambda u.$$

پس این معادله به صورت زیر است.

$$Z''(z) + 2Z'(z) + \lambda Z = 0.$$

شرایط مرزی همگن آن نیز به صورت زیر است.

$$Z(0) = 0, \quad Z(\pi) = 0.$$

معادله مشخصه عبارت است از

$$r^2 + 2r + \lambda = 0.$$

حالت ۱: $\lambda = 0$. در این حالت $r = -2$ و $r = 0$ و

$$Z = c_1 + c_2 e^{-2z}$$

با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آوریم $c_1 = c_2 = 0$. پس $\lambda = 0$ مقدار خاص نیست.

حالت ۲: $\lambda = -\alpha^2 < 0$.

$$r^2 + 2r + \lambda = 0$$

$$r = -1 \pm \sqrt{1 + \alpha^2} = r_1, r_2, \quad r_1 > 0, r_2 < 0$$

$$Z = c_1 e^{r_1 z} + c_2 e^{r_2 z}$$

با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آید $c_1 = c_2 = 0$. پس مقدار خاص منفی نداریم.

حالت ۳: $\lambda = \beta^2 > 0$. داریم:

$$r^2 + 2r + \beta^2 = 0 \implies r = -1 \pm \sqrt{1 - \beta^2}$$

اگر $1 - \beta^2 \geq 0$ ، به دست می‌آید:

$$Z = c_1 e^{r_1 z} + c_2 e^{r_2 z}, \quad r_1 < 0, r_2 < 0$$

با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آوریم $c_1 = c_2 = 0$. پس برای $1 \leq \lambda \leq \infty$ هم جواب غیر صفر نداریم. یا مقدار خاص بین صفر و یک نداریم.

اگر $-\gamma^2 < 1 - \beta^2 = 1 - \beta^2$ در این صورت $r = -1 \pm i\gamma$ و

$$Z = e^{-z} (c_1 \cos \gamma z + c_2 \sin \gamma z)$$

$$Z(0) = 0 \implies c_1 = 0$$

$$Z(\pi) = 0 \implies c_2 e^{-\pi} \sin \gamma \pi = 0 \implies \sin \gamma \pi = 0$$

$$\implies \gamma \pi = n\pi \implies \gamma = n$$

پس مقادیر خاص عبارت‌اند از $\lambda_n = 1 + n^2$ و توابع خاص $e^{-z} \sin nz$ ، $n = 1, 2, \dots$.
پس پایه مناسب متغیر z عبارت است از

$$\left\{ e^{-z} \sin nz \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

همچنین اگر

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-z} \sin nz$$

در این صورت

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^z f(z) \sin nz \, dz.$$

به این ترتیب پایه‌های زیر را برای حل این مسئله به دست می‌آوریم.

$$\left\{ \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right\}_{n=0}^{\infty}, \quad \left\{ \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)y \right\}_{m=0}^{\infty}, \quad \left\{ e^{-z} \sin kz \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

حال سوال این است چگونه با استفاده از این پایه‌ها مسئله را حل کنیم. برای این کار باید بگیریم.

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{nmk}(t) \sin\left(n + \frac{1}{4}\right)x \cos\left(m + \frac{1}{4}\right)y e^{-z} \sin kz$$

با قرار دادن آن در مسئله $T_{nmk}(t)$ قابل تعیین و جواب نهایی به دست می‌آید. علت آن را در بخش بعدی تحت عنوان سری فوریه مضاعف خواهیم داشت.

تمرین ۶.۱

مسئله اشترم-لیوویل هر یک از متغیرهای مکان مسائل زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} ۱. \quad & u_{tt} + 2u_t - u_{xx} + 2u_x + u = xt, \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \\ & u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ & u(0, t) = e^t, \quad u(1, t) = t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲. \quad & u_t - 4u_{xx} - u_{txx} = xt, \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \\ & u(x, 0) = x^2, \quad u(0, t) = t, \quad u_x(1, t) = t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳. \quad & u_t = u_{xx} + 4u_{yy} + u + xyt, \quad 0 \leq x, y \leq 1, t \geq 0 \\ & u(x, y, 0) = xy, \\ & u(0, y, t) = yt^2, \quad u_x(1, y, t) = y^2t, \\ & u_y(x, 0, t) = x^2t^2, \quad u_y(x, 1, t) = xt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۴. \quad & r^2 u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} = r \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, 1 \leq r \leq 2 \\ & u(r, 0) = r, \quad u_{\theta}(r, \pi) = 0, \quad u(1, \theta) = \theta, \quad u(2, \theta) = 0 \end{aligned}$$

$$۵. \quad u_{tt} = u_{xx} + ۲u_{yy} + ۲u_y + u_{zz}, \quad ۰ \leq x, y, z \leq ۱, t \geq ۰$$

$$u(x, y, z, ۰) = xy^۲, \quad u_t(x, y, z, ۰) = yz^۲,$$

$$u(۰, y, z, t) = zt, \quad u_x(۱, y, z, t) = yt^۲,$$

$$u_y(x, ۰, z, t) = xt, \quad u_y(x, ۱, z, t) = zt,$$

$$u_z(x, y, ۰, t) = yt, \quad u(x, y, ۱, t) = xt^۲$$

$$۶. \quad u_{tt} + ۲u_t + u_{txx} + u_{xxxx} = xt^۲, \quad ۰ \leq x \leq ۱, t \geq ۰$$

$$u(x, ۰) = x^۲, \quad u_t(x, ۰) = x,$$

$$u_x(۰, t) = t^۲, \quad u(۱, t) = t, \quad u_{xxx}(۰, t) = ۱, \quad u_{xx}(۱, t) = t$$

۷.۱ سری فوریه دوگانه و چندگانه

در بعضی از مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای تعداد متغیرهای مکان دو و یا بیشتر از دو تا است. با استفاده از مسئله اشترم-لیوویل برای هر یک از آن‌ها تهیه پایه انجام پذیر است. از حاصل ضرب آن پایه‌ها پایه دو متغیره یا بیشتر از دو به دست می‌آید و جواب مسئله به صورت یک سری فوریه چندگانه قابل ارائه است. هدف از این بخش نمایش این سری و ضرایب آن است.

فرض کنید $f(x, y)$ تابعی قطعه‌به‌قطعه پیوسته و تناوبی با دوره تناوب $۲p > ۰$ نسبت به x و $۲q > ۰$ نسبت به y باشد. برای y معین می‌توان نوشت:

$$f(x, y) = \frac{a_0(y)}{۲} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(y) \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

$$a_n(y) = \frac{۱}{p} \int_{-p}^p f(x, y) \cos \frac{n\pi x}{p} dx, \quad n = ۰, ۱, ۲, \dots$$

$$b_n(y) = \frac{۱}{p} \int_{-p}^p f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{p} dx, \quad n = ۱, ۲, ۳, \dots$$

توابع $a_n(y)$ و $b_n(y)$ نیز تناوبی با دوره تناوب $۲q > ۰$ و قطعه‌به‌قطعه پیوسته هستند.

پس دارای سری فوریه‌اند.

$$\begin{aligned}
 a_n(y) &= \frac{a_{n^0}}{q} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{nm} \cos \frac{m\pi y}{q} + b_{nm} \sin \frac{m\pi y}{q} \right), \\
 a_{nm} &= \frac{1}{q} \int_{-q}^q a_n(y) \cos \frac{m\pi y}{q} dy \\
 &= \frac{1}{pq} \int_{-p}^p \int_{-q}^q f(x, y) \cos \frac{m\pi y}{q} \cos \frac{n\pi x}{p} dx dy, \\
 b_{nm} &= \frac{1}{q} \int_{-q}^q b_n(y) \sin \frac{m\pi y}{q} dy \\
 &= \frac{1}{pq} \int_{-p}^p \int_{-q}^q f(x, y) \sin \frac{m\pi y}{q} \cos \frac{n\pi x}{p} dx dy.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n(y) &= \frac{c_{n^0}}{q} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(c_{nm} \cos \frac{m\pi y}{q} + d_{nm} \sin \frac{m\pi y}{q} \right), \\
 c_{nm} &= \frac{1}{q} \int_{-q}^q b_n(y) \cos \frac{m\pi y}{q} dy \\
 &= \frac{1}{pq} \int_{-p}^p \int_{-q}^q f(x, y) \cos \frac{m\pi y}{q} \sin \frac{n\pi x}{p} dx dy, \\
 d_{nm} &= \frac{1}{q} \int_{-q}^q b_n(y) \sin \frac{m\pi y}{q} dy \\
 &= \frac{1}{pq} \int_{-p}^p \int_{-q}^q f(x, y) \sin \frac{m\pi y}{q} \sin \frac{n\pi x}{p} dx dy.
 \end{aligned}$$

از قرار دادن این سری‌های فوریه در سری فوریه قبلی به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{0m} \cos \frac{m\pi y}{q} + b_{0m} \sin \frac{m\pi y}{q} \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n0} \cos \frac{n\pi x}{p} + c_{n0} \sin \frac{n\pi x}{p} \right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{nm} \cos \frac{n\pi x}{p} \cos \frac{m\pi y}{q} + b_{nm} \cos \frac{n\pi x}{p} \sin \frac{m\pi y}{q} \right. \\ & \left. + c_{nm} \sin \frac{n\pi x}{p} \cos \frac{m\pi y}{q} + d_{nm} \sin \frac{n\pi x}{p} \sin \frac{m\pi y}{q} \right) \end{aligned}$$

این سری را سری فوریه دوگانه f گویند. با استفاده از سری فوریه مختلط آن را به صورت فشرده زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{i(\frac{m\pi}{q}y + \frac{n\pi}{p}x)} \\ c_{nm} &= \frac{1}{4pq} \int_{-p}^p \int_{-q}^q f(x, y) e^{-i(\frac{m\pi}{q}y + \frac{n\pi}{p}x)} dx dy. \end{aligned}$$

در ارتباط با پایه برای مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاوی دو متغیر مکان خاصیت زیر را داریم.

خاصیت ۱۵.۱. اگر در یک مسئله معادلات دیفرانسیل پاره‌ای دو متغیر مکان یا

بیشتر باشد پایه مناسب حل آن مسئله از حاصل ضرب پایه‌های هر یک از متغیرها به دست می‌آید. به علاوه جواب مسئله به صورت سری فوریه دوگانه یا چندگانه قابل نمایش است. ضرایب فوریه هم از حاصل ضرب ضرایب فوریه به صورت مشابه قابل حصول است.

مثال ۱۹.۱. مطلوبست حل مسئله معادله پواسون همراه با شرایط مرزی زیر

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u = x + y, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ u_y(x, 0) = x, & u(x, 1) = x, & u(0, y) = 0, & u_x(1, y) = y \end{cases}$$

حل. پایه مناسب برای x پایه سینوسی جدید با $p = ۱$ و پایه مناسب y پایه کسینوسی جدید با $q = ۱$ است. پس پایه مناسب عبارت است از

$$\left\{ \sin\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x \cos\left(m + \frac{1}{4}\right)\pi y \right\}_{n,m=0}^{\infty}.$$

همچنین می‌توان گرفت $u_q(x, y) = xy$. پس تغییر تابع مجهول را به صورت $u(x, y) = v(x, y) + xy$ داریم. مسئله برای v را به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} + v = -xy + x + y, & 0 \leq x, y \leq ۱ \\ v_y(x, 0) = 0, & v(x, ۱) = 0, & v(0, y) = 0, & v_x(۱, y) = 0 \end{cases}$$

حال می‌گیریم:

$$v(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \sin\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x \cos\left(m + \frac{1}{4}\right)\pi y.$$

از قرار دادن آن در معادله و برابر قرار دادن ضرایب جملات متناظر به دست می‌آوریم.

$$-\left[\left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2 + \left(m + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2 - ۱\right] A_{nm} = b_{nm} + c_{nm} + d_{nm}$$

که در آن

$$b_{nm} = 4 \int_0^1 \int_0^1 -xy \sin\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x \cos\left(m + \frac{1}{4}\right)\pi y \, dx dy$$

$$c_{nm} = 4 \int_0^1 \int_0^1 x \sin\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x \cos\left(m + \frac{1}{4}\right)\pi y \, dx dy$$

$$d_{nm} = 4 \int_0^1 \int_0^1 y \sin\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x \cos\left(m + \frac{1}{4}\right)\pi y \, dx dy.$$

یا

$$b_{nm} = ۱۶ \frac{(-۱)^n}{\left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2} \left[\frac{(-۱)^m}{\left(m + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2} - \frac{۱}{\left(m + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2} \right]$$

$$c_{nm} = \frac{4(-۱)^n}{\left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2} \cdot \frac{(-۱)^m}{\left(m + \frac{1}{4}\right)\pi}$$

$$d_{nm} = \frac{4}{\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi} \left[\frac{(-۱)^m}{\left(m + \frac{1}{4}\right)\pi} - \frac{۱}{\left(m + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2} \right]$$

به این ترتیب

$$A_{nm} = \frac{b_{nm} + c_{nm} + d_{nm}}{1 - (n + \frac{1}{4})^2 \pi^2 - (m + \frac{1}{4})^2 \pi^2}.$$

مثال ۲۰.۱. مطلوبست حل مسئله انتقال حرارت زیر

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + u + xyz e^t, & 0 \leq x, y \leq \pi, |z| \leq \pi, t \geq 0 \\ u(x, y, z, 0) = xyz, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = 0, \\ u|_{z=-\pi} = u|_{z=\pi}, \quad u_z|_{z=-\pi} = u_z|_{z=\pi}. \end{cases}$$

حل. پایه مناسب برای x سینوسی قدیم با $p = \pi$ و پایه مناسب برای y سینوسی جدید با $q = \pi$ و پایه مناسب برای z نمایی با $p = \pi$ است. به این ترتیب پایه مناسب حل مسئله عبارت است از

$$\left\{ \sin nx \sin(m + \frac{1}{4})y e^{ijz} \right\}_{n=1, m=0, j=-\infty}^{\infty}.$$

حال بگیرید.

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} T_{nmj}(t) \sin nx \sin(m + \frac{1}{4})y e^{ijz}.$$

از قرار دادن آن در معادله و برابر قرار دادن ضرایب پایه به دست می آوریم.

$$\dot{T}_{nmj}(t) = - \left[n^2 + (m + \frac{1}{4})^2 + j^2 - 1 \right] T_{nmj} + c_{nmj} e^t$$

که در آن

$$\begin{aligned} c_{nmj} &= \frac{2}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi xyz \sin nx \sin(m + \frac{1}{4})y e^{-ijz} dx dy dz \\ &= \frac{2}{\pi^3} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{(-1)^m}{m + \frac{1}{4}} \frac{2\pi i (-1)^j}{j}. \end{aligned}$$

از قرار دادن آن در شرط اولیه به دست می‌آوریم:

$$T_{nmj}(\circ) = c_{nmj}.$$

جواب عمومی معادله T_{nmj} را به صورت زیر داریم.

$$T_{nmj}(t) = A_{nmj} e^{-\left[n^2 + \left(m + \frac{1}{4}\right)^2 + j^2 - 1\right]t} + \frac{c_{nmj} e^t}{n^2 + \left(m + \frac{1}{4}\right)^2 + j^2 - 1}$$

با اعمال شرط اولیه به دست می‌آوریم:

$$A_{nmj} = -\frac{c_{nmj}}{n^2 + \left(m + \frac{1}{4}\right)^2 + j^2 - 1} + c_{nmj}.$$

تذکره ۱ چنانچه در یک مسئله معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاوی دو متغیر مکان یا بیشتر شرایط مرزی غیر همگن باشد تعیین u_q چندان آسان نیست.

۲ لاپلاسین را در مختصات دکارتی دوبعدی و سه بعدی

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

و در مختصات قطبی در صفحه به صورت

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

داریم.

تمرین ۷.۱

مسائل با شرایط مرزی و یا شرایط اولیه مرزی زیر را حل کنید.

$$۱. \Delta u = x \cos y, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad u_x(1, y) = 0, \quad u_y(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = 0$$

$$۲. \Delta u = r\theta, \quad 1 \leq r \leq e, 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=e} = 0, \quad u|_{\theta=0} = 0, \quad u_\theta|_{\theta=\pi} = 0$$

$$۳. \Delta u = xye^z, \quad 0 \leq x, y, z \leq \pi$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=\pi} = 0,$$

$$u_z|_{z=0} = 0, \quad u_z|_{z=\pi} = 0$$

$$۴. u_t = \nabla^2 u + xyt, \quad 0 \leq x, y \leq 1, t \geq 0$$

$$u(x, y, 0) = ye^x,$$

$$u(0, y, t) = u_x(1, y, t) = u_y(x, 0, t) = u_y(x, 1, t) = 0$$

$$۵. u_{tt} = u_{xx} + \nabla^2 u_{yy} + xe^{y+t}, \quad 0 \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi, t \geq 0$$

$$u(x, y, 0) = xye^x, \quad u_t(x, y, 0) = y,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{y=-\pi} = u|_{y=\pi}, \quad u_y|_{y=-\pi} = u_y|_{y=\pi}$$

$$۶. u_{tt} = \nabla^2 u + xyz t, \quad 0 \leq x, y, z \leq 1, t \geq 0$$

$$u|_{t=0} = xye^z, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

$$u|_{y=0} = u_y|_{y=1} = 0, \quad u_z|_{z=0} = u_z|_{z=1} = 0$$

$$۷. u_{tt} + u_{xxxx} - u_{yy} = xye^t, \quad 0 \leq x, y \leq 1, t \geq 0$$

$$u|_{t=0} = xy, \quad u_t|_{t=0} = e^{x+y},$$

$$u|_{x=0} = u_x|_{x=1} = u_{xx}|_{x=0} = u_{xxx}|_{x=1} = u_y|_{y=0} = u|_{y=1} = 0$$

۸.۱ مسائل چند متغیر مکان و تبدیلات فوریه متناهی

در دو بخش اخیر مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای با دو متغیر مکان یا بیشتر مورد بررسی قرار گرفت. همان‌طور قبلاً بیان کردیم برای این‌گونه مسائل تعیین تابع $u_q(x, t)$ برای شرایط مرزی غیر همگن چندان آسان نیست. به‌خصوص در حالتی که این شرایط مرزی در گوشه‌های میدان ناپیوسته است می‌توان گفت تعیین آن در کلیت غیر ممکن است. حل این‌گونه مسائل با استفاده از پایه می‌بایستی با توجه به مراحل زیر پایه‌به‌پایه عمل شود.

فرض کنید در یک مسئله دو متغیر مکان x و y و زمان t داریم و پایه را برای متغیر x به‌صورت $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ و برای متغیر y به‌صورت $\{\psi_m(y)\}_{m=0}^{\infty}$ به‌دست آورده‌ایم.

مرحله ۱: ابتدا $u_q(x, y, t)$ را طوری به‌دست آورید تا فقط در شرایط مرزی متغیر x صدق کند. این کار با استفاده از فرمول‌هایی که قبلاً داده شده است مقدور است.

مرحله ۲: بگیرید $u(x, y, t) = v(x, y, t) + u_q(x, y, t)$ و مسئله را برای v بنویسید. شرایط مرزی برای v به‌صورت همگن است.

مرحله ۳: بگیرید

$$v(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(y, t) \phi_n(x)$$

آن را در مسئله قرار دهید. با برابر قرار دادن ضرایب عناصر پایه در هر یک از تساوی‌ها سرانجام به یک مسئله معادله دیفرانسیل پاره‌ای برای F_n می‌رسیم که شرایط مرزی آن ممکن است غیر همگن باشد.

مرحله ۴: مسئله F_n فوق یک متغیر مکان دارد و با پایه $\{\psi_m(y)\}_{m=0}^{\infty}$ قابل حل است. این جواب که به‌صورت سری فوریه است را در سری فوق قرار دهید جواب نهائی حاصل می‌گردد.

مثال ۲۱.۱. مسئله انتقال حرارت دو بعدی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_{yy} + xye^t, & 0 \leq x, y \leq 1, t \geq 0 \\ u(x, y, 0) = xy, \\ u(0, y, t) = yt, \quad u_x(1, y, t) = t, \quad u(x, 0, t) = t, \quad u(x, 1, t) = 0 \end{cases}$$

حل. تعیین $u_q(x, y, t)$ برای این مسئله با چند جمله‌ای امکان پذیر نیست چون باید $u_q(0, y, t) = yt$ و $u_q(x, 0, t) = t$ باشد. پس $u_q(x, y, t)$ در $(0, 0, t)$ باید ناپیوسته باشد.

پایه مناسب برای x سینوسی جدید با $p = 1$ یعنی $\left\{ \sin\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x \right\}_{n=0}^{\infty}$ و برای y سینوسی قدیم با $p = 1$ یعنی $\left\{ \sin n\pi y \right\}_{n=1}^{\infty}$ است.

مرحله ۱: تعیین u_q برای شرایط مرزی x .

$$u_q(x, y, t) = Ax + B$$

$$u_q(0, y, t) = B = yt$$

$$u_{q_x}(1, y, t) = A = t$$

$$u_q(x, y, t) = xt + yt \text{ پس}$$

توجه کنید این u_q در شرایط مرزی y صدق نمی‌کند.

مرحله ۲: مسئله را برای $v(x, y, t) = u(x, y, t) - xt - yt$ بنویسیم:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + 4v_{yy} + xye^t - x - y, & 0 \leq x, y \leq 1, t \geq 0 \\ v(x, y, 0) = xy, \\ v(0, y, t) = 0, \quad v_x(1, y, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = t - xt, \quad v(x, 1, t) = -t - xt \end{cases}$$

مرحله ۳: حل مسئله v :

$$v(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(y, t) \sin\left(n + \frac{1}{4}\right)x$$

از قرار دادن آن در مسئله به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} F_{n_t} = -(n + \frac{1}{\pi})^2 F_n + 4F_{n_{yy}} + \frac{2(-1)^{n+1}}{(n + \frac{1}{\pi})^2 \pi^2} (ye^t - 1) - \frac{2}{(n + \frac{1}{\pi})\pi} y \\ F_n(y, 0) = \frac{2(-1)^{n+1}}{(n + \frac{1}{\pi})^2 \pi^2} y \\ F_n(0, t) = t \left(\frac{2}{(n + \frac{1}{\pi})\pi} - \frac{2(-1)^n}{(n + \frac{1}{\pi})^2 \pi^2} \right) =: ta_n \\ F_n(1, t) = -t \left(\frac{2}{(n + \frac{1}{\pi})\pi} + \frac{2(-1)^n}{(n + \frac{1}{\pi})^2 \pi^2} \right) =: -tb_n. \end{cases}$$

مرحله ۴: حل مسئله F_n : تعیین جواب مخصوص شرایط مرزی.

$$U_{n_q}(y, t) = Ay + B$$

$$U_{n_q}(0, t) = B = ta_n$$

$$U_{n_q}(1, t) = A + B = -tb_n \implies A = -B - tb_n = -ta_n - tb_n.$$

پس

$$U_{n_q}(y, t) = -(a_n + b_n)ty + ta_n$$

که در آن

$$a_n = \frac{2}{(n + \frac{1}{\pi})\pi} - \frac{2(-1)^n}{(n + \frac{1}{\pi})^2 \pi^2}, \quad b_n = \frac{2}{(n + \frac{1}{\pi})\pi} + \frac{2(-1)^n}{(n + \frac{1}{\pi})^2 \pi^2}.$$

حال بگیریم:

$$w_n(y, t) = F_n(y, t) + (a_n + b_n)ty - ta_n$$

و مسئله را برای w_n بنویسیم و حل کنیم:

$$\begin{cases} w_{n_t} = -(n + \frac{1}{\pi})^2 w_n + 4w_{n_{yy}} + c_n(ye^t - 1) - \frac{a_n + b_n}{\pi} \\ \quad + \left[1 + t(n + \frac{1}{\pi})^2 \right] \left[(b_n + a_n)y - a_n \right] \\ w_n(y, 0) = c_n y - a_n, \quad w_n(0, t) = 0, \quad w_n(1, t) = 0, \end{cases}$$

که در آن

$$c_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2} = \frac{b_n - a_n}{2}.$$

حال

$$w_n = \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm}(t) \sin m\pi y$$

را در معادله و شرایط اولیه قرار دهید و ضرایب عناصر پایه را برابر قرار دهید تا به دست آورید:

$$\begin{aligned} \dot{T}_{nm} &= -\left[(n + \frac{1}{2})^2 + \epsilon m^2\right] T_{nm} + \frac{2(-1)^{m+1}}{m\pi} c_n e^t + d_{nm} t + e_{nm} \\ T_{nm}(0) &= 2c_n \frac{(-1)^{m+1}}{m\pi} - 2 \frac{1 - (-1)^m}{m\pi} =: H_{nm} \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} d_{nm} &= 2b_n \frac{(-1)^{m+1}}{m\pi} (n + \frac{1}{2})^2 - \frac{2a_n}{m\pi} (n + \frac{1}{2})^2 \\ e_{nm} &= -\frac{2(a_n + b_n)}{m\pi}. \end{aligned}$$

جواب عمومی معادله $T_{nm}(t)$ را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$T_{nm}(t) = A_{nm} e^{-\left[(n + \frac{1}{2})^2 + \epsilon m^2\right]t} + B_{nm} e^t + C_{nm} t + D_{nm}.$$

که در آن

$$\begin{aligned} B_{nm} &= \frac{2(-1)^{m+1} c_n}{m\pi \left[1 + (n + \frac{1}{2})^2 + \epsilon m^2\right]} \\ C_{nm} &= \frac{d_{nm}}{(n + \frac{1}{2})^2 + \epsilon m^2} \\ D_{nm} &= \frac{e_{nm} - C_{nm}}{(n + \frac{1}{2})^2 + \epsilon m^2} \\ A_{nm} &= -B_{nm} - D_{nm} + H_{nm}. \end{aligned}$$

به این ترتیب جواب مسئله اولیه را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$u(x, y, t) = xt + yt + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [a_n t - (a_n + b_n)ty] + \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm}(t) \sin m\pi y \right\} \cdot \sin\left(n + \frac{1}{p}\right)\pi x.$$

حل مسئله فوق که با استفاده از پایه انجام شد طولانی است. در این بخش دنبال این هستیم که راه حل ملموس‌تری ارائه دهیم. این راه حل با استفاده از تبدیلات فوریه متناهی مقدور است.

تبدیلات فوریه متناهی یک نوع تبدیل انتگرالی است که مانند تبدیل لاپلاس عمل می‌کند و با حذف مشتق و تبدیل متغیر مربوط به پارامتر تعداد متغیرهای مستقل معادله دیفرانسیل را تقلیل داده و حل مسئله را مقدور می‌سازد. این گونه تبدیلات دارای سه خاصیت اساسی زیراند.

۱. خطی: دارای خاصیت خطی‌اند لذا بر معادلات خطی با ضرایب ثابت قابل اعمال‌اند.

۲. تبدیلات مشتقات: تبدیل مشتقات تابع بر حسب تبدیل تابع قابل بیان است. به این ترتیب که مشتق مربوط از معادله حذف و متغیر مربوط به پارامتر تبدیل می‌شود.

۳. تبدیل معکوس: این گونه تبدیلات دارای تبدیل معکوس‌اند. یعنی از روی تبدیل تابع خود تابع قابل حصول است.

این گونه تبدیل را برای هر یک از پایه‌های اشتراک-لیوویل می‌توان تعریف و استفاده نمود. در این جا آن را برای پایه‌های پر کاربرد بیان می‌کنیم.

الف) تبدیل فوریه سینوسی متناهی (قدیم): پایه سینوسی قدیم را روی بازه $[0, p]$ به صورت $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{p} \right\}_{n=1}^{\infty}$ داریم:

برای تابع $f(x)$ با دامنه $[0, p]$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته با مشتق قطعه‌به‌قطعه پیوسته

تبدیل فوریه سینوسی متناهی (قدیم) را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\mathcal{F}_s(f) = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx = F_s(n).$$

(۱) این تبدیل خاصیت خطی را از انتگرال به ارث می برد.

(۲) تبدیل معکوس را، با توجه به خاصیت پایه، به صورت زیر داریم.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_s(n) \sin \frac{n\pi x}{p}$$

(۳) تبدیل مشتقات که فقط برای مشتقات مرتبه زوج قابل بیان است را در خاصیت زیر داریم.

خاصیت ۱۶.۱. اگر f و f' روی $[0, p]$ پیوسته و f'' و f''' قطعه به قطعه پیوسته باشد آن گاه

$$\mathcal{F}_s(f'') = -\frac{n^2 \pi^2}{p^2} \mathcal{F}_s(f) - \frac{1}{p^2} n\pi [(-1)^n f(p) - f(0)].$$

علت. با استفاده از انتگرال گیری جز به جزء نتیجه برقرار است.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s(f'') &= \frac{1}{p} \int_0^p f''(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx = \frac{1}{p} \left[f'(x) \sin \frac{n\pi x}{p} \right]_0^p \\ &\quad - \int_0^p f'(x) \frac{n\pi}{p} \cos \frac{n\pi x}{p} dx = -\frac{1}{p} \left[f(x) \frac{n\pi}{p} \cos \frac{n\pi x}{p} \right]_0^p \\ &\quad + \int_0^p f(x) \frac{n^2 \pi^2}{p^2} \sin \frac{n\pi x}{p} dx \\ &= -\frac{n^2 \pi^2}{p^2} \mathcal{F}_s(f) - \frac{1}{p^2} n\pi [(-1)^n f(p) - f(0)]. \end{aligned}$$

مشابهاً تبدیلات پایه‌های دیگر را به صورت زیر داریم:

ب) تبدیل فوریه کسینوسی متناهی (قدیم): تبدیل فوریه کسینوسی متناهی قدیم را برای $f(x)$ با دامنه $[0, p]$ به صورت زیر داریم.
تبدیل فوریه کسینوسی متناهی:

$$\mathcal{F}_c(f) = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx = F_c(n)$$

تبدیل معکوس:

$$f(x) = \frac{F_c(0)}{1} + \sum_{n=1}^{\infty} F_c(n) \cos \frac{n\pi x}{p}$$

تبدیل مشتق:

$$\mathcal{F}_c(f'') = -\frac{n^2 \pi^2}{p^2} \mathcal{F}_c(f) + \frac{1}{p} [(-1)^n f'(p) - f'(0)].$$

ج) تبدیل فوریه متناهی نمائی: تبدیل فوریه متناهی نمائی را برای $f(x)$ با دامنه $[-p, p]$ به صورت زیر است.
تبدیل فوریه متناهی:

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) e^{-\frac{in\pi x}{p}} dx = F(n)$$

تبدیل معکوس:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{\frac{in\pi x}{p}}$$

تبدیل مشتق:

$$\mathcal{F}(f') = \frac{in\pi}{p} \mathcal{F}(f) + \frac{(-1)^n}{2p} [f(p) - f(-p)].$$

(د) تبدیل فوریه سینوسی متناهی جدید: تبدیل فوریه سینوسی متناهی جدید را برای $f(x)$ با دامنه $[0, p]$ به صورت زیر است.

تبدیل فوریه سینوسی متناهی جدید:

$$\mathcal{F}_{s'}(f) = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{p} dx = F_{s'}(n)$$

تبدیل معکوس:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{s'}(n) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{p}$$

تبدیل مشتق:

$$\mathcal{F}_{s'}(f'') = -\frac{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2}{p^2} \mathcal{F}_{s'}(f) + \frac{2}{p} \left[(-1)^n f'(p) + \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{p} f(0) \right].$$

(ه) تبدیل فوریه کسینوسی متناهی جدید: تبدیل فوریه کسینوسی متناهی جدید را به صورت زیر داریم.

تبدیل فوریه کسینوسی متناهی جدید:

$$\mathcal{F}_{c'}(f) = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{p} dx = F_{c'}(n)$$

تبدیل معکوس:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{c'}(n) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{p}$$

تبدیل مشتق:

$$\mathcal{F}_{c'}(f'') = -\frac{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2}{p^2} \mathcal{F}_{c'}(f) - \frac{2}{p} \left[f'(0) - \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{p} (-1)^n f(p) \right].$$

تذکره. (۱) تبدیل مشتقات مرتبه بالاتر با استقرا از روی تبدیل مشتق فوق قابل تعیین است.

(۲) برای هر پایه دیگر به صورت مشابه می‌توان تبدیل فوریه متناهی تعریف کرد.

(۳) هر مسئله که با پایه یکی از تبدیلات متناهی فوق حل شود با آن تبدیل نیز قابل حل است.

(۴) حل با تبدیل نیاز به u_q ندارد و لیکن می‌بایستی فرمول تبدیل مشتق را بدانیم یا محاسبه کنیم.

(۵) جای تبدیل نسبت به یک متغیر و مشتق نسبت به متغیر دیگر را می‌توان عوض کرد.

مثال ۲۲.۱. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{txx} + u + xe^t, & 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0 \\ u(x, 0) = x, \\ u(0, t) = e^t, \quad u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

حل. شرایط مرزی دیریکله و $p = \pi$ است. پس حل با پایه سینوسی قدیم یا تبدیل فوریه سینوسی متناهی قدیم مقدور است.

از مسئله تبدیل فوریه متناهی سینوسی قدیم می‌گیریم، $p = \pi$.

$$\mathcal{F}_s(u(x, t)) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) \sin nx \, dx =: U(n, t) =: U(t) =: U.$$

جای تبدیل و مشتق عوض می‌شود یعنی:

$$\mathcal{F}_s(u_t) = \left(\mathcal{F}_s(u) \right)_t = U_t.$$

تبدیل مشتقات به صورت زیر است.

$$\mathcal{F}_s(f'') = -\frac{n^2 \pi^2}{p^2} \mathcal{F}_s(f) - \frac{2n\pi}{p^2} [(-1)^n f(p) - f(0)], \quad p = \pi$$

$$\mathcal{F}_s(u_{xx}) = -n^2 \mathcal{F}_s(u) + \frac{2n}{\pi} e^t = -n^2 U(n, t) + \frac{2n}{\pi} e^t$$

$$\mathcal{F}_s(u_{txx}) = \left(\mathcal{F}_s(u_{xx}) \right)_t = -n^2 U_t + \frac{2n}{\pi} e^t$$

$$\mathcal{F}_s(xe^t) = e^t \mathcal{F}_s(x) = e^t \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{1}{n} (-1)^{n+1} e^t.$$

به این ترتیب با تبدیل گرفتن از مسئله به دست می آوریم:

$$U_t = -n^2 U - n^2 U_t + \frac{4n}{\pi} e^t + \frac{2}{n} (-1)^{n+1} e^t + U$$

$$U(0) = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

یا به عبارت دیگر، برای هر n ، مسئله معادله دیفرانسیل عادی مرتبه اول با ضرایب ثابت و غیر همگن زیر را داریم.

$$\begin{cases} (1 + n^2)U_t + (n^2 - 1)U = \left[\frac{4n}{\pi} + \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \right] e^t \\ U(0) = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}. \end{cases}$$

برای حل آن داریم.

$$U(t) = A_n e^{\frac{1-n^2}{1+n^2}t} + \frac{1}{2n^2} \left[\frac{4n}{\pi} + \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \right] e^t$$

$$U(0) = A_n + \frac{1}{2n^2} \left[\frac{4n}{\pi} + \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \right] = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

پس

$$A_n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{2n^2} \right) - \frac{2}{n\pi}.$$

به این ترتیب با تبدیل معکوس گرفتن به دست می آوریم.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{n} (-1)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{2n^2} \right) - \frac{2}{n\pi} \right] e^{\frac{1-n^2}{1+n^2}t} + \frac{1}{2n^2} \left[\frac{4n}{\pi} + \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \right] e^t \right\} \sin nx.$$

مثال ۲۳.۱. مطلوبست حل مسئله انتقال حرارت زیر

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_{yy} + xy e^t, & 0 \leq x, y \leq 1, t \geq 0 \\ u(x, y, 0) = xy, \\ u(0, y, t) = yt, \quad u_x(1, y, t) = t, \quad u(x, 0, t) = t, \quad u(x, 1, t) = 0. \end{cases}$$

حل. تبدیل فوریه متناهی مناسب متغیر x ، تبدیل فوریه متناهی سینوسی جدید و تبدیل فوریه مناسب y ، تبدیل فوریه متناهی سینوسی قدیم است. ابتدا نسبت به x تبدیل فوریه سینوسی متناهی جدید بگیریم.

$$\mathcal{F}_s(u(x, y, t)) = \int_0^1 u(x, y, t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi x \, dx =: U(n, y, t) =: U(t).$$

حال از مسئله تبدیل بگیریم.

$$U_t = -\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 U + 4U_{yy} + ye^t \mathcal{F}_s(x) + \left[(-1)^n t + \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi y t\right]$$

$$U(n, y, 0) = y \mathcal{F}_s(x),$$

$$U(n, 0, t) = t \mathcal{F}_s(1), \quad U(n, 1, t) = 0$$

حال از این مسئله نسبت به y ، تبدیل فوریه سینوسی متناهی قدیم بگیریم.

$$\mathcal{F}_s(U(n, y, t)) = \int_0^1 U(n, y, t) \sin m \pi y \, dy = W(n, m, t) =: W(t)$$

$$W_t = -\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 W - 4m^2 \pi^2 W + \lambda m \pi t \mathcal{F}_s(1) + e^t \mathcal{F}_s(x) \mathcal{F}_s(y) + \left[(-1)^n t \mathcal{F}_s(1) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \mathcal{F}_s(y) t\right]$$

$$W(0) = \mathcal{F}_s(y) \mathcal{F}_s(x)$$

$$W(t) = A_{nm} e^{-\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + 4m^2 \pi^2\right]t} + B_{nm} e^t + C_{nm} t + D_{nm}$$

که در آن

$$B_{nm} = \frac{\mathcal{F}_s(y) \mathcal{F}_s(x)}{1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + 4m^2 \pi^2}$$

$$C_{nm} = \frac{\lambda m \pi \mathcal{F}_s(1) + \left[(-1)^n t \mathcal{F}_s(1) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \mathcal{F}_s(y) t\right]}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + 4m^2 \pi^2}$$

$$D_{nm} = -\frac{C_{nm}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + 4m^2 \pi^2}$$

$$A_{nm} = -B_{nm} - D_{nm} + \mathcal{F}_s(y) \mathcal{F}_s(x).$$

به این ترتیب جواب مسئله به صورت زیر به دست می آید.

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_{nm} e^{-\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + m^2 \pi^2 \right] t} + B_{nm} e^t + C_{nm} t + D_{nm} \right\} \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi x \sin m \pi y.$$

حال به محاسبه تبدیلات ظاهر شده در مسئله می پردازیم.

$$\mathcal{F}_s'(x) = 2 \int_0^1 x \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi x dx = \frac{2(-1)^n}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}$$

$$\mathcal{F}_s'(1) = 2 \int_0^1 \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi x dx = \frac{2}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi}$$

$$\mathcal{F}_s(y) = 2 \int_0^1 y \sin m \pi y dy = \frac{2(-1)^{m+1}}{m \pi}$$

به این ترتیب حل کامل می شود.

تذکر. این مثال، ۲۳.۱، همان مثال ۲۱.۱ است. روش حل قبلی با پایه بوده است که طولانی است و این روش حل با تبدیلات فوریه متناهی کوتاه تر است.

تذکر. برتری تبدیلات فوریه متناهی نسبت به پایه استفاده از تبدیلات در حل مسائل حاوی تابع دلتا و دستگاه معادلات پاره ای است. برای تابع دلتا سری فوریه وجود ندارد لیکن هر تبدیل انتگرالی این تابع مانند تبدیل لاپلاس موجود است. همچنین از هر تبدیل انتگرالی از جمله تبدیلات فوریه متناهی مانند تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل به خصوص معادلات دیفرانسیل پاره ای می توان استفاده نمود. این مطالب در مثال زیر نشان داده خواهد شد.

مثال ۲۴.۱. مطلوبست حل مسئله زیر

$$u_t = u_{xx} - 2v_{txx} + xt \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

$$v_t = 2u_{xx} + v_{xx} + u + t \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$u(x, 0) = x, \quad v(x, 0) = 1,$$

$$u(0, t) = t, \quad u(\pi, t) = e^t, \quad v(0, t) = t, \quad v(\pi, t) = 0.$$

حل. شرایط مرزی هر دو تابع مجهول دیریکله است و در معادلات مشتق از مرتبه فرد نسبت به x برای این توابع مجهول موجود نیست. پس هر دو تابع مجهول را برای t ثابت نسبت به x برحسب پایه سینوسی قدیم با $p = \pi$ یعنی $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ می‌توان بسط داد. به عبارت دیگر از این معادلات می‌توان تبدیل فوریه سینوسی متناهی قدیم گرفت. بگیرید

$$\mathcal{F}_s(u(x, t)) = U(n, t) = U(t) = U,$$

$$\mathcal{F}_s(v(x, t)) = V(n, t) = V(t) = V.$$

با گرفتن تبدیل فوریه سینوسی متناهی قدیم از این دستگاه به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} U_t &= -n^2 U - \frac{2n}{\pi} [(-1)^n e^t - t] - 2 \left[-n^2 V - \frac{2n}{\pi} (-t) \right]_t + t \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \\ V_t &= -2n^2 U - \frac{2n}{\pi} [(-1)^n e^t - t] - n^2 V + \frac{2n}{\pi} t + U + \frac{2}{\pi} t \sin \frac{n\pi}{2} \\ U(0) &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \quad V(0) = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

برای حل این دستگاه معادله دیفرانسیل عادی از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم. بگیرید

$$\mathcal{L}U = W, \quad \mathcal{L}V = Z.$$

حال از مسئله تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$\begin{aligned} sW - \frac{2(-1)^{n+1}}{n} &= -n^2 W - \frac{2n}{\pi} \left[(-1)^n \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2} \right] - 2 \left[-n^2 sZ + \frac{2n}{\pi} \times \right. \\ &\quad \left. (1 - (-1)^n) \right] + \frac{2n}{\pi} \frac{1}{s} + (-1)^{n+1} \frac{2}{ns^2}, \\ sZ - \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) &= -2n^2 W - \frac{2n}{\pi} \left[(-1)^n \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2} \right] - n^2 Z \\ &\quad + \left[\frac{2n}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \frac{1}{s^2} + W. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} (s + n^2)W - 2n^2 sZ &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + D, \\ (2n^2 - 1)W + (s + n^2)Z &= \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s^2} + c, \end{aligned}$$

به طوری که

$$\begin{aligned} A &= \frac{\gamma n (-1)^{n+1}}{\pi}, \quad B = \frac{\gamma n}{\pi} + \frac{\gamma (-1)^{n+1}}{n}, \quad C = \frac{\gamma n}{\pi}, \\ D &= \frac{\gamma (-1)^{n+1}}{n} - \frac{\gamma n}{\pi} (1 - (-1)^n), \\ a &= \frac{\gamma n (-1)^{n+1}}{\pi}, \quad b = \frac{\gamma n}{\pi} + \left[\frac{\gamma n}{\pi} + \frac{\gamma}{\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right], \quad c = \frac{\gamma}{n\pi} (1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

از حل دستگاه فوق به دست می آوریم

$$\begin{aligned} W &= \frac{\gamma_1}{s-1} + \frac{\gamma_2}{s^2} + \frac{\gamma_3}{s} + \frac{\gamma_4}{s+\alpha_n} + \frac{\gamma_5}{s+\beta_n}, \\ W &= \frac{\delta_1}{s-1} + \frac{\delta_2}{s^2} + \frac{\delta_3}{s} + \frac{\delta_4}{s+\alpha_n} + \frac{\delta_5}{s+\beta_n}. \end{aligned}$$

که در آن $\alpha_n = \gamma n^4 - n^2 \sqrt{4n^4 - 1}$ و $\beta_n = \gamma n^4 + n^2 \sqrt{4n^4 - 1}$ همچنین γ_j ها و δ_j ها مقادیری هستند که بر حسب مقادیر A, B, C, D, a, b و c محاسبه می گردند. به این ترتیب به دست می آوریم

$$\begin{aligned} U(n, t) &= \gamma_1 e^t + \gamma_2 t + \gamma_3 + \gamma_4 e^{-\alpha_n t} + \gamma_5 e^{-\beta_n t}, \\ V(n, t) &= \delta_1 e^t + \delta_2 t + \delta_3 + \delta_4 e^{-\alpha_n t} + \delta_5 e^{-\beta_n t}. \end{aligned}$$

و جواب نهایی

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U(n, t) \sin nt, \quad v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V(n, t) \sin nt.$$

تمرین ۸.۱

مسائل زیر را با استفاده از تبدیلات فوریه متناهی حل کنید.

$$۱. \quad u_{tt} = 4u_{xx} + 3e^{t+x}, \quad 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0 \\ u(x, 0) = e^x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = t, \quad u_x(\pi, t) = 1$$

$$۲. \quad u_t = u_{xx} + xt^3, \quad -\pi \leq x \leq \pi, t \geq 0 \\ u(x, 0) = e^x, \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) + t, \quad u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t)$$

$$۳. \quad u_{tt} + u_{xxxx} = xt, \quad 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0 \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = t, \quad u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) = 0$$

$$۴. \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = xyz, \quad 0 \leq x, y, z \leq 1 \\ u(0, y, z) = yz, \quad u_x(1, y, z) = 0, \\ u_y(x, 0, z) = xz, \quad u(x, 1, z) = 0, \\ u(x, y, 0) = xy, \quad u(x, y, 1) = 0$$

$$۵. \quad u_t = u_{xx} + u_{xxt} - u_{xxyy} + xyt, \quad 0 \leq x, y \leq 1, t \geq 0 \\ u(x, y, 0) = xy^3, \\ u|_{x=0} = yt, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u_y|_{y=0} = xt, \quad u_y|_{y=1} = 0$$

$$۶. \quad u_{tt} = u_{xx} + u_{ttxx} - u + t\delta(x - \frac{\pi}{4}), \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad u(0, t) = t, \quad u_x(\pi, t) = 1.$$

$$\begin{aligned}
\text{۷. } u_t &= u_{xx} + u_{yy} - u_{xxyy} - 2u + xyt, & 0 < x, y < \pi, t > 0 \\
u(x, y, 0) &= y\delta(x - \frac{\pi}{4}), & u_t(x, y, 0) &= x\delta(x - \frac{\pi}{4}), \\
u_x(0, y, t) &= y\delta(t - 1), & u(\pi, y, t) &= yt, \\
u_y(x, 0, t) &= t\delta(x - \frac{\pi}{4}), & u(x, \pi, t) &= t^2\delta(x - \frac{\pi}{4}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{۸. } u_{tt} &= u_{xx} + 2v_{xx} - v + xt, & 0 < x < \pi, t \geq 0 \\
v_{tt} &= 3u_{xx} + v_{xx} - u - xt^2, \\
u(x, 0) &= x, & u_t(x, 0) &= 1, & v(x, 0) &= 0, & v_t(x, 0) &= x, \\
u(0, t) &= t, & u_x(\pi, t) &= 0, & v(0, t) &= 1, & v_x(\pi, t) &= t.
\end{aligned}$$

۹.۱ روش‌های حل

در بخش‌های گذشته سه روش برای حل مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای معرفی کردیم.

(۱) روش حل با استفاده از پایه

(۲) روش حل با استفاده از تبدیلات فوریه متناهی

(۳) روش حل با استفاده از سری فوریه دوگانه و چندگانه

در این بخش مروری بر آنچه گذشت خواهیم داشت. اگرچه بعضی از مسائل با هر سه روش قابل حل است لیکن بعضی از این روش‌ها برای حل بعضی از مسائل مناسب‌تر است. تشخیص روش مناسب یا بهترین روش نیز در این بخش مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱.۹.۱ روش حل با پایه

۱. با استفاده از سری فوریه سه نوع پایه ساختیم:

(آ) پایه سینوسی قدیم $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{p} \right\}_{n=1}^{\infty}$. این پایه مناسب حل مسائل با شرایط: $0 \leq x \leq p$ ، شرایط مرزی دیریکله همگن یعنی $u|_{x=0} = 0$ و $u|_{x=p} = 0$ و نسبت به x در معادله مشتق از مرتبه فرد نباشد.

(ب) پایه کسینوسی قدیم $\left\{ \cos \frac{n\pi x}{p} \right\}_{n=0}^{\infty}$. این پایه مناسب حل مسائل با شرایط: $0 \leq x \leq p$ ، شرایط مرزی نیومن همگن یعنی $u_x|_{x=0} = 0$ و $u_x|_{x=p} = 0$ و نسبت به x در معادله مشتق از مرتبه فرد نباشد.

(ج) پایه نمایی یا مختلط $\left\{ e^{\frac{in\pi x}{p}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$. این پایه مناسب حل مسائل با شرایط: $-p \leq x \leq p$ و شرایط مرزی متناوب همگن یعنی $u|_{x=p} - u|_{x=-p} = 0$ و $u_x|_{x=p} - u_x|_{x=-p} = 0$ است.

۱. با استفاده از مسائل اشترم-لیوویل دو نوع پایه دیگر هم ساختیم:

(آ) پایه سینوسی جدید $\left\{ \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{p} \right\}_{n=0}^{\infty}$. این پایه مناسب حل مسائل با شرایط: $0 \leq x \leq p$ ، شرایط مرزی روبین چپ همگن یعنی $u|_{x=0} = 0$ و $u_x|_{x=p} = 0$ و نسبت به x در معادله مشتق از مرتبه فرد نباشد.

(ب) پایه کسینوسی جدید $\left\{ \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{p} \right\}_{n=0}^{\infty}$. این پایه مناسب حل مسائل با شرایط: $0 \leq x \leq p$ ، شرایط مرزی روبین راست همگن یعنی $u_x|_{x=0} = 0$ و $u|_{x=p} = 0$ و نسبت به x در معادله مشتق از مرتبه فرد نباشد.

تذکره. اگر شرایط مرزی غیرهمگن باشد، یعنی یکی از مقدار مرزی داده شده برابر صفر نباشد، ابتدا تابع u_q را طوری به دست می‌آوریم تا در شرایط مرزی غیرهمگن صدق کند. سپس تغییر تابع مجهول $u = u_q + v$ را می‌دهیم و مسئله را برای v می‌نویسیم. در این صورت شرایط مرزی برای v همگن است و با پایه حل می‌شود.

مثال ۲۵.۱ (ساده‌ترین مثال موج یک بعدی). مطلوبست حل مسئله

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + u + x^2, \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0, \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1.$$

حل. قدم اول: تعیین ابزار حل مسئله. برای این کار ابتدا به دامنه متغیر مکان یعنی x نگاه می‌کنیم. در اینجا $0 \leq x \leq 1$. پس این مسئله با استفاده از پایه قابل حل است. پس ابزار حل پایه است. حال ببینیم از پایه‌های پنج‌گانه می‌توانیم استفاده کنیم یا خیر. برای این کار به شرایط مرزی مسئله نسبت به x نگاه می‌کنیم. شرایط مرزی در اینجا $u|_{x=0} = 0$ و $u|_{x=1} = 1$ یعنی شرایط مرزی روبین راست با $p = 1$ ، لیکن غیرهمگن است. پس پایه کسینوسی جدید با $p = 1$ مناسب شرایط مرزی مسئله همگن این مسئله است. یعنی $\left\{ \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x \right\}_{n=0}^{\infty}$. توجه کنید در معادله مشتق از مرتبه فرد نسبت به x نداریم. پس این پایه مسئله را حل می‌کند. البته این پایه مناسب شرایط مرزی همگن است.

قدم دوم: تعیین u_q . u_q تابعی است که در شرایط مرزی غیرهمگن مسئله صدق می‌کند. برای این شرایط مرزی بهترین انتخاب به صورت $u_q = Ax + B$ است. پس باید $u_q|_{x=0} = 0$ و $u_q|_{x=1} = 1$ در نتیجه

$$\begin{aligned} u_q|_{x=0} = A = 0 & \Rightarrow A = 0 \\ u_q|_{x=1} = A + B = 1 & \Rightarrow B = 1 \end{aligned}$$

پس،

$$u_q = u_q(x, t) = 1.$$

قدم سوم: تغییر تابع مجهول برای تبدیل شرایط مرزی غیرهمگن به همگن. پس باید بگیریم:

$$u = u_q + v = 1 + v$$

و مسئله را برای v بنویسیم. برای این منظور در مسئله به جای u قرار می‌دهیم $1 + v$. در این صورت مسئله v می‌شود:

$$\begin{aligned} v_{tt} &= c^2 v_{xx} + v + x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \\ v(x, 0) &= x - 1, & v_t(x, 0) = 0, & v_x(0, t) = 0, & v(1, t) = 0. \end{aligned}$$

شرایط مرزی برای v همگن شده است. در نتیجه، تعیین جواب به صورت زیر مقدور است:

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x$$

قدم چهارم: حل مسئله v .

(۱) جواب فوق را در معادله قرار می‌دهیم تا $T_n(t)$ معلوم شود.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{T}_n(t) \cos\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} c^2\left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2 T_n(t) \cos\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x + \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x \end{aligned}$$

در اینجا سری آخر بسط $1 + x^2$ بر حسب این پایه است، پس

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (x^2 + 1) \cos\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x \, dx$$

(محاسبه این انتگرال را می‌گذاریم برای آخر کار.)

تمام جملات در تساوی فوق بر حسب یک پایه است، پس باید داشته باشیم:

$$\ddot{T}_n + \left(c^2\left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2 - 1\right) T_n = c_n$$

بگیرید:

$$\alpha_n^2 := c^2\left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2 - 1$$

جواب عمومی این معادله به صورت زیر است که A_n و B_n ثابت‌های جواب عمومی هستند.

$$T_n(t) = A_n \cos \alpha_n t + B_n \sin \alpha_n t + \frac{c_n}{\alpha_n^2}$$

به این ترتیب جواب عمومی مسئله v می‌شود:

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \alpha_n t + B_n \sin \alpha_n t + \frac{c_n}{\alpha_n^2} \right) \cos\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x$$

(ب) اعمال شرایط اولیه v .

شرایط اولیه را برای v به صورت زیر داریم:

$$v(x, 0) = x - 1, \quad v_t(x, 0) = 0.$$

آن را بر روی این جواب عمومی اعمال می‌کنیم.

$$v(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n + \frac{c_n}{\alpha_n^2} \right) \cos\left(n + \frac{1}{4}\right) \pi x = x - 1$$

پس باید

$$A_n + \frac{c_n}{\alpha_n^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (x - 1) \cos\left(n + \frac{1}{4}\right) \pi x \, dx$$

از طرفی

$$v_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n B_n \cos\left(n + \frac{1}{4}\right) \pi x = 0$$

در نتیجه، $B_n = 0$ همچنین

$$A_n = -\frac{c_n}{\alpha_n^2} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 (x - 1) \cos\left(n + \frac{1}{4}\right) \pi x \, dx.$$

با محاسبه انتگرال مربوط به c_n و این انتگرال مقدار A_n به دست می‌آید. از قرار دادن این A_n در سری $v(x, t)$ تابع $v(x, t)$ کاملاً مشخص می‌شود و جواب مسئله اولیه یعنی $u(x, t)$ به صورت زیر است:

$$u(x, t) = u_q + v = 1 + v(x, t).$$

تذکره. اگر متغیر مکان x یک مسئله دارای دامنه $0 \leq x \leq 1$ و عناصر پایه $\left\{ \cos\left(n + \frac{1}{4}\right) \pi x \right\}_{n=0}^{\infty}$ در شرایط مرزی آن مسئله صدق کند و مشتق نسبت به x از مرتبه فرد در آن نباشد، با قدم‌های مشابه حل آن مسئله مقدور است.

مثال ۲۶.۱. مطلوبست حل مسئله

$$u_{tt} - u_{ttxx} + u_{xxxx} + 4u = xt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = x,$$

$$u_x(0, t) = t, \quad u_{xxx}(0, t) = 6, \quad u(1, t) = 1, \quad u_{xx}(1, t) = 0.$$

حل. قدم اول: انتخاب پایه.

پایه کسینوسی جدید با $p = ۱$ در شرایط مرزی همگن شده این مسئله صدق می‌کند. پس پایه $\left\{ \cos\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x \right\}_{n=0}^{\infty}$ مناسب شرایط مرزی است. در مسئله نسبت به x هیچ نوع مشتق فردی نداریم. در نتیجه این پایه مسئله را حل می‌کند.

قدم دوم: تعیین $u_q(x, t)$. این باید در چهار معادله از شرایط مرزی صدق کند. پس باید در u_q پیشنهادی ۴ پارامتر باشد که بتوان از آن‌ها این شرایط را برقرار کرد. برای این شرایط مرزی بهترین u_q به صورت زیر است:

$$u_q(x, t) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$u_{q_x}(0, t) = 3Ax^2 + 2Bx + C|_{x=0} = t \Rightarrow C = t$$

$$u_{q_{xxx}}(0, t) = 6A = 6 \Rightarrow A = ۱$$

$$u_q(1, t) = ۱ \Rightarrow A + B + C + D = ۱ \Rightarrow B + D = -t$$

$$u_{q_{xx}}(1, t) = 6A + 2B = 6 + 2B = 0 \Rightarrow B = -3$$

پس، $A = ۱, B = -3, C = t, D = 3 - t$ و

$$u_q = x^3 - 3x^2 + tx + (3 - t)$$

قدم سوم: تغییر تابع مجهول و تبدیل شرایط مرزی غیرهمگن به همگن. حال

بگیرید:

$$u = u_q + v = x^3 - 3x^2 + tx + (3 - t) + v$$

و مسئله را برای v بنویسید. شرایط مرزی برای v همگن می‌شود. مسئله برای v به صورت زیر است:

$$v_{tt} - v_{ttxx} + v_{xxxx} + 4v = 4x^2(3 - x) + 6x + t(4 - 3x) - ۱۸$$

$$v(x, 0) = -x^3 + 3x^2 + x - 3, \quad v_t(x, 0) = ۱, \quad 0 \leq x \leq ۱, \quad t \geq 0$$

$$v_x(0, t) = 0, \quad v_{xxx}(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0, \quad v_{xx}(1, t) = 0.$$

قدم چهارم: حل مسئله v . جواب مسئله v را برحسب پایه فوق با ضرایب تابعی از t می‌نویسیم.

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x$$

(۱) این جواب را در معادله قرار می‌دهیم و برای خلاصه‌نویسی $\sum$ و $\cos\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x$ را نمی‌نویسیم.

$$\ddot{T}_n + \left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2 \dot{T}_n + \left(n + \frac{1}{4}\right)^4 \pi^4 T_n + 4T_n = c_n + d_n t$$

که در آن

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \left(4x^2(3-x) + 6x - 18\right) \cos\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x \, dx$$

$$d_n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (4 - 3x) \cos\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi x \, dx$$

(محاسبه انتگرال‌ها برای آخر کار است.) در نتیجه، معادله T_n می‌شود:

$$\ddot{T} + \frac{\left(n + \frac{1}{4}\right)^4 \pi^4 + 4}{1 + \left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2} T_n = \frac{c_n}{1 + \left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2} + \frac{d_n}{1 + \left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2} t$$

جواب عمومی این معادله می‌شود:

$$T_n(t) = A_n \cos \alpha_n t + B_n \sin \alpha_n t + \frac{C_n}{\alpha_n^2} + \frac{D_n}{\alpha_n^2} t$$

به‌طوری‌که

$$\alpha_n^2 := \frac{\left(n + \frac{1}{4}\right)^4 \pi^4 + 4}{1 + \left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2}, \quad C_n := \frac{c_n}{1 + \left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2}$$

$$D_n := \frac{d_n}{1 + \left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^2}.$$

به این ترتیب، جواب مسئله v را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \alpha_n t + B_n \sin \alpha_n t + \frac{C_n}{\alpha_n^2} + \frac{D_n}{\alpha_n^2} t \right) \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi x$$

ب) اکنون شرایط اولیه را اعمال می‌کنیم تا A_n و B_n به دست آید.

$$v(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n + \frac{C_n}{\alpha_n^2} \right) \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi x = -x^3 + 3x^2 + x - 3$$

در نتیجه،

$$A_n + \frac{C_n}{\alpha_n^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \left(-x^3 + 3x^2 + x - 3 \right) \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi x \, dx$$

$$v_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_n B_n + \frac{D_n}{\alpha_n} \right) \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi x = 1.$$

پس

$$\alpha_n B_n + \frac{D_n}{\alpha_n} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi x \, dx$$

با محاسبه انتگرال‌های c_n و d_n و دو انتگرال فوق A_n و B_n به دست می‌آید. از قرار دادن آن‌ها در سری $v(x, t)$ ، این تابع مشخص و جواب مسئله اولیه می‌شود.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_q(x, t) + v(x, t) \\ &= x^3 - 3x^2 + tx + (3 - t) + v(x, t) \end{aligned}$$

تمرین ۹.۱

مسائل زیر را با استفاده از پایه مناسب حل کنید.

$$۱. \quad u_{tt} = u_{xx} + u_{xxtt} - u + xt, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad u(0, t) = t, \quad u(\pi, t) = 0.$$

$$۲. \quad u_t = u_{xx} + \alpha u_x - u + xt, \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_x(0, t) = t, \quad u_x(1, t) = 1.$$

بگیرید: $u = ve^{-\alpha x}$.

$$۳. \quad u_{xx} + u_{yy} - u_{xxyy} = xy, \quad 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1$$

$$u(0, y) = y, \quad u_x(\pi, y) = 0, \quad u_y(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = 1.$$

$$۴. \quad u_{tt} + u_{xxxx} - u_{xxtt} - u_{xx} + u = xt \quad 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad u_{xx}(0, t) = t, \quad u_{xxx}(\pi, t) = 0$$

$$۵. \quad u_{xx} + u_{yy} = x^2 + y^2, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,$$

$$u|_{x^2+y^2=1} = x^2 y^2, \quad u|_{x^2+y^2=4} = 0.$$

$$۶. \quad u_{xx} + u_{yy} = xy, \quad x^2 + y^2 < 1,$$

$$u|_{x^2+y^2=1} = x + y, \quad |u| < \infty.$$

۲.۹.۱ روش حل با تبدیلات فوریه متناهی

از هر پایه یک تبدیل فوریه متناهی می‌توان ساخت. به این ترتیب که دنباله ضرایب فوریه را برای هر تابع بتوان تبدیل فوریه آن تابع نسبت پایه مربوط در نظر گرفت و نسبت فوریه آن تابع را نسبت به آن پایه بتوان تبدیل معکوس منظور کرد. پایه سینوسی قدیم یعنی $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{p} \right\}_{n=1}^{\infty}$ را در بگیرید. اگر $f(x)$ با دامنه $[0, p]$ باشد، آنگاه

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p}.$$

تبدیل فوریه متناهی سینوسی قدیم را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$\mathcal{F}_s(f) = \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx := F_s(n)$$

که $F_s(n)$ همان b_n است. تبدیل معکوس را هم به صورت زیر داریم:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_s(n) \sin \frac{n\pi x}{p}$$

که همان سری فوریه سینوسی قدیم است. این تبدیل دارای این خاصیت اساسی است که تبدیلات مشتقات از مرتبه زوج تابع را می‌توان برحسب تبدیل خود تابع بیان کرد و این کار با استفاده از انتگرال جزیه جز میسر است. در این مورد داریم:

$$\mathcal{F}_s(f'') = -\frac{n^2\pi^2}{p^2} \mathcal{F}_s(f) - \frac{2n\pi}{p^2} [(-1)^n f(p) - f(0)].$$

نکته اساسی در این تبدیلات این است که هر مسئله اگر مثلاً با پایه سینوسی قدیم حل شود با تبدیل فوریه متناهی سینوسی قدیم نیز حل می‌شود. در روش حل تفاوت اساسی است.

۱. برای حل با پایه باید u_q را به دست آورد و تغییر تابع مجهول $u = u_q + v$ داد و مسئله را برحسب v نوشت تا شرایط مرزی همگن گردد و حل با پایه قابل اعمال باشد. در حل با تبدیل نیاز به محاسبه u_q و تغییر تابع مجهول نیست.

۲. وقتی از پایه استفاده می‌کنیم و سری فوریه را در معادله قرار می‌دهیم برای جایگذاری این سری به جای جملات مشتق از این سری باید مشتق بگیریم. لیکن وقتی از تبدیل استفاده می‌کنیم عملاً از جملات انتگرال گرفته می‌شود و شرایط مرزی در تبدیل مشتق ظاهر می‌گردد و نیاز به u_q نمی‌شود.

۳. اگر سری فوریه توابع داده شده در مسئله موجود باشد، این مسئله هم با پایه و هم با تبدیل فوریه قابل حل است. لیکن اگر سری فوریه تابعی موجود نباشد، حل با پایه نامقدور لیکن با تبدیل امکان حل با تبدیل فوریه متناهی موجود است. حال به حل مسائل با تبدیل می‌پردازیم.

مثال ۲۷.۱. مطلوبست حل مسئله انتقال حرارت زیر:

$$u_t = u_{xx} + u_{xxt} - u + x + e^t \delta(x - \frac{\pi}{4}) \quad 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad u(0, t) = t, \quad u(\pi, t) = 0.$$

حل. چون تابع δ نسبت به x در این معادله ظاهر شده است و این تابع فاقد سری فوریه است پس این مسئله و مسائل حاوی تابع دلتا با استفاده از تبدیلات فوریه قابل حل است. در مورد تابع دلتا خاصیت زیر را داریم:

خاصیت ۱۷.۱. اگر $f(x)$ روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد و $\alpha \in (a, b)$ ، آنگاه

$$\int_a^b f(x) \delta(x - \alpha) dx = f(\alpha)$$

که در اینجا a و یا b می‌تواند $\pm\infty$ باشد.

حال برای حل مسئله، از مسئله تبدیل فوریه متناهی سینوسی قدیم می‌گیریم. داریم $p = \pi$. برای این منظور طرفین معادله را در $\frac{1}{\pi} \sin nx$ ضرب و از 0 تا π انتگرال می‌گیریم. برای ساده‌نویسی می‌نویسیم:

$$\mathcal{F}_s(u(x, t)) = U(n, t) := U(t)$$

در این صورت:

۱. از نسبت به t مشتق و نسبت به x انتگرال می‌گیریم.

$$\mathcal{F}_s(u_t) = U_t$$

۲. دو بار نسبت به x مشتق و سپس انتگرال می‌گیریم.

$$\mathcal{F}_s(u_{xx}) = -n^2 U + \frac{2n}{\pi} t$$

با استفاده از تبدیل مشتق مرتبه دوم که فرمول آن را در بالا داریم، تساوی فوق را به‌دست می‌آوریم.

۳. همچنین

$$\mathcal{F}_s(u_{xxt}) = \left(\mathcal{F}_s(u_{xx}) \right)_t = -n^2 U_t + \frac{2n}{\pi}$$

۴.

$$\mathcal{F}_s\left(e^t \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) e^t \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} e^t \sin \frac{n\pi}{2}$$

۵.

$$\mathcal{F}_s(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{1}{n} (-1)^{n+1}$$

حال در معادله تبدیل گرفته شده قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} U_t &= -n^2 U - n^2 U_t - U + \frac{1}{\pi} t + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{n} (-1)^{n+1} + \frac{1}{\pi} e^t \sin \frac{n\pi}{2} \\ U_t + U &= \frac{1}{1+n^2} \left(\frac{1}{\pi} t + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{n} (-1)^{n+1} + \frac{1}{\pi} e^t \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\ &= B_n t + C_n + D_n e^t \end{aligned}$$

به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} B_n &:= \frac{1}{\pi(1+n^2)}, \quad C_n := \frac{1}{1+n^2} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \right), \\ D_n &:= \frac{1}{\pi(1+n^2)} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

اگر از شرط اولیه تبدیل فوریه متناهی سینوسی قدیم بگیریم، به‌دست می‌آوریم:

$$U(\circ) = \mathcal{F}_s(u(x, \circ)) = \mathcal{F}_s(x) = \frac{1}{n} (-1)^{n+1}$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل فوق عبارتست از

$$U(n, t) = A_n e^{-t} + B_n t + C_n - B_n + \frac{1}{2} D_n e^t$$

که در آن A_n ثابت جواب عمومی است. با اعمال شرط اولیه حاصل می‌شود:

$$U(n, \circ) = A_n + C_n - B_n + \frac{1}{2} D_n = \frac{1}{n} (-1)^{n+1}$$

پس

$$A_n = \frac{1}{n} (-1)^{n+1} - C_n + B_n - \frac{1}{2} D_n$$

به این ترتیب

$$U(n, t) = \left[\frac{1}{n} (-1)^{n+1} - C_n + B_n - \frac{1}{n} D_n \right] e^{-t} + B_n t + C_n - B_n + \frac{1}{n} D_n e^t$$

و جواب مسئله می‌شود:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U(n, t) \sin n\pi x$$

تذکره ۱) اگر با پایه سینوسی قدیم حل کنیم و بگیریم:

$$\delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \sin nx$$

همین جواب به دست می‌آید. لیکن این تساوی معنی ندارد و برقرار نیست. اما برای تابع دلتا کلیه تبدیلات موجود و بامعنی است.

۲) اگر تابع دلتا در معادله فوق موجود نبود، حل با پایه سینوسی قدیم ترجیح داده می‌شود.

چنانچه مسئله دو متغیر مکان یا بیشتر باشد و نتوان برای آن دو متغیر یک تابع u_q به دست آورد، در این حالت باید مسئله را با پایه و مرحله به مرحله حل کرد و یا با تبدیلات فوریه متناهی مرحله به مرحله حل کرد.

تذکره. چنانچه در معادله نسبت به x دو جمله مشتق مرتبه اول و دوم به صورت

$$u_{xx} + 2\alpha u_x$$

داشته باشیم، با تغییر تابع مجهول $u = e^{-\alpha x} v$ و نوشتن مسئله بر حسب v در معادله v فقط جمله v_{xx} ظاهر می‌شود و مشتق مرتبه اول حذف می‌گردد. در این صورت بررسی حل مسئله با پایه‌های موجود و یا تهیه پایه جدید آسان‌تر انجام می‌شود.

تمرین ۱۰.۱

مسائل زیر را با استفاده از تبدیل فوریه متناهی مناسب حل کنید.

۱. $u_{tt} - u_{xx} + u_{txx} + u = \delta(x - \frac{\pi}{4})t, \quad 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0$
 $u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad u(0, t) = t, \quad u_x(\pi, t) = t$
۲. $u_t = u_{xx} - u_{xxt} + 2u + xe^{-t}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, t \geq 0$
 $u(x, 0) = x, \quad u(-\pi, t) = t + u(\pi, t), \quad u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t)$
۳. $u_{xx} + 2u_x + u_{yy} = x \delta(y - 1), \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi$
 $u(0, y) = y, \quad u(1, y) = 0, \quad u_y(x, 0) = x, \quad u_y(x, \pi) = 0$
۴. $u_{tt} + u_{xxxx} - u_{ttxx} + u = x \delta(t - 1), \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0$
 $u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 1,$
 $u_x(0, t) = t, \quad u_x(1, t) = 0, \quad u_{xxx}(0, t) = 1, \quad u_{xxx}(1, t) = t$
۵. $r^2 u_{rr} + rr + u_{\theta\theta} = r^2 \delta(\theta - \frac{\pi}{4}), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, r < 1$
 $u(r, 0) = r, \quad u(r, \pi) = 1, \quad u(1, \theta) = \theta, \quad u(1, \theta) = \theta, \quad |u| < \infty$

۳.۹.۱ روش حل با سری فوریه دوگانه و سه‌گانه

چنانچه در یک مسئله معادله دیفرانسیل پاره‌ای دو یا سه متغیر مکان داشته باشیم، حل این نوع مسائل به سه طریق مقدور است:

۱. طریق استفاده مرحله به مرحله‌ای از پایه‌های مربوط به متغیر مکان.
۲. طریق استفاده متوالی از تبدیلات فوریه متناهی.
۳. طریق استفاده از سری فوریه دوگانه و سه‌گانه یا پایه دوگانه و سه‌گانه.

طریقه اول در بخش ۸.۱ طبق مثال ۲۳.۱ توضیح داده شده است. طریقه دوم در زیربخش ۲.۹.۱ در مورد حل مسائل حاوی تابع دلتا توضیح داده شده است. طریقه سوم نیز در بخش ۷.۱ طی مثال‌های ۱۹.۱ و ۲۰.۱ توضیح داده شده است. از آنجاییکه جواب مسئله پاره‌ای یگانه است، اگر یک مسئله را با دو یا سه روش فوق حل کنیم جواب‌های هر دو یا سه روش با هم برابرند اگرچه تفاوت ظاهری داشته باشند. هدف از این قسمت این است که ببینیم برای یک مسئله کدام یک از روش‌های فوق مناسب‌تر است.

تذکر. چنانچه برای اینگونه مسائل بتوان یک u_q برای شرایط مرزی کلیه متغیرهای مکان به دست آورد، حل به صورت سری فوریه دوگانه یا سه گانه بهترین راه حل است.

مثال ۲۸.۱. مطلوبست حل مسئله

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + u + xyz t, \quad 0 \leq x, y, z \leq 1, t \geq 0$$

$$u(x, y, z, 0) = xyz,$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u_z|_{z=0} = 0,$$

$$u|_{x=1} = t y z, \quad u_y|_{y=1} = t x z, \quad u|_{z=1} = t x y$$

حل. چون $0 \leq x, y, z \leq 1$ پس حل مسئله با پایه سه گانه مقدور است مشروط بر اینکه بتوانیم برای آن u_q به دست آوریم. شرایط مرزی برای x دیریکه است، در نتیجه پایه مناسب $\{\sin n\pi x\}_{n=1}^{\infty}$ است. شرایط مرزی برای y روبین چپ است، پس پایه مناسب $\{\sin(n + \frac{1}{4})\pi y\}_{n=0}^{\infty}$ می باشد. شرایط مرزی برای z روبین راست است، پس پایه مناسب $\{\cos(n + \frac{1}{4})\pi z\}_{n=0}^{\infty}$ است. پیدا کردن یک u_q برای کلیه متغیرها چندان ساده نیست. لیکن برای این مسئله u_q زیر مناسب است:

$$u_q(x, y, z, t) = xyz t$$

با تغییر تابع مجهول $u = u_q + v$ مسئله را برای v می نویسیم. مسئله v به صورت زیر

حاصل می‌شود:

$$v_t = v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} + v + 2xyz t - xyz, \quad 0 \leq x, y, z \leq 1, t \geq 0$$

$$v(x, y, z, 0) = xyz,$$

$$v|_{x=0} = v|_{x=1} = v|_{y=0} = v|_{y=1} = v|_{z=0} = v|_{z=1} = 0$$

شرایط مرزی برای این مسئله همگن است. پس با پایه سه‌گانه حل می‌شود.

$$v(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} T_{nmj}(t) \sin n\pi x \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi y \cos\left(j + \frac{1}{2}\right)\pi z$$

با قرار دادن سری فوق در معادله v ، معادله T_{nmj} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{T}_{nmj} = -\left(n^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(j + \frac{1}{2}\right)^2\right)T_{nmj} + c_{nmj}t + d_{nmj}$$

که در آن

$$c_{nmj} = \frac{2}{1} \frac{2}{1} \frac{2}{1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2xyz \, dx dy dz$$

$$d_{nmj} = \frac{2}{1} \frac{2}{1} \frac{2}{1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 -xyz \, dx dy dz = -\frac{1}{2} c_{nmj}$$

محاسبه این انتگرال‌ها را برای آخر کار می‌گذاریم. از حل معادله T_{nmj} جواب عمومی آن را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$T_{nmj}(t) = A_{nmj} e^{-\beta_{nmj} t} + \frac{c_{nmj}}{\beta_{nmj}} t + \frac{1}{\beta_{nmj}} \left(d_{nmj} - \frac{c_{nmj}}{\beta_{nmj}} \right)$$

به طوری که

$$\beta_{nmj} =: n^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(j + \frac{1}{2}\right)^2.$$

از قرار دادن این T_{nmj} در سری فوریه سه‌گانه v جواب عمومی مسئله به دست می‌آید. برای به دست آوردن جواب نهایی مسئله v باید شرایط اولیه آن را اعمال کنیم. از اعمال

شرایط اولیه $v(x, y, z, 0) = xyz$ بر جواب عمومی v به دست می‌آوریم:

$$v(x, y, z, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(A_{nmj} + \frac{1}{\beta_{nmj}} \left(d_{nmj} - \frac{c_{nmj}}{\beta_{nmj}} \right) \right) \sin n\pi x \\ \cdot \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi y \cos \left(j + \frac{1}{2} \right) \pi z = xyz$$

در نتیجه

$$A_{nmj} + \frac{1}{\beta_{nmj}} \left(d_{nmj} - \frac{c_{nmj}}{\beta_{nmj}} \right) = -d_{nmj}.$$

حال با توجه به رابطه $c_{nmj} = -2d_{nmj}$ ، A_{nmj} بر حسب d_{nmj} به دست می‌آید.

$$A_{nmj} = -d_{nmj} \left(1 + \frac{1}{\beta_{nmj}} + \frac{2}{\beta_{nmj}^2} \right)$$

از قرار دادن این A_{nmj} در جواب عمومی v این جواب کاملاً مشخص می‌شود. بالاخره جواب نهایی مسئله اولیه را به صورت زیر داریم:

$$u(x, y, z, t) = xyz t + v(x, y, z, t)$$

حال به محاسبه d_{nmj} می‌پردازیم.

$$d_{nmj} = \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx \int_0^1 y \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi y \, dy \int_0^1 z \cos \left(j + \frac{1}{2} \right) \pi z \, dz \\ = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \frac{(-1)^m}{\left(m + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2} \left(\frac{(-1)^j}{\pi \left(j + \frac{1}{2} \right)} - \frac{1}{\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2} \right)$$

تذکره. چنانچه تعیین u_q مقدور نباشد، مسئله را یا باید به طریقه اول یعنی استفاده مرحله به مرحله ای از پایه‌های مربوط به متغیر مکان و یا به طریق دوم یعنی استفاده متوالی از تبدیلات فوریه متناهی و یا ترکیبی از این دو روش حل کنیم.

مثال ۲۹.۱. مطلوبست حل مسئله زیر

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \Delta u = xyz, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y, z \leq \pi$$

$$u|_{x=-\pi} = u|_{x=\pi} + yz, \quad u_x|_{x=-\pi} = u_x|_{x=\pi}$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = xz, \quad u_z|_{z=0} = 0, \quad u_z|_{z=\pi} = xy$$

حل. ابتدا توجه کنید برای این شرایط مرزی تعیین u_q به سادگی مقدور نیست. پس حل با سری فوریه چندگانه مقدور نیست. حل را با تبدیلات فوریه متناهی انجام می‌دهیم. پایه مناسب متغیر x پایه نمایی با $p = \pi$ یعنی $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ است. پایه مناسب متغیر y پایه سینوسی قدیم با $p = \pi$ یعنی $\{\sin ny\}_{n=1}^{\infty}$ می‌باشد. پایه مناسب متغیر z پایه کسینوسی قدیم با $p = \pi$ یعنی $\{\cos nz\}_{n=0}^{\infty}$ است. ابتدا نسبت به x تبدیل فوریه نمایی متناهی می‌گیریم.

$$\mathcal{F}(u(x, y, z)) = U(n, y, z) = U_n(y, z) =: U_n$$

$$u(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n(y, z) e^{inx}$$

$$\mathcal{F}(f'') = -n^2 \mathcal{F}(f) + \frac{(-1)^n i n}{2\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] + \frac{(-1)^n}{2\pi} [f'(\pi) - f'(-\pi)]$$

درنتیجه

$$\mathcal{F}(u_{xx}) = -n^2 U_n + \frac{i n (-1)^{n+1}}{2\pi} yz$$

$$\mathcal{F}(u_{yy}) = U_{n_{yy}}$$

$$\mathcal{F}(u_{zz}) = U_{n_{zz}}$$

حال از مسئله تبدیل فوریه متناهی می‌گیریم.

$$-n^2 U_n + U_{n_{yy}} + U_{n_{zz}} - \Delta U_n = yz \mathcal{F}(x) + \frac{i n (-1)^n}{2\pi} yz$$

$$U_n|_{y=0} = U_n|_{y=\pi} = z \mathcal{F}(x), \quad U_{n_z}|_{z=0} = 0, \quad U_{n_z}|_{z=\pi} = y \mathcal{F}(x)$$

سپس از مسئله فوق نسبت به y تبدیل فوریه سینوسی قدیم متناهی می‌گیریم.

$$\mathcal{F}_s(U_n(y, z)) = \mathcal{F}_s(U(n, y, z)) = U(n, m, z) = U_{nm}(z) =: U_{nm}$$

پس

$$\begin{aligned} -n^2 U_{nm} - m^2 U_{nm} + U_{nm,zz} - \omega U_{nm} &= z \mathcal{F}_s(y) \left[\mathcal{F}(x) + \frac{in(-1)^n}{2\pi} \right] \\ &\quad + \frac{2m}{\pi} z \mathcal{F}(x) [(-1)^m - 1] \\ U_{nm,z} \Big|_{z=0} &= 0, \quad U_{nm,z} \Big|_{z=\pi} = \mathcal{F}_s(y) \mathcal{F}(x) \end{aligned}$$

این مسئله برای U_{nm} یک مسئله معادله دیفرانسیل عادی خطی با ضرایب ثابت است. آن را به صورت

$$U_{nm}'' - (n^2 + m^2 + \omega) U_{nm} = c_{nm} z$$

جواب معادله فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$U_{nm} = A_{nm} \cosh \alpha_{nm} z + B_{nm} \sinh \alpha_{nm} z + \frac{c_{nm}}{\alpha_{nm}^2} z$$

به طوری که

$$\begin{aligned} \alpha_{nm}^2 &=: n^2 + m^2 + \omega \\ c_{nm} &=: \mathcal{F}_s(y) \left[\mathcal{F}(x) + \frac{in(-1)^n}{2\pi} \right] + \frac{2m}{\pi} \mathcal{F}(x) [(-1)^m - 1] \end{aligned}$$

با اعمال شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} U_{nm}' &= \alpha_{nm} B_{nm} + \frac{c_{nm}}{\alpha_{nm}^2} = 0 \\ U_{nm,z} \Big|_{z=\pi} &= A_{nm} \cosh \alpha_{nm} \pi + B_{nm} \sinh \alpha_{nm} \pi + \frac{c_{nm}}{\alpha_{nm}^2} \pi = \mathcal{F}_s(y) \mathcal{F}(x) \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} B_{nm} &= -\frac{c_{nm}}{\alpha_{nm}^2} \\ A_{nm} &= \frac{1}{\cosh \alpha_{nm} \pi} \left(\mathcal{F}_s(y) \mathcal{F}(x) + \frac{c_{nm}}{\alpha_{nm}^2} \sinh \alpha_{nm} \pi - \frac{c_{nm}}{\alpha_{nm}^2} \pi \right) \end{aligned}$$

برای اتمام حل کافی است $\mathcal{F}_s(y)$ و $\mathcal{F}(x)$ را به دست آوریم.

$$\mathcal{F}_s(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y \sin my \, dy = \frac{2(-1)^{m+1}}{m}$$

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi x e^{-inx} \, dx = \frac{i(-1)^n}{n}$$

در آخر

$$u(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} U_{nm}(z) e^{inx} \sin my$$

تمرین ۱۱.۱

مسائل زیر را با استفاده از پایه‌های دوگانه و سه‌گانه حل کنید.

۱. $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - u_{xxyy} + u_{ttyy} - u + xyt$, $0 \leq x, y \leq \pi$, $t \geq 0$
 $u(x, y, 0) = xy$, $u_t(x, y, 0) = 0$,
 $u(0, y, t) = u(x, 0, t) = 0$, $u(\pi, y, t) = \pi yt$, $u(x, \pi, t) = \pi xt$
۲. $u_t = u_{xx} + 2u_{yy} + 4u_{zz} + u_{xxyyzz} + u + xyz$, $0 \leq x, y, z \leq 1$, $t \geq 0$
 $u(x, y, z, 0) = xyz$,
 $u|_{x=0} = u|_{x=1} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = u|_{z=0} = u|_{z=1} = 0$
۳. $u_{xx} + u_{yy} - u_{xyxy} + u_{zz} - u_{yyzz} - u = xyz$,
 $u(0, y, z) = u_y(x, 0, z) = 0$, $0 \leq x, y \leq \pi$, $-1 \leq z \leq 1$
 $u_x(\pi, y, z) = u_y(x, \pi, z) = 0$, $u|_{z=-1} = u|_{z=1}$, $u_z|_{z=-1} = u_z|_{z=1}$
۴. $u_{tt} + u_{xxxx} + u_{yyyy} - u_{xxyyzz} + u = xyt$, $0 \leq x, y \leq \pi$, $t \geq 0$
 $u(x, y, 0) = xy$, $u_t(x, y, 0) = 0$,
 $u|_{x=0} = u|_{y=0} = 0$, $u_x|_{x=\pi} = yt$, $u_y|_{y=\pi} = xt$

۱۰.۱ معادلات پاره‌ای روی میدان مستدیر

تعداد زیادی از مسائل معادلات با مشتقات پاره‌ای از جمله معادله لاپلاس، معادله موج و معادله حرارت دو بعدی و سه بعدی مکان روی میدان‌های مستدیر (یعنی دایره یا کره و یا استوانه و یا بخشی از آن‌ها) رخ می‌دهد. حل اینگونه مسائل هم با استفاده از پایه و هم تبدیلات فوریه متناهی و هم پایه دوگانه و سه‌گانه مقدور است. لیکن پایه‌های پنج‌گانه برای حل اینگونه مسائل بعضاً کافی نیست و می‌بایستی با روش جداسازی و حل مسئله اشترم-لیوویل حاصل پایه مطلوب و یا تبدیل فوریه متناهی آن‌را به دست آورد. حل مسائل اشترم-لیوویل اینگونه مسائل منجر به توابع خاص مانند توابع بسل، لژاندر و یا توابع دیگر می‌گردد که تعیین جمله عمومی آن‌ها در کلیت آسان نیست لیکن با تعیین چند جمله اول آن پایه‌ها و به کار بردن آن‌ها جواب تقریبی بسیار خوبی برای مسئله پاره‌ای به دست می‌آید. در این بخش ابتدا به بررسی معادله لاپلاس و معادله پواسون می‌پردازیم که حل مسئله اشترم-لیوویل آن‌ها به سادگی انجام می‌شود. سپس معادلات دیگر بررسی می‌گردد. معادله لاپلاس را در صفحه به صورت زیر داریم:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

همچنین معادله پواسن به صورت زیر است:

$$u_{xx} + u_{yy} = f_1(x, y)$$

در مختصات قطبی داریم:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

برای نوشتن معادله پواسن در مختصات قطبی می‌بایستی u_{xx} و u_{yy} را بر حسب u_r ، u_{rr} ، $u_{\theta\theta}$ ، $u_{r\theta}$ ، محاسبه کرد و در معادله قرار داد و سپس ساده نمود. با انجام این کار به دست می‌آوریم:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f_1(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

از ضرب r^2 در رابطه فوق به دست می‌آوریم

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = f(r, \theta) = r^2 f_1(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

در اینجا مقصود از یک میدان مستدیر نواحی به صورت زیر است:

$$a \leq r \leq b, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

که در آن $\alpha \geq 0$ ، $b < \infty$ و $\beta - \alpha \leq 2\pi$. معادله اشترم-لیوویل را برای θ به صورت زیر داریم:

$$\ddot{\theta}(\theta) + \lambda \theta(\theta) = 0$$

این معادله همان معادله اشترم-لیوویل برای پایه‌های پنج‌گانه است. پس اگر شرایط مرزی با شرایط مرزی یکی از پایه‌های پنج‌گانه ما تطبیق یابد، از آن‌ها می‌توانیم استفاده کنیم. به عنوان مثال برای $0 \leq \theta \leq \pi$ و شرط مرزی

$$u|_{\theta=0} = g_1(r), \quad u|_{\theta=\pi} = g_2(r)$$

پایه سینوسی قدیم مناسب حل مسئله است. حال معادله اشترم-لیوویل را برای r می‌نویسیم. این معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + \lambda R(r) = 0$$

با تغییر متغیر مستقل $r = e^t$ معادله زیر را

$$\frac{d^2 R(t)}{dt^2} + \lambda R(t) = 0$$

خواهیم داشت. دوباره این معادله با معادله اشترم-لیوویل پایه‌های پنج‌گانه تطبیق دارد. چنانچه دامنه $t = \ln r$ با دامنه و شرایط مرزی آن با یکی از پایه‌های پنج‌گانه تطبیق داشته‌باشد، از قرار دادن $x = \ln r$ در آن پایه، پایه مناسب متغیر r برای مسئله پواسن به دست می‌آید. به عنوان مثال برای $1 < r < e^p$ و شرایط مرزی

$$u|_{r=1} = h_1(\theta), \quad u|_{r=e^p} = h_2(\theta)$$

پایه سینوسی جدید با قرار دادن $\ln r$ به جای x یعنی

$$\left\{ \sin \left(n + \frac{1}{p} \right) \frac{\pi \ln r}{p} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

مناسب حل مسئله است.

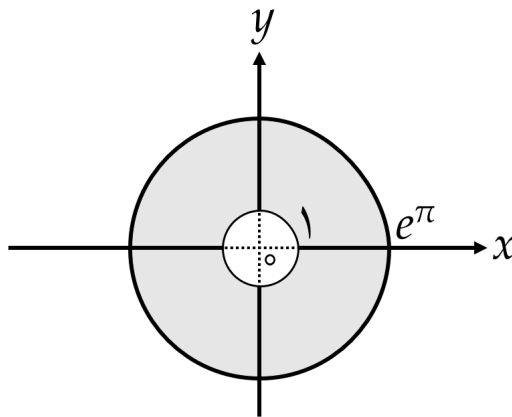
تذکره. اگر یک مسئله معادله دیفرانسیل پاره‌ای را با پایه یا تبدیلات فوریه متناهی حل کنیم و به یک معادله دیفرانسیل عادی برسیم، بهتر است آن را با استفاده از جواب عمومی آن معادله دیفرانسیل عادی حل کنیم.

مثال ۳۰.۱. مطلوبست حل مسئله معادله پوآسون زیر

$$\Delta u = 2xy, \quad 1 < r < e^{\pi},$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=e^{\pi}} = \sin 2\theta.$$

حل. برای اینکه میدان مسئله فوق، یعنی شکل ۴.۱، را بر حسب θ و r بنویسیم، باید



شکل ۴.۱: یک میدان مستدیر

دامنه θ را به طول 2π داشته‌باشیم. پس می‌گیریم $-\pi < \theta < \pi$. شرایط مرزی برای θ متناوب همگن است، چون u و u_{θ} در داخل میدان پیوسته است.

$$u|_{\theta=-\pi} = u|_{\theta=\pi} \quad \text{و} \quad u_{\theta}|_{\theta=-\pi} = u_{\theta}|_{\theta=\pi}$$

حل ۱: با استفاده از پایه برای θ . چون شرایط مرزی متناوب است، پس پایه مناسب پایه نمایی با $p = \pi$ است. یعنی

$$\{e^{in\theta}\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

این معادله در مختصات قطبی به صورت

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = r^4 \sin 2\theta$$

با شرایط مرزی نمایی همگن است. پس نیازی به پیدا کردن u_q نیست. پس می‌گیریم

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(r) e^{in\theta}.$$

از قرار دادن آن در معادله به دست می‌آوریم:

$$r^2 R_n'' + r R_n' - n^2 R_n = r^4 \begin{cases} 0 & n \neq 2, -2 \\ \frac{1}{2i} & n = 2 \\ -\frac{1}{2i} & n = -2 \end{cases} = r^4 C_n$$

این معادله، معادله کشی اولر است. معادله مشخصه آن عبارتست از

$$\lambda^2 - n^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm n.$$

جواب عمومی معادله همگن می‌شود:

$$R_{n_c}(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}$$

جواب مخصوص آن را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$R_{n_p}(r) = D_n r^4 \quad n \neq 4$$

آن را در معادله قرار دهید، به دست می‌آوریم:

$$12D_n r^4 + 4D_n r^4 - n^2 D_n r^4 = C_n r^4$$

پس برای $n \neq ۴$

$$D_n = \frac{C_n}{16 - n^2}.$$

برای $n = ۴$ باید بگیریم

$$D_{4p}(r) = D_n r^4 \ln r.$$

لیکن $C_۲ = \frac{1}{۲i}$ و $C_{-۲} = -\frac{1}{۲i}$ و $C_n = 0$ برای $n = ۲, -۲$. پس $D_۲ = \frac{1}{۲۴i}$ و $D_{-۲} = -\frac{1}{۲۴i}$ و $D_n = 0$ برای $n = ۲, -۲$. به این ترتیب جواب عمومی معادله R را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n} + \frac{C_n}{16 - n^2} r^4$$

همچنین جواب عمومی مسئله u را به صورت زیر داریم:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-n} + \frac{C_n}{16 - n^2} r^4 \right) e^{in\theta}.$$

حال شرایط مرزی r را اعمال می‌کنیم تا A_n و B_n به دست آید.

$$u(1, \theta) = 0 \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(A_n + B_n + \frac{C_n}{16 - n^2} \right) e^{in\theta} = 0.$$

در نتیجه

$$A_n + B_n + \frac{C_n}{16 - n^2} = 0. \quad (۱.۱)$$

و

$$u(e^{i\pi}, \theta) = \sin 2\theta$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(A_n e^{in\pi} + B_n e^{-in\pi} + \frac{C_n}{16 - n^2} e^{4i\pi} \right) e^{in\theta} = \sin 2\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}$$

که C_n قبلاً تعریف شده است. پس

$$A_n e^{in\pi} + B_n e^{-in\pi} + \frac{C_n}{16 - n^2} e^{4i\pi} = C_n. \quad (۲.۱)$$

از حل دو معادله (۱.۱) و (۲.۱) به‌دست می‌آوریم:

$$A_n = B_n = 0 \quad \text{برای } n \neq 2, -2$$

$$A_2 = \frac{C_2}{2 \sinh 2\pi} \left[1 - \frac{1}{12} (e^{4\pi} - e^{-2\pi}) \right]$$

$$B_2 = -\frac{C_2}{2 \sinh 2\pi} \left[1 - \frac{1}{12} (e^{4\pi} - e^{2\pi}) \right]$$

مشابه

$$A_{-2} = -\frac{C_{-2}}{2 \sinh 2\pi} \left[1 - \frac{1}{12} (e^{4\pi} - e^{2\pi}) \right]$$

$$B_{-2} = \frac{C_{-2}}{2 \sinh 2\pi} \left[1 - \frac{1}{12} (e^{4\pi} - e^{-2\pi}) \right]$$

از قرار دادن این A_n ها و B_n ها در جواب عمومی u جواب مسئله به‌دست می‌آید.

حل ۲: با استفاده از پایه برای r . شرایط مرزی را برای r شرط مرزی دیریکه برای $p = \pi$ داریم. پس، طبق مطالب گفته شده پایه مناسب را برای متغیر r به‌صورت زیر داریم:

$$\left\{ \sin(n \ln r) \right\}_{n=1}^{\infty} \quad 1 < r < e^{\pi}$$

شرایط مرزی برای r غیرهمگن است. پس باید u_q به‌دست آوریم.

$$u_q(r, \theta) = Ar + B$$

حال A و B را محاسبه می‌کنیم.

$$u_q(1, \theta) = A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$u_q(1, \theta) = Ae^{\pi} + B = \sin 2\theta$$

در نتیجه

$$A = -B = \frac{1}{e^{\pi} - 1} \sin 2\theta$$

$$u_q(r, \theta) = \frac{1}{e^{\pi} - 1} \sin 2\theta (r - 1)$$

حال بگیرید $u = u_q + v$. مسئله v می‌شود:

$$r^2 v_{rr} + r v_r + v_{\theta\theta} = \sin^2 \theta \left[r^2 - \frac{r}{e^\pi - 1} + \frac{1}{e^\pi - 1} (r - 1) \right]$$

$$v(1, \theta) = 0, \quad v(e^\pi, \theta) = 0, \quad v(r, -\pi) = v(r, \pi), \quad v_\theta(r, -\pi) = v_\theta(r, \pi).$$

بگیرید

$$v(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\theta) \sin(n \ln r).$$

از قرار دادن آن در معادله به‌دست می‌آوریم

$$-n^2 b_n(\theta) + b_n''(\theta) = c_n \sin^2 \theta,$$

به‌طوری‌که

$$r^2 + \frac{1}{e^\pi - 1} r - \frac{1}{e^\pi - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n \ln r)$$

9

$$c_n = \frac{\int_1^{e^\pi} \frac{1}{r} \left(r^2 + \frac{1}{e^\pi - 1} r - \frac{1}{e^\pi - 1} \right) \sin(n \ln r) dr}{\int_1^{e^\pi} \frac{1}{r} \sin^2(n \ln r) dr}.$$

محاسبه این انتگرال‌ها با تغییر متغیر $r = e^t$ به‌سادگی قابل انجام است. از حل معادله

$b_n(\theta)$ به‌دست می‌آوریم

$$b_n(\theta) = A_n \cosh n\theta + B_n \sinh n\theta - \frac{c_n}{n^2 + 1} \sin^2 \theta.$$

پس جواب عمومی مسئله v به‌صورت زیر است:

$$v(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cosh n\theta + B_n \sinh n\theta - \frac{c_n}{n^2 + 1} \sin^2 \theta \right) \sin(n \ln r)$$

با اعمال شرایط مرزی برای θ به‌راحتی $A_n = B_n = 0$ به‌دست می‌آید. یعنی جواب

مسئله v عبارت است از

$$v(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{c_n}{n^2 + 1} \sin^2 \theta \right) \sin(n \ln r)$$

فصل ۱. معادلات دیفرانسیل پاره‌ای روی میدان کرانه‌دار

و جواب مسئله u به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= u_q(r, \theta) + v(r, \theta) \\ &= \frac{1}{e^\pi - 1} \sin 2\theta (r - 1) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_n}{n^2 + 4} \sin 2\theta \right) \sin(n \ln r). \end{aligned}$$

حل ۳: توجه کنید مسئله v در حل ۲ با شرایط مرزی همگن است. پس با سری فوریه دوگانه قابل حل می‌باشد. می‌گیریم

$$v(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} e^{im\theta} \sin(n \ln r).$$

آن را در معادله قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} & - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} (n^2 + m^2) e^{im\theta} \sin(n \ln r) \\ &= \sin 2\theta \left[r^4 - \frac{r}{e^\pi - 1} + \frac{4}{e^\pi - 1} (r - 1) \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{nm} e^{im\theta} \sin(n \ln r) \end{aligned}$$

به طوری که

$$\begin{aligned} d_{nm} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\theta e^{-im\theta} d\theta \cdot \frac{\int_1^{e^\pi} \left(r^4 + \frac{3}{e^\pi - 1} r - \frac{4}{e^\pi - 1} \right) \sin(n \ln r) dr}{\int_1^{e^\pi} \sin^2(n \ln r) dr} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\theta (\cos m\theta - i \sin m\theta) d\theta \cdot \frac{\int_0^\pi \left(e^{4t} + \frac{3}{e^\pi - 1} e^t - \frac{4}{e^\pi - 1} \right) \sin nt dt}{\int_0^\pi \sin^2 t dt} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{i}{2} & m = 2 \\ \frac{i}{2} & m = -2 \\ 0 & m \neq 2, -2 \end{array} \right\} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(e^{4t} + \frac{3}{e^\pi - 1} e^t - \frac{4}{e^\pi - 1} \right) \sin nt dt. \end{aligned}$$

در نتیجه جواب مسئله u ، به صورت $u = u_q + v$ است.

تذکره. حل ۳ ساده‌ترین است، لیکن حل ۱ همیشه مقدور می‌باشد.

اکنون به بررسی یک مسئله انتقال حرارت در صفحه می‌پردازیم.

مثال ۳۱.۱. مطلوبست حل مسئله انتقال حرارت زیر

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u_{yy}, & x^2 + y^2 < p, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) &= x^2 + y^2, & u|_{x^2+y^2=p} &= 0. \end{aligned}$$

حل. میدان مکان این مسئله دایره است. پس مسئله را باید در مختصات قطبی بررسی کنیم. در این مختصات مسئله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}, & r < p, \quad t > 0, \\ u(r, \theta, 0) &= r^2, & u(p, \theta, t) &= 0. \end{aligned}$$

در اینجا $0 \leq r \leq p$ و $-\pi \leq \theta \leq \pi$ تغییر می‌کند و شرایط مرزی پنهان را برای θ به‌صورت تناوبی داریم. یعنی

$$u|_{\theta=-\pi} = u|_{\theta=\pi}, \quad u_{\theta}|_{\theta=-\pi} = u_{\theta}|_{\theta=\pi}.$$

همچنین چون u در $r = 0$ پیوسته است، پس

$$|u|_{r=0} < \infty$$

از آنجا که در تابع‌ها و داده‌های این مسئله θ ظاهر نشده است، پس می‌توان انتظار داشت که جواب مسئله نیز مستقل از θ باشد. در این صورت مسئله به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{rr} + \frac{1}{r}u_r, & r < p, \quad t > 0, \\ u(r, 0) &= r^2, & u(p, t) &= 0, & |u|_{r=0} &< \infty \\ u|_{\theta=-\pi} &= u|_{\theta=\pi}, & u_{\theta}|_{\theta=-\pi} &= u_{\theta}|_{\theta=\pi}. \end{aligned}$$

اکنون پایه متغیر مکان یعنی r را تعیین می‌کنیم. مسئله اشترم-لیوویل مربوط به r به صورت زیر است:

$$R'' + \frac{1}{r}R' = -\lambda R, \quad 0 \leq r \leq p$$

$$R(p) = 0, \quad |R(0)| < \infty.$$

در نتیجه، معادله فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$r^2 R'' + r R' + \lambda r^2 R = 0$$

این معادله، معادله بسل از مرتبه صفر تعمیم یافته بسل یعنی معادله بسل از مرتبه ν تعمیم یافته زیر است:

$$x^2 y'' + x y' + (m^2 x^2 - \nu^2) y = 0, \quad \lambda = m^2$$

این معادله برای $x > 0$ دارای جواب عمومی زیر است:

$$y(x) = C_1 J_\nu(mx) + C_2 Y_\nu(mx)$$

$J_\nu(x)$ را تابع بسل نوع اول از مرتبه ν و $Y_\nu(x)$ را تابع بسل از مرتبه ν می‌گویند. $J_\nu(x)$ تابعی کرانه‌دار و نوسانی با دنباله‌ای از صفرها است. تابع بسل $Y_\nu(x)$ در مبدأ بیکران می‌شود. برای مسئله اشترم-لیوویل ما جواب عمومی برای $\lambda = m^2$ به صورت زیر است:

$$R(r) = C_1 J_0(mr) + C_2 Y_0(mr)$$

چون $Y_0(mr)$ در $r = 0$ بیکران است، پس برای برقراری شرط $|R(0)| < \infty$ باید $C_2 = 0$. برای برقراری شرط $R(p) = 0$ باید $C_1 J_0(mp) = 0$. پس برای $C_1 \neq 0$ باید $J_0(mp) = 0$ یا باید mp یک ریشه $J_0(x)$ باشد. برای $x \geq 0$ ، نمودار $J_0(x)$ شبه نمودار $\frac{\sin x}{x}$ است. اگر ریشه‌های $J_0(x)$ را به صورت $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ بگیریم، در این صورت باید $mp = \alpha_n$ یا $m = \frac{\alpha_n}{p}$ و $\lambda_n = \frac{\alpha_n^2}{p^2}$. به این ترتیب مقادیر خاص و توابع خاص به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\lambda_n = \frac{\alpha_n^2}{p^2}, \quad \phi_n(r) = J_0\left(\frac{\alpha_n}{p}r\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

همچنین اگر $f(r)$ روی $[0, p]$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشد

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(r),$$

دراین صورت

$$a_n = \frac{\int_0^p r f(r) \phi_n(r) dr}{\int_0^p r \phi_n^2(r) dr}.$$

برای حل مسئله معادله پاره‌ای فوق باید بگیریم

$$u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) J_0(k_n r), \quad k_n := \frac{\alpha_n}{p}.$$

از قرار دادن آن در معادله پاره‌ای به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{T}_n(t) J_0(k_n r) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \left[J_0''(k_n r) + \frac{1}{r} J_0'(k_n r) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \left(-k_n^2 J_0(k_n r) \right). \end{aligned}$$

پس $T_n(t)$ جواب معادله زیر است:

$$\dot{T}_n(t) + k_n^2 T_n(t) = 0.$$

این معادله دارای جواب عمومی زیر می‌باشد:

$$T_n(t) = A_n e^{-k_n^2 t}$$

همچنین شرط اولیه را به‌صورت زیر داریم:

$$u(r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) J_0(k_n r) = r^2$$

در نتیجه

$$T_n(\circ) = \frac{\int_0^p r^3 J_0(k_n r) dr}{\int_0^p r J_0^2(k_n r) dr} := b_n.$$

از اعمال آن در جواب $T_n(t)$ به دست می‌آوریم:

$$A_n = b_n$$

و نهایتاً جواب مسئله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-k_n^2 t} J_0(k_n r).$$

تذکره ۱. برای $\lambda \leq 0$ تابع خاصی به دست نمی‌آید.**۲.** ریشه‌های $J_0(x)$ مانند ریشه‌های $\sin x$ منظم نیستند.**مثال ۳۲.۱.** فرض کنید (r, θ, ϕ) مختصات کروی در فضای سه‌بعدی باشد. معادله لاپلاس در فضای سه‌بعدی یعنی

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

با توجه به $x = r \sin \phi \cos \theta$, $y = r \sin \phi \sin \theta$ و $z = r \cos \phi$ به طوری که $0 \leq \phi \leq \pi$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $r > 0$. معادله لاپلاس در مختصات کروی به صورت زیر می‌شود:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\phi\phi} + \frac{\cot \phi}{r^2} u_{\phi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} u_{\theta\theta} = 0$$

این معادله را بر روی کره‌ای به شعاع $r = a$ و شرط مرزی زیر که به θ وابسته نیست در نظر بگیرید

$$u(a, \theta, \phi) = f(\phi).$$

در این صورت می‌توان انتظار داشت که جواب مسئله نیز مستقل از θ باشد. به این ترتیب معادله به صورت زیر ساده می‌گردد:

$$r^2 u_{rr} + 2ru_r + u_{\phi\phi} + \cot \phi u_{\phi} = 0$$

همچنین برای پیوستگی جواب در مبدأ باید

$$|u(0, \phi)| < \infty.$$

مسئله اشترم-لیوویل را برای ϕ به صورت زیر داریم:

$$\frac{1}{\sin \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{d\Phi}{d\phi} \right) + \lambda \Phi = 0, \quad 0 < \phi < \pi$$

با تغییر متغیر $\omega = \cos \phi$ ، معادله فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d}{d\omega} (1 - \omega^2) \frac{d\Phi}{d\omega} + \lambda \Phi = 0, \quad -1 < \omega < 1$$

همچنین $\omega \rightarrow \pm 1$ و Φ و Φ' کرانه‌دار است. برای $\lambda \neq n(n+1)$ ، معادله لژاندر فاقد جواب کرانه‌دار روی $-1 \leq \omega \leq 1$ است. اگر $\lambda = n(n+1)$ ، این معادله یک جواب چندجمله‌ای از درجه n دارد که از فرمول زیر قابل حصول است. در اینجا $P_n(\omega)$ همان چندجمله لژاندر است.

$$P_n(\omega) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (\omega^2 - 1)^n$$

جواب مستقل دوم را به صورت زیر داریم:

$$Q_n(\omega) = \frac{1}{2^n} P_n(\omega) \ln \frac{1+\omega}{1-\omega}$$

به این ترتیب جواب عمومی معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Phi(\omega) = C_1 P_n(\omega) + C_2 Q_n(\omega)$$

فصل ۱. معادلات دیفرانسیل پاره‌ای روی میدان کرانه‌دار

برای کرانه‌دار ماندن $\Phi(\omega)$ روی $1 \leq \omega \leq -1$ ، باید $C_2 = 0$. به این ترتیب به دست می‌آوریم

$$\Phi_n(\omega) = P_n(\omega).$$

پس توابع خاص را برای مسئله فوق که یک مسئله اشتراک-لیوویل نامنظم است، به صورت زیر داریم:

$$\Phi_n(\omega) = P_n(\cos \phi), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

حال جواب مسئله اولیه را بر حسب این پایه در نظر می‌گیریم

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r) P_n(\cos \phi).$$

از قرار دادن این جواب در معادله لاپلاس، معادله را برای $R_n(r)$ به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$R_n''(r) + 2rR_n'(r) - n(n+1)R_n(r) = 0$$

این معادله کوشی-اولر با معادله مشخصه زیر است:

$$\lambda^2 + \lambda - n(n+1) = 0 \Rightarrow \lambda = n, -n-1$$

پس

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n-1}.$$

در نتیجه،

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) P_n(\cos \phi)$$

جواب عمومی مسئله می‌شود. برای کرانه‌دار ماندن جواب در مبدأ باید $B_n = 0$. برای تعیین A_n ها شرط مرزی را اعمال می‌کنیم.

$$u(a, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos \phi) = f(\phi) = F(\cos \phi).$$

با گرفتن $\omega = \cos \phi$ به دست می‌آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\omega) = F(\omega) = f(\cos^{-1} \omega).$$

چون $\{P_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $s(\omega) = 1$ بر هم عمودند، پس

$$A_n a^n \int_{-1}^1 P_n^*(\omega) d\omega = \int_{-1}^1 f(\cos^{-1} \omega) P_n(\omega) d\omega.$$

$$\text{لیکن } \int_{-1}^1 P_n^*(\omega) d\omega = \frac{2}{2n+1}$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n} \int_{-1}^1 f(\cos^{-1} \omega) P_n(\omega) d\omega$$

یا با تغییر متغیر $\omega = \cos \phi$

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n} \int_0^\pi f(\phi) P_n(\cos \phi) \sin \phi d\phi.$$

به این ترتیب جواب نهایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left[\int_0^\pi f(\phi) P_n(\cos \phi) \sin \phi d\phi \right] P_n(\cos \phi).$$

تمرین ۱۲.۱

مطلوبست حل مسائل زیر

$$۱. \quad u_{xx} + u_{yy} = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 < 1, y > 0.$$

$$u|_{x^2+y^2=1} = xy, \quad u|_{y=0} = x.$$

$$۲. \quad u_{xx} + u_{yy} = xy, \quad 1 < x^2 + y^2 < 2, x > 0.$$

$$u|_{x^2+y^2=1} = xy, \quad u|_{x^2+y^2=2} = 1, \quad u|_{x=0} = y.$$

$$\text{۳. } u_{xx} + u_{yy} = x^{\gamma} - y^{\gamma}, \quad x^{\gamma} + y^{\gamma} < \lambda, \quad x > 0, \quad y > 0 \\ u|_{x^{\gamma} + y^{\gamma} = \lambda} = x + y, \quad u|_{x=0} = y, \quad u_y|_{y=0} = x.$$

$$\text{۴. } u_{xx} + u_{yy} = (x^{\gamma} + y^{\gamma})xy, \quad x^{\gamma} + y^{\gamma} < \lambda, \quad y > 0 \\ u|_{x^{\gamma} + y^{\gamma} = \lambda} = 0, \quad u_y|_{y=0, x < 0} = x, \quad u|_{y=0, x > 0} = x^{\gamma}.$$

$$\text{۵. } u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^{\gamma}}u_{\theta\theta} = r\theta, \quad r < \lambda, \quad 0 < \theta < \pi \\ u_r|_{r=\lambda} = \theta, \quad u|_{\theta=0} = r, \quad u_{\theta}|_{\theta=\pi} = \lambda.$$

$$\text{۶. } u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = (x^{\gamma} + y^{\gamma})z, \quad x^{\gamma} + y^{\gamma} < \lambda, \quad 0 < z < \lambda \\ u|_{x^{\gamma} + y^{\gamma} = \lambda} = xyz, \quad u|_{z=0} = x^{\gamma} + y^{\gamma}, \quad u|_{z=\lambda} = 0.$$

$$\text{۷. } u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + (x^{\gamma} + y^{\gamma})t, \quad x^{\gamma} + y^{\gamma} < \lambda, \quad t > 0 \\ u|_{x^{\gamma} + y^{\gamma} = \lambda} = \gamma, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x^{\gamma} + y^{\gamma}.$$

$$\text{۸. } u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^{\gamma}}u_{\theta\theta}, \quad r < \lambda, \quad 0 < \theta < \pi, \quad t > 0 \\ u(r, \theta, 0) = r\theta, \quad u(\lambda, \theta, t) = \theta t, \quad |u(r, \theta, t)| < \infty, \\ u(r, 0, t) = rt, \quad u_{\theta}(r, \pi, t) = r^{\gamma}t^{\gamma}.$$

$$\text{۹. } u_{rr} + \frac{\gamma}{r}u_r + \frac{1}{r^{\gamma}}u_{\phi\phi} + \frac{\cot\phi}{r^{\gamma}}u_{\phi} + \frac{1}{r^{\gamma}\sin^{\gamma}\phi}u_{\theta\theta} = r\phi, \\ u(\lambda, \theta, \phi) = \cos\phi, \quad r \leq \lambda, \quad 0 \leq \theta \leq \gamma\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای روی میدان بیکران

در فصل گذشته مسائل روی میدان مکان کرانه‌دار را مورد مطالعه قرار دادیم و ابزار حل آن را در پایه‌ها و تبدیلات فوریه یافتیم. در بعضی از مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای میدان مکان بیکران است به این معنی که دامنه تغییرات یکی از متغیرهای مکان تا $+\infty$ یا $-\infty$ ادامه دارد. ابزارهای فوق‌الذکر برای حل این گونه متغیرها مناسب نیست. لذا باید برای حل این گونه مسائل ابزار یا روش حل مناسبی ابداع نمائیم تا حل آنها میسر گردد. در بخش ۱.۲ به معرفی تبدیلات فوریه نامتناهی می‌پردازیم و حل معادلات دیفرانسیل را با استفاده از آن خواهیم دید. بخش ۲.۲ را به روش دالامبر اختصاص می‌دهیم. در بخش ۴.۲ هم حل با استفاده از تبدیل لاپلاس و اصل دوهامل می‌آید.

۱.۲ تبدیلات و انتگرال‌های فوریه

هدف از این بخش ساختن تبدیلات فوریه (نامتناهی) به عنوان ابزاری برای حل مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای روی میدان بیکران است. این کار با استفاده از تبدیلات فوریه متناهی و میل دادن p به سمت بینهایت انجام می‌شود. خواهیم دید که این گونه تبدیلات سه خاصیت اساسی تبدیلات انتگرال را دارا هستند و حل مسائل معادلات دیفرانسیل

پاره‌ای خطی با ضرایب ثابت را ممکن می‌سازند. در ابتدا تبدیل و انتگرال فوریه سینوسی را داریم که از روی تبدیل فوریه سینوسی قدیم ساخته می‌شود.

تبدیل و انتگرال سینوسی: تبدیل فوریه سینوسی قدیم و تبدیل معکوس آن را برای تابع f و f' قطعه‌به‌قطعه پیوسته با دامنه $[0, \infty)$ داریم. برای $p > 0$ این تابع را روی $[0, \infty)$ با $f_p(x)$ نشان می‌دهیم. برای f_p داریم:

$$\mathcal{F}_s(f_p) = \frac{2}{p} \int_0^p f_p(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx = F_s(n)$$

$$f_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_s(n) \sin \frac{n\pi x}{p}.$$

دنبال این هستیم که p را به سمت بینهایت میل دهیم. برای این کار ابتدا $F_s(n)$ را در فرمول تبدیل معکوس جایگزین و سپس $p \rightarrow +\infty$. بعد از قرار دادن $F_s(n)$ در فرمول تبدیل معکوس به دست می‌آوریم.

$$f_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p} \left(\int_0^p f_p(y) \sin \frac{n\pi y}{p} dy \right) \sin \frac{n\pi x}{p}.$$

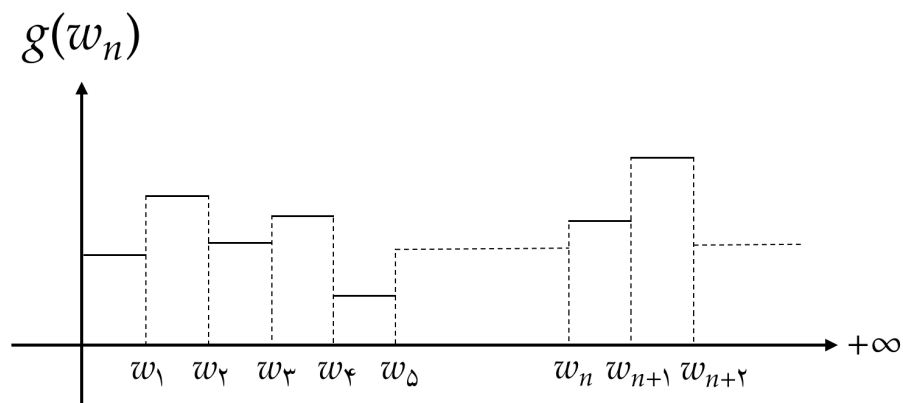
چون متغیر انتگرال جدا از متغیر سری فوریه است برای جلوگیری از ابهام آن را در این جا با y نشان می‌دهیم. برای انجام $p \rightarrow \infty$ آن را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$f_p(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^p f_p(y) \sin \frac{n\pi y}{p} dy \right) \sin \frac{n\pi x}{p} \frac{\pi}{p}$$

حال بگیرد $\frac{n\pi}{p} = \Delta w$, $\frac{\pi}{p} = \Delta w$. در این صورت داریم:

$$f_p(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} g(w_n, p, x) \Delta w.$$

که در آن x به عنوان یک پارامتر یا ثابت محسوب می‌گردد. برای x و p معین g فقط تابعی از w_n است و نمودار زیر برای آن قابل تصور است، که در آن $w_n = n\Delta w$. (به شکل ۱.۲ توجه کنید.) حال اگر $p \rightarrow \infty$ خواهیم داشت:



شکل ۱.۲: نمودار $g(w_n)$

$$f_p(x) \rightarrow f(x)$$

$$\Delta w \rightarrow dw$$

$$w_n \rightarrow w$$

$$g(w_n, p, x) \rightarrow g(w, x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rightarrow \int_0^{\infty}$$

به این ترتیب به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(y) \sin wy dy \right) \sin wx dw.$$

تبدیل فوریه سینوسی: تابع $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin wx dx$ را تبدیل فوریه سینوسی نامتناهی f گوییم و با $\mathcal{F}_s(f)$ یا $F_s(w)$ نشان می دهیم. همچنین $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(w) \sin wx dw$ را انتگرال فوریه سینوسی f گوییم. توجه کنید $F_s(w)$

دارای دامنه $[0, \infty)$ است. بدین ترتیب

$$\mathcal{F}_s(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin wx \, dx = F_s(w)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(w) \sin wx \, dw.$$

فرمول دوم را تبدیل معکوس فوریه سینوسی (نامتناهی) نیز می‌گویند. در ارتباط با این تبدیل خاصیت زیر را داریم.

خاصیت ۱.۲. فرض کنید f و f' روی $[0, \infty)$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته و $f(\infty) = f'(\infty) = 0$ و $\int_0^\infty |f(x)| \, dx < \infty$. آن‌گاه تبدیل فوریه سینوسی f موجود است. به‌علاوه این تبدیل سه خاصیت اساسی تبدیلات انتگرالی را دارد و

$$\mathcal{F}_s(f'') = -w^2 \mathcal{F}_s(f) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} w f(0).$$

علت. چون $\int_0^\infty |f(x)| \, dx < \infty$ پس برای هر $w \in [0, \infty)$ تابع $F_s(w)$ خوش‌تعریف است.

خاصیت خطی از انتگرال به‌ارث می‌رسد و تبدیل معکوس همان انتگرال فوریه سینوسی نامتناهی است.

همانند تبدیلات فوریه سینوسی متناهی، فقط تبدیل مشتقات از مرتبه زوج بر حسب تبدیل فوریه سینوسی نامتناهی خود تابع قابل بیان است.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s(f'') &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f''(x) \sin wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[f'(x) \sin wx \Big|_0^\infty \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty f'(x) w \cos wx \, dx \right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[f(x) w \cos wx \Big|_0^\infty \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty w^2 f(x) \sin wx \, dx \right] \\ &= -w^2 \mathcal{F}_s(f) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) w. \end{aligned}$$

مشابهاً با استفاده از تبدیل فوریه کسینوسی متناهی تبدیل فوریه کسینوسی نامتناهی را به صورت زیر به دست می آوریم.
تبدیل فوریه کسینوسی نامتناهی:

$$\mathcal{F}_c(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx \, dx = F_c(w)$$

تبدیل معکوس:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(w) \cos wx \, dw$$

تبدیل مشتق:

$$\mathcal{F}_c(f'') = -w^2 \mathcal{F}_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0).$$

همچنین از روی تبدیل فوریه متناهی تبدیل فوریه نامتناهی به صورت زیر حاصل می گردد.

تبدیل فوریه نامتناهی:

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iwx} \, dx = F(w)$$

تبدیل معکوس:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{-iwx} \, dw$$

تبدیل مشتق:

$$\mathcal{F}(f^{(n)}) = (-iw)^n \mathcal{F}(f).$$

تذکره ۱) هم برای تبدیل فوریه کسینوسی نامتناهی و هم برای تبدیل فوریه نامتناهی، f و f' می بایستی قطعه به قطعه پیوسته و در $\pm\infty$ صفر شوند. به علاوه انتگرال قدر مطلق آنها می بایستی یک عدد حقیقی باشد.

(۲) همیشه مقصود از تبدیل فوریه سینوسی یا کسینوسی یا تبدیل فوریه، تبدیل فوریه نامتناهی است. لذا از این پس کلمه نامتناهی را ذکر نخواهیم کرد.

(۳) چنانچه توابع درگیر در یک مسئله معادله دیفرانسیل پاره‌ای خطی با ضرایب ثابت دارای تبدیلات فوریه مربوط باشد آن مسئله دارای جواب یگانه است. به‌علاوه جواب مسئله نسبت به این توابع به‌صورت پیوسته تغییر می‌کند.

مثال ۱.۲. تبدیل فوریه سینوسی و انتگرال فوریه سینوسی تابع زیر را به‌دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

حل.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s(f) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \sin wx \, dx \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos wx}{w} \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{-\cos w + 1}{w} \right) \end{aligned}$$

پس

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{-\cos w + 1}{w} \sin wx \, dw.$$

از قرار دادن $x = \frac{1}{4}$ به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{-\cos w + 1}{w} \sin \frac{w}{4} \, dw = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{2 \sin^3 \frac{w}{4}}{w} \, dw \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^3 \frac{w}{4}}{\frac{w}{4}} \, d\left(\frac{w}{4}\right) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^3 y}{y} \, dy \end{aligned}$$

یا

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 y}{y} \, dy = \frac{\pi}{4}.$$

خاصیت ۲.۲. فرض کنید f و f' با دامنه $[0, \infty)$ یا $(-\infty, \infty)$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته و انتگرال قدر مطلق f روی دامنه خود کمتر از بینهایت باشد. آن‌گاه تبدیل فوریه مربوط و انتگرال فوریه مربوط موجود است. در نقاط پیوستگی f مقدار انتگرال فوریه مربوط برابر مقدار تابع و در نقاط ناپیوستگی مقدار انتگرال فوریه مربوط برابر با میانگین حد چپ و حد راست تابع است.

مثال ۲.۲. در انتگرال فوریه سینوسی مثال فوق قرار دهید $x = 1$. در این صورت

$$\begin{aligned} \frac{0+1}{2} &= \frac{f(1^+) + f(1^-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos w}{w} \sin w \, dw \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} \, dw - \int_0^{\infty} \frac{\cos w \sin w}{w} \, dw \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} \, dw - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2w}{2w} \, d(2w) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} \, dw. \end{aligned}$$

بدین ترتیب به دست می‌آوریم:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

تذکره ۱. یکی از کاربردهای انتگرال فوریه محاسبه انتگرال‌های ناسره است.

۲) کاربرد تبدیل فوریه در حل مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مانند تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه متناهی است و جواب مسئله به صورت انتگرال فوریه قابل حصول و قابل قبول است.

۳) از تبدیل فوریه سینوسی برای متغیر مکان با دامنه $[0, \infty)$ و شرط مرزی دیریکله در نقطه صفر و شرط مرزی در بینهایت برابر صفر و بدون حضور مشتق فرد در معادله نسبت به این متغیر استفاده می‌گردد.

(۴) از تبدیل فوریه کسینوسی برای متغیر مکان با دامنه $[0, \infty)$ و شرط مرزی نیومن در نقطه صفر و شرط مرزی در بینهایت برابر صفر و بدون حضور مشتق فرد در معادله نسبت به این متغیر قابل استفاده است.

(۵) از تبدیل فوریه برای متغیر مکان با دامنه $(-\infty, \infty)$ و شرط مرزی برابر صفر در $\pm\infty$ استفاده می‌گردد.

(۶) محاسبه تبدیل مشتقات مرتبه بالاتر با استقرا مقدور است.

مثال ۳.۲. مطلوبست حل مسئله پوسته مرتعش زیر:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - u + e^{-x-y+t}, & 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y < \infty, \quad t \geq 0 \\ u(x, y, 0) = e^{-x-y}, \quad u_t(x, y, 0) = 0, \\ u(0, y, t) = te^{-y}, \quad u_y(x, 0, t) = te^{-x}, \\ u(\infty, y, t) = 0, \quad u_y(x, \infty, t) = 0 \end{cases}$$

حل. برای متغیر x تبدیل فوریه سینوسی و برای متغیر y تبدیل کسینوسی مناسب است. ابتدا نسبت به x تبدیل فوریه سینوسی می‌گیریم.

$$\mathcal{F}_s(u(x, y, t)) = U(w, y, t) = U(y, t) = U$$

$$\begin{aligned} U_{tt} &= -w^2 U + \sqrt{\frac{2}{\pi}} w t e^{-y} + U_{yy} - U + e^{-y+t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w}{1+w^2} \\ U(y, 0) &= e^{-y} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w}{1+w^2}, \quad U_t(y, 0) = 0, \quad U_y(0, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{wt}{1+w^2}. \end{aligned}$$

حال از این مسئله نسبت به y تبدیل فوریه کسینوسی می‌گیریم.

$$\mathcal{F}_c(U(y, t)) = W(w, \alpha, t) =: W(t) =: W$$

$$\begin{aligned} W_{tt} &= -w^2 W + \frac{2}{\pi} w t \frac{1}{1+\alpha^2} - \alpha^2 W - W + \frac{2}{\pi} e^t \frac{1}{1+\alpha^2} \frac{w}{1+w^2} - \frac{2}{\pi} \frac{wt}{1+w^2} \\ W(0) &= \frac{2}{\pi} \frac{w}{1+w^2} \frac{1}{1+\alpha^2}, \quad W_t(0) = 0. \end{aligned}$$

یا

$$\begin{cases} W_{tt} + (w^2 + \alpha^2 + 1)W + \frac{2}{\pi} \frac{w}{1+w^2} \frac{1}{1+\alpha^2} e^t - \frac{2}{\pi} \frac{wt}{1+w^2} + \frac{2}{\pi} \frac{wt}{1+\alpha^2} = 0 \\ W(0) = \frac{2}{\pi} \frac{w}{1+w^2} \frac{1}{1+\alpha^2}, \quad W_t(0) = 0 \end{cases}$$

جواب عمومی این معادله می شود:

$$W = A \cos \beta t + B \sin \beta t + Ce^t + Dt$$

که در آن

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{1 + \alpha^2 + w^2} \\ C &= \frac{2}{\pi} \frac{w}{(1 + \alpha^2 + w^2)(1 + w^2)(1 + \alpha^2)} \\ D &= \frac{2}{\pi} \frac{wt}{1 + \alpha^2 + w^2} \left(-\frac{1}{1 + w^2} + \frac{1}{1 + \alpha^2} \right). \end{aligned}$$

حال با استفاده از شرایط اولیه A و B را تعیین می کنیم.

$$\begin{aligned} W(0) = A + C = \frac{2}{\pi} \frac{w}{1 + w^2} \frac{1}{1 + \alpha^2} &\implies A = \frac{2}{\pi} \frac{w}{1 + w^2} \frac{1}{1 + \alpha^2} - C \\ W_t(0) = \beta B + C + D = 0 &\implies B = -\frac{1}{\beta} (C + D). \end{aligned}$$

به این ترتیب جواب نهائی را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$u(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(A \cos \beta t + B \sin \beta t + Ce^t + Dt \right) \cdot \sin wx \cos \alpha y \, dw d\alpha.$$

محاسبه این گونه انتگرال ها چندان ساده نیست و نیاز به روش های انتگرال گیری در مبحث توابع مختلط دارد. در این کتاب این شکل انتگرالی جواب را به عنوان جواب نهائی می پذیریم.

مثال ۴.۲. تبدیل فوریه $f(x) = e^{-ax^2}$ ، $a > 0$ را محاسبه کنید.

حل.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(e^{-ax^2}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2 - \frac{iwx}{a})} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x - \frac{iw}{2a})^2} e^{-\frac{w^2}{4a}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \frac{1}{\sqrt{a}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{w^2}{4a}}.
 \end{aligned}$$

که در آن از نظریه انتگرال گیری مختلط و $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ استفاده شده است. پس داریم:

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}.$$

تمرین ۱.۲

۱. انتگرال فوریه توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = e^{-|x|} \sin x \quad (\text{ب}) \qquad f(x) = e^{-|x|} \quad (\text{آ})$$

۲. انتگرال فوریه سینوسی توابع با دامنه $[0, \infty)$ زیر را به دست آورید.

$$f(x) = e^{-x} \cos x \quad (\text{ب}) \qquad f(x) = e^{-x} \sin x \quad (\text{آ})$$

۳. انتگرال فوریه کسینوسی توابع با دامنه $[0, \infty)$ زیر را محاسبه کنید.

$$f(x) = xe^{-x} \cos x \quad (\text{ب}) \qquad f(x) = xe^{-x} \quad (\text{آ})$$

۴. مطلوبست حل مسئله انتقال حرارت زیر

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + tu, & -\infty < x < \infty, t \geq 0 \\ u(x, 0) &= e^{-x^2}, & u(\pm\infty, t) = 0 \end{aligned}$$

۵. مسئله موج یک بعدی زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + 2u &= \delta(x-1)\delta(t), & t \geq 0, x \geq 0 \\ u(x, 0) &= e^{-x}, & u_t(x, 0) = 0, & u(0, t) = e^{-t}, & u(+\infty, t) = 0 \end{aligned}$$

۶. مسئله انتقال حرارت دو بعدی زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 2u_{yy} + u_{xxt} + u + e^t \delta(x-1)e^{-y}, & x, y \geq 0, t \geq 0 \\ u(x, y, 0) &= e^{-x-y^2}, \\ u(0, y, t) &= e^{-t-y}, & u_y(x, 0, t) = e^{-x-t}, \\ u(+\infty, y, t) &= 0, & u(x, +\infty, t) = 0 \end{aligned}$$

۷. مطلوبست حل مسئله معادله لاپلاس زیر

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= xe^{-y-z^2}, & 0 \leq x \leq 1, y \geq 0, |z| < \infty \\ u(0, y, z) &= e^{-y^2-|z|}, & u(1, y, z) = 0, \\ u_y(x, 0, z) &= xe^{-z} \sin z, & u(x, +\infty, z) = 0, & u(x, y, \pm\infty) = 0 \end{aligned}$$

۸. مطلوبست حل مسئله رویه مرتعش دو بعدی زیر

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xxxx} + u_{xxyy} - u &= ye^{-x}t, & 0 \leq y \leq \pi, x \geq 0, t \geq 0 \\ u(x, y, 0) &= ye^{-x} \sin x, & u_t(x, y, 0) = 0, \\ u(0, y, t) &= yt, & u_{xx}(0, y, t) = 1, & u(+\infty, y, t) = u_{xx}(+\infty, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) &= te^{-x}, & u_y(x, \pi, t) = 0 \end{aligned}$$

۹. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + 2u &= e^{t-2x}, & x \geq 0, t \geq 0 \\ u(x, 0) &= e^{-x}, & u_t(x, 0) = e^{-3x}, \\ u(0, t) &= t, & u(\infty, t) = 0 \end{aligned}$$

۲.۲ روش دالامبر

مدتی بعد از پیدایش قانون حرکت نیوتن معادله تار مرتعش توسط دالامبر با استفاده از این قانون نوشته و حل شد. اگرچه این روش فقط برای دسته بسیار خاصی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای قابل استفاده است لیکن بهترین روش است. چون دقیق‌ترین جواب مسئله را بر حسب توابع مقدماتی به دست می‌دهد. در این بخش به معرفی این روش حل می‌پردازیم که با استفاده از تغییر متغیرهای مستقل انجام می‌پذیرد. در ابتدا مفاهیم مورد نیاز را می‌آوریم.

صورت کلی یک معادله پاره‌ای مرتبه دوم خطی از دو متغیر x و y را به شکل زیر در نظر بگیرید.

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (۱.۲)$$

که در آن ضرایب و جمله طرف دوم توابعی پیوسته از x و y اند.

این معادله را هذلولوی گوییم اگر روی Ω ، $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ ، آن را سهموی گوییم اگر روی Ω ، $\Delta = 0$ و آن را بیضوی گوییم اگر روی Ω ، $\Delta < 0$.

معادله مشخصه: معادله دیفرانسیل عادی مرتبه اول زیر را معادله مشخصه معادله دیفرانسیل پاره‌ای فوق و هر جواب آن را یک منحنی مشخصه گوییم.

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\frac{dy}{dx} + C = 0 \quad \text{اگر } A \neq 0 \text{ باشد}$$

$$C\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - B\frac{dx}{dy} = 0 \quad \text{اگر } A = 0 \text{ و } C \neq 0 \text{ باشد}$$

نکته. به علامت «-» قبل از B توجه شود.

از حل معادله مشخصه به عنوان یک معادله درجه دوم برای $\frac{dy}{dx}$ به دست می آوریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{2A} \implies \phi(x, y) = c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{2A} \implies \psi(x, y) = c_2$$

یا

$$\frac{dx}{dy} = 0 \implies \phi(x, y) = c_1$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{B}{C} \implies \psi(x, y) = c_2.$$

حالت ۱: $\Delta > 0$ یعنی معادله هذلولوی است. در این حالت $\phi(x, y) = c_1$ و $\psi(x, y) = c_2$ دو دسته منحنی در صفحه x و y هستند که مستقل از یکدیگراند. در این حالت بگیریم:

$$\xi = \phi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

با این تغییر متغیرهای مستقل، معادله دیفرانسیل پاره ای به صورت زیر در می آید.

$$u_{\xi\eta} = H_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \quad (2.2)$$

یعنی در این معادله $u_{\xi\xi}$ و $u_{\eta\eta}$ ظاهر نمی شود.

چنانچه در H_1 ، u و u_ξ یا u و u_η ظاهر نشده باشد. یعنی:

$$u_{\xi\eta} = H_1(\xi, \eta, u_\eta) \quad \text{یا} \quad u_{\xi\eta} = H_1(\xi, \eta, u_\xi),$$

در این حالات این معادله برای جواب عمومی قابل حل است.

معادله (۲.۲) را فرم کانونیک نوع اول معادلات هذلولوی گویند.

مثال ۵.۲. معادله هذلولوی زیر را به صورت کانونیک نوع اول بنویسید و آن را برای جواب عمومی حل کنید.

$$u_{xx} + 10u_{xy} + 9u_{yy} + u_x + u_y = 64(y - 5x)$$

حل. معادله مشخصه را به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 10\frac{dy}{dx} + 9 &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= 5 \pm \sqrt{5^2 - 9} = 5 \pm 4 = 9, 1 \\ \frac{dy}{dx} &= 1 \implies y - x = c_1 \\ \frac{dy}{dx} &= 9 \implies y - 9x = c_2. \end{aligned}$$

پس:

$$\xi = y - x, \quad \eta = y - 9x$$

حال به محاسبه مشتقات نسبی بر حسب متغیرهای جدید می‌پردازیم:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi(-1) + u_\eta(-9)$$

$$u_x = -u_\xi - 9u_\eta.$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi \cdot 1 + u_\eta \cdot 1$$

$$u_y = u_\xi + u_\eta.$$

$$u_{xx} = (u_x)_x = (-u_\xi - 9u_\eta)_x = (-u_\xi - 9u_\eta)_\xi \xi_x + (-u_\xi - 9u_\eta)_\eta \eta_x$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 18u_{\xi\eta} + 81u_{\eta\eta}.$$

$$u_{xy} = (u_x)_y = (-u_\xi - 9u_\eta)_y = (-u_\xi - 9u_\eta)_\xi \xi_y + (-u_\xi - 9u_\eta)_\eta \eta_y$$

$$u_{xy} = -u_{\xi\xi} - 10u_{\xi\eta} - 9u_{\eta\eta}.$$

$$u_{yy} = (u_y)_y = (u_\xi + u_\eta)_y = (u_\xi + u_\eta)_\xi \xi_y + (u_\xi + u_\eta)_\eta \eta_y$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

از قرار دادن این مشتقات نسبی در معادله به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} u_{xx} + 10u_{xy} + 9u_{yy} + u_x + u_y &= (1 - 10 + 9)u_{\xi\xi} + (18 - 100 + 18)u_{\xi\eta} \\ &+ (81 - 90 + 9)u_{\eta\eta} + (-1 + 1)u_\xi + (-9 + 1)u_\eta. \end{aligned}$$

همچنین

$$64(y - 5x) = 32(\xi + \eta).$$

به این ترتیب معادله زیر حاصل می گردد.

$$-64u_{\xi\eta} - 8u_{\eta} = 32(\xi + \eta)$$

یا

$$u_{\eta\xi} + \frac{1}{8}u_{\eta} = -\left(\frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\eta\right)$$

این فرم کانونیک نوع اول شرایط حل برای جواب عمومی را دارد. برای حل می گیریم.

$$u_{\eta} = v$$

و معادله می شود:

$$v_{\xi} + \frac{1}{8}v = -\left(\frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\eta\right).$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل عادی نسبت به ξ و در آن یک پارامتر است. جواب عمومی آن را به صورت زیر به دست می آوریم که ثابت جواب عمومی به η وابسته است.

$$v(\xi, \eta) = C(\eta)e^{-\frac{1}{8}\xi} - 4\xi - 4\eta + 32$$

پس

$$u_{\eta} = C(\eta)e^{-\frac{1}{8}\xi} - 4\xi - 4\eta + 32.$$

حال نسبت به η انتگرال بگیرد.

$$u(\xi, \eta) = \phi(\eta)e^{-\frac{1}{8}\xi} - 4\xi\eta - 2\eta^2 + 32\eta + \psi(\xi)$$

که در آن ϕ و ψ توابعی اختیاری هستند. جواب نهائی بر حسب x و y می شود:

$$u(x, y) = \phi(y-9x)e^{-\frac{x-y}{8}} + 4(y-x)(y-9x) + 2(y-9x)^2 - 32(y-9x) + \psi(y-x)$$

توابع اختیاری با استفاده از شرایط تکمیلی مسئله قابل تعیین است.

تذکر. با تغییر متغیرهای $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)$ و $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)$ معادله (۲.۲) به صورت $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = H_2(\alpha, \beta, u_\alpha, u_\beta, u)$ در می‌آید که آن را فرم کانونیک نوع دوم معادلات هذلولوی گویند. از این فرم در بحث‌های نظری استفاده می‌گردد.

حالت ۲: $\Delta = 0$ یا معادله سهموی است. در این حالت معادله مشخصه به صورت تک معادله زیر در می‌آید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A} \implies \phi(x, y) = c_1$$

در این حالت تغییر متغیرها را به صورت زیر می‌توان داشت.

$$\xi = \phi(x, y), \quad \eta = x \quad (\phi \text{ تابع مستقل از } x)$$

با این تغییر متغیر معادله (۱.۲) می‌شود:

$$u_{\eta\eta} = H_3(\xi, \eta, u_\xi, u_\eta, u). \quad (3.2)$$

چنانچه در H_3 مشتق u_ξ ظاهر نشود این معادله برای جواب عمومی قابل حل است. این معادله را صورت کانونیک معادله سهموی گویند.

مثال ۶.۲. جواب عمومی معادله سهموی زیر را به دست آورید.

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y + u = y + 2x$$

حل. معادله مشخصه را به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx} + 1 &= 0 \\ \frac{dy}{dx} = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1 &\implies y + x = c_1 \\ \xi = y + x, \quad \eta = x. \end{aligned}$$

حال به محاسبه مشتقات نسبی می پردازیم.

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi \cdot 1 + u_\eta \cdot 1$$

$$u_x = u_\xi + u_\eta.$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi \cdot 1 + u_\eta \cdot 0$$

$$u_y = u_\xi.$$

$$u_{xx} = (u_x)_x = (u_\xi + u_\eta)_x = (u_\xi + u_\eta)_\xi \xi_x + (u_\xi + u_\eta)_\eta \eta_x$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

$$u_{xy} = (u_x)_y = (u_\xi + u_\eta)_y = (u_\xi + u_\eta)_\xi \xi_y + (u_\xi + u_\eta)_\eta \eta_y$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}.$$

$$u_{yy} = (u_y)_y = (u_\xi)_y = (u_\xi)_\xi \xi_y + (u_\xi)_\eta \eta_y$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}.$$

از قرار دادن این مشتقات در معادله فوق، معادله زیر حاصل می گردد.

$$(1 - 2 + 1)u_{\xi\xi} + (2 - 2)u_{\xi\eta} + (1 + 0 + 0)u_{\eta\eta} + (1 - 1)u_\xi + u_\eta + u = \xi + \eta$$

یا

$$u_{\eta\eta} + u_\eta + u = \xi + \eta.$$

برای حل این معادله که یک معادله دیفرانسیل عادی خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت است به صورت زیر عمل می کنیم.

$$r^2 + r + 1 = 0 \implies r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$u(\xi, \eta) = e^{-\frac{1}{2}\eta} \left[\phi(\xi) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\eta + \psi(\eta) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\eta \right]$$

$$u(x, y) = e^{-\frac{1}{2}x} \left[\phi(x+y) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \psi(x) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right]$$

ϕ و ψ توابع اختیاری هستند و با اعمال شرایط تکمیلی همراه معادله قابل تعیین است.

حالت ۳: $\Delta < 0$ یا معادله از نوع بیضوی است.

در این حالت از حل معادله مشخصه به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{B + i\sqrt{-\Delta}}{2A} \implies \phi(x, y) = c_1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{B - i\sqrt{-\Delta}}{2A} \implies \psi(x, y) = c_2\end{aligned}$$

در این صورت متغیرهای جدید یعنی $\xi = \phi(x, y)$ و $\eta = \psi(x, y)$ مختلط اند. پس مشتق تابع حقیقی نسبت به آنها معنی ندارد. برای رفع این مشکل متغیرهای جدید را به صورت زیر می‌گیریم که حقیقی هستند.

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad \beta = \frac{1}{2i}(\xi - \eta)$$

بر حسب این متغیرها معادله (۱.۲) به صورت زیر در می‌آید.

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = H(\alpha, \beta, u_\alpha, u_\beta, u)$$

این معادله را فرم کانونیک معادلات بیضوی گویند. از این فرم در بحث‌های نظری استفاده می‌گردد.

تذکره ۱: موج یک بعدی از نوع هذلولوی است.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

۲) معادله حرارت یک بعدی از نوع سهموی است.

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

۳) معادله لاپلاس دو بعدی از نوع بیضوی است.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

تذکره. معمولاً معادلات هذلولوی با یکی از دو شرایط تکمیلی زیر همراه است.

(۱) تابع مجهول و مشتق آن برای یکی از دو متغیر x یا y برای $x = x_0$ یا $y = y_0$ داده می‌شود. این شرایط تکمیلی را شرایط کشی و معادله همراه با این شرایط را مسئله کشی گویند. شرایط کشی نسبت به زمان را شرایط اولیه گویند.

(۲) مقدار تابع مجهول روی یکی از منحنی‌های مشخصه و همچنین روی یک منحنی صعودی دیگر داده می‌شود. این شرایط تکمیلی را شرایط گورسا و معادله همراه با این شرایط را مسئله گورسا گویند.

مثال ۷.۲. مطلوبست حل مسئله کشی زیر

$$\begin{cases} u_{xx} + 10u_{xy} + 9u_{yy} + u_x + u_y = 64(y - 5x), & -\infty < x < \infty, y \geq 0 \\ u(x, 0) = x^2, & u_y(x, 0) = x \end{cases}$$

در مثال ۵.۲ این بخش جواب عمومی را به صورت زیر به دست آوردیم.

$$u(x, y) = \phi(y - 9x)e^{-\frac{x-y}{\lambda}} + 4(y-x)(y-9x) + 2(y-9x)^2 - 32(y-9x) + \psi(y-x).$$

حال شرایط کشی را اعمال کنیم.

$$u(x, 0) = \phi(-9x)e^{-\frac{1}{\lambda}x} + 36x^2 + 162x^2 + 288x + \psi(-x) = x^2$$

$$u_y(x, 0) = \phi'(-9x)e^{-\frac{1}{\lambda}x} + \frac{1}{\lambda}\phi(-9x)e^{-\frac{1}{\lambda}x} - 40x - 36x - 32 + \psi'(-x) = x$$

این دو معادله را می‌بایستی برای ϕ و ψ حل کنیم. برای این کار ψ را بین دو معادله حذف می‌کنیم. با مشتق‌گیری از معادله اول نسبت به x و جمع آن با معادله دوم به دست می‌آوریم.

$$-8\phi'(-9x)e^{-\frac{1}{\lambda}x} = 320x + 256 - 3x$$

یا

$$\phi'(-9x) = \left(-\frac{317}{8}x - 32\right)e^{\frac{1}{\lambda}x}$$

یا

$$\phi'(\eta) = \left(\frac{317}{72} \eta - 32 \right) e^{-\frac{1}{72} \eta}$$

یا

$$\begin{aligned} \phi(\eta) &= \int \left(\frac{317}{72} \eta - 32 \right) e^{-\frac{1}{72} \eta} d\eta = \left(\frac{317}{72} \eta - 32 \right) (-72) e^{-\frac{1}{72} \eta} \\ &+ \int 317 e^{-\frac{1}{72} \eta} d\eta = (-317\eta + 1987) e^{-\frac{1}{72} \eta} + A. \end{aligned}$$

$$\phi(\eta) = (-317\eta + 1987) e^{-\frac{1}{72} \eta} + A$$

$$\psi(\xi) = -197\xi^2 - 288\xi - \phi(-9\xi) e^{\frac{1}{72}\xi} - A e^{\frac{1}{72}\xi}$$

$$\psi(\xi) = (-2853\xi + 1987) e^{\frac{1}{72}\xi} - 197\xi^2 - 288\xi + A e^{\frac{1}{72}\xi}.$$

به این ترتیب جواب نهائی به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \left\{ \left(-317(y - 9x) + 1987 \right) e^{-\frac{1}{72}(y-9x)} + A \right\} e^{-\frac{1}{72}(x-y)} \\ &+ 4(y-x)(y-9x) + 2(y-9x)^2 - 32(y-9x) + \left[\left(-2853(y-x) \right. \right. \\ &\left. \left. + 1987 \right) e^{\frac{1}{72}(y-x)} - 197(y-x)^2 - 288(y-x) - A e^{\frac{1}{72}(y-x)} \right]. \end{aligned}$$

مثال ۸.۲. مطلوبست حل مسئله گورسای زیر

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} + u_x - u_y = y - x \\ u(x, y) = 2x, & y - x = 0 \text{ روی} \\ u(x, y) = \frac{1}{7} x^2, & y = 2x \text{ روی} \end{cases}$$

حل. معادله مشخصه عبارت است از $0 = 1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ یا $\frac{dy}{dx} = \pm 1$.

$$\frac{dy}{dx} = 1 \implies y - x = c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 \implies y + x = c_2$$

پس

$$\xi = y - x, \quad \eta = y + x$$

در نتیجه

$$u_x = -u_\xi + u_\eta.$$

$$u_y = u_\xi + u_\eta.$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

از قرار دادن آنها در معادله به دست می آوریم.

$$-4u_{\xi\eta} - 2u_\xi = \xi$$

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}u_\xi = -\frac{1}{4}\xi.$$

$$u_\xi = v, \quad v_\eta + \frac{1}{4}v = -\frac{1}{4}\xi$$

$$v = C(\xi)e^{-\frac{1}{4}\eta} - \frac{1}{4}\xi, \quad u_\xi = C(\xi)e^{-\frac{1}{4}\eta} - \frac{1}{4}\xi$$

$$u(\xi, \eta) = \phi(\xi)e^{-\frac{1}{4}\eta} - \frac{1}{4}\xi\eta + \psi(\eta).$$

یا

$$u(x, y) = \phi(y-x)e^{-\frac{1}{4}(y+x)} - \frac{1}{4}(y^2 - x^2) + \psi(y+x).$$

حال شرایط گورسا را اعمال کنیم.

$$u(x, x) = \phi(\circ)e^{-x} + 4\psi(2x) = 2x$$

$$u(x, 2x) = \phi(x)e^{-\frac{3}{4}x} - \frac{3}{4}x^2 + \psi(3x) = \frac{1}{4}x^2$$

از معادله اول به دست می آوریم.

$$\psi(\eta) = \eta - \phi(\circ)e^{-\frac{1}{4}\eta}$$

از قرار دادن آن در معادله دوم به دست می‌آوریم:

$$\phi(\xi) = \left(2\xi^2 + \frac{3}{4}\xi + \phi(\circ) e^{-\frac{3}{4}\xi} \right) e^{\frac{3}{4}\xi}$$

یا

$$\phi(\xi) = \left(2\xi^2 + \frac{3}{4}\xi \right) e^{\frac{3}{4}\xi} + \phi(\circ).$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \left[2(y-x)^2 + \frac{3}{4}(y-x) \right] e^{\frac{3}{4}(y-x)} e^{-\frac{1}{4}(y+x)} + \phi(\circ) e^{-\frac{1}{4}(y-x)} \\ & - \frac{1}{4}(y^2 - x^2) + (y+x) - \phi(\circ) e^{-\frac{1}{4}(y+x)} \end{aligned}$$

یا

$$u(x, y) = \left[2(y-x)^2 + \frac{3}{4}(y-x) \right] e^{y-2x} + \frac{1}{4}(y^2 - x^2) + (y+x).$$

مثال ۹.۲. مطلوبست حل مسئله با شرایط اولیه زیر

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & t \geq 0, -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

حل. معادله مشخصه را به صورت زیر داریم:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \pm c$$

پس

$$x - ct = c_1, \quad x + ct = c_2$$

و

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

در نتیجه

$$u_x = u_\xi + u_\eta.$$

$$u_t = c(u_\eta - u_\xi).$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

$$u_{tt} = c^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}).$$

از قرار دادن آنها در معادله به دست می آوریم.

$$-4c^2 u_{\xi\eta} = 0 \implies u_{\xi\eta} = 0$$

جواب عمومی این معادله به صورت زیر است.

$$u(\xi, \eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta)$$

یا

$$u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct).$$

حال شرایط اولیه را اعمال کنیم.

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

$$u_t(x, 0) = -c\phi'(x) + c\psi'(x) = g(x).$$

با انتگرال گیری از معادله دوم به دست می آوریم:

$$\phi(x) - \psi(x) = -\frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds + A.$$

از حل این معادله و معادله اول دستگاه فوق به دست می آوریم.

$$\phi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds - \frac{A}{2}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + \frac{A}{2}.$$

به این ترتیب جواب نهائی به صورت زیر حاصل می گردد.

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[f(x - ct) + f(x + ct) \right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

تذکره ۱. این جواب به جواب دالامبر معادله موج معروف است.

۲ روش دالامبر که در این بخش ارائه شد فقط برای معادلات هذلولوی یا معادله موج یک بعدی کارایی خوب دارد و حل معادله حرارت و لاپلاس یا معادلات حاوی دو متغیر مکان یا بیشتر مفید نیست.

۳ اگر f و g فرد باشد در این صورت $u(x, t)$ نسبت به x فرد است.

۴ اگر f و g زوج باشد در این صورت $u(x, t)$ نسبت به x زوج است.

تمرین ۲.۲

۱. ناحیه‌هایی که هر یک از معادلات زیر در آنها از نوع هذلولوی، سهموی و یا بیضوی است تعیین کنید.

$$\begin{aligned} \text{آ)} \quad & u_{xx} + yu_{yy} + u_x - u = x \\ \text{ب)} \quad & x^2 u_{xx} + y^2 u_{xy} - u_{yy} + xu = y^2 \\ \text{ج)} \quad & u_{xx} + xyu_{xy} + u_{yy} + u = x^2 \\ \text{د)} \quad & u_{xx} - yu_{xy} + yu_{yy} + u_x + u = x \end{aligned}$$

۲. منحنی‌های مشخصه هر یک از معادلات زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} \text{آ)} \quad & u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_x - 5u_y + u = e^x \\ \text{ب)} \quad & u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 3u = xy \\ \text{ج)} \quad & u_{yy} - u_{xy} + u_x - 2u_y = e^{x+y} \\ \text{د)} \quad & u_{xy} + u_x + 2u_y + u = x - y \end{aligned}$$

۳. هر یک از معادلات را به شکل کانونیک در آورید.

$$\begin{aligned} \text{آ)} \quad & u_{xx} - x^2 u_{yy} + u_x - u_y + u = xy \\ \text{ب)} \quad & yu_{xx} - yu_{yy} - 2u_y + u_x = x - y \end{aligned}$$

$$(ج) \quad x^2 u_{xx} + 4xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + u_x - u = x^2$$

$$(د) \quad e^x u_{xx} - e^y u_{yy} + u_x + u = xe^x$$

۴. مطلوبست حل مسائل کشی زیر

$$(آ) \quad \begin{cases} u_{xx} + 4u_{xy} + 9u_{yy} = x - y, \\ u(x, 0) = x^2, \quad u_y(x, 0) = x \end{cases}$$

$$(ب) \quad \begin{cases} 4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2x + y, \\ u(x, 0) = x^2, \quad u_y(x, 0) = x^2 \end{cases}$$

$$(ج) \quad \begin{cases} 3u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 2x - 3y, \\ u(x, 0) = x, \quad u_y(x, 0) = e^x \end{cases}$$

$$(د) \quad \begin{cases} u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} + u_x - u_y = xy, \\ u(x, 0) = e^x, \quad u_y(x, 0) = 1 \end{cases}$$

۵. مسائل گورسا زیر را حل کنید.

$$(آ) \quad \begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = xy, \\ u(x, y) = -y^2, \quad y + x = 0 \text{ روی} \\ u(x, y) = x^2, \quad y = x \text{ روی} \end{cases}$$

$$(ب) \quad \begin{cases} u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} + u_x - u_y = xy, \\ u(x, y) = x - y, \quad y + x = 0 \text{ روی} \\ u(x, y) = -2x - y, \quad y = x^2 \text{ روی} \end{cases}$$

۳.۲. مروری بر روش تبدیلات فوریه و روش دالامبر

در دو بخش این فصل دو روش برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای روی میدان بیکران ارائه نمودیم.

۱. روش تبدیلات فوریه (نامتناهی)

۲. روش دالامبر

در این بخش مروری بر بکارگیری آن‌ها خواهیم داشت. قبل از اینکه به بحث در مورد بکارگیری هر یک از این دو روش با جزییات کامل بپردازیم، در اینجا تفاوت اساسی آن‌ها را بیان می‌کنیم.

روش تبدیلات فوریه برای هر سه نوع معادلات دیفرانسیل پاره‌ای قابل اعمال است مشروط بر اینکه شرایط استفاده از آن در مسئله باشد لیکن محاسبه انتهای و تعیین جواب نهایی از روی تبدیل جواب چندان ساده نیست. روش دالامبر فقط برای دسته خاصی از معادلات پاره‌ای یعنی معادلات هذلولوی قابل اعمال است لیکن بکارگیری آن آسان‌تر و محاسبات نیز مقدماتی است.

روش حل با تبدیلات فوریه (نامتناهی): برای تشخیص مقدماتی اعمال این روش به دو نکته اولیه زیر توجه کنید:

نکته ۱. دامنه متغیری که می‌خواهیم برای آن تبدیلات فوریه (نامتناهی) را اعمال کنیم باید بیکران باشد. مثلاً $0 < x < \infty$ یا $-\infty < x < \infty$ باشد.

نکته ۲. تابع‌های داده شده در مسئله نسبت به متغیر x روی دامنه x انتگرال‌پذیر باشند یا مقدار انتگرال قدر مطلق آن‌ها کمتر از بینهایت باشد.

اگر این دو نکته برقرار باشد، تابع مجهول نسبت به x دارای تبدیل فوریه و انتگرال فوریه است و با این روش می‌تواند قابل حل باشد.

از روی هر پایه (یا تبدیل فوریه متناهی) می‌توان یک تبدیل فوریه (نامتناهی) به‌دست آورد که مسئله دارای دو نکته فوق را حل کند. این مطلب تحت عنوان "تبدیلات اشترم-لیوویل" در مرجع [۱] آمده است. لیکن جزء سرفصل این کتاب نیست. در بخش

تبدیلات فوریه، سه نوع تبدیلات فوریه را بیان کردیم. این سه نوع تبدیل و انتگرال فوریه آن‌ها را در اینجا یادآوری می‌کنیم.

تبدیل فوریه سینوسی: این تبدیل را به صورت زیر داریم:

$$\mathcal{F}_s(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx = F_s(\omega) \quad \text{تبدیل فوریه}$$

$$\mathcal{F}_s(f'') = -\omega^2 \mathcal{F}_s(f) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega f(0) \quad \text{تبدیل مشتقات از مرتبه ۲}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega x \, d\omega \quad \text{تبدیل معکوس یا انتگرال فوریه}$$

تذکره. از این تبدیل تحت شرایط زیر می‌توان استفاده نمود.

(۱) نکته ۱ و نکته ۲ فوق برقرار و دامنه متغیر x به صورت $0 < x < \infty$ باشد.

(۲) در معادله نسبت به x مشتق از مرتبه فرد ظاهر نشده باشد.

(۳) شرط مرزی نسبت به x در $x = 0$ برای مقدار تابع مجهول و مشتقات از مرتبه زوج آن داده شده باشد.

نکته ۳. چنانچه مشتق از مرتبه ۴ نسبت به x در معادله ظاهر شده باشد، $\mathcal{F}_s^{(4)}(f)$ از روی تبدیل فوریه سینوسی f'' به روش تکراری مقدور است.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s(f^{(4)}) &= -\omega^2 \mathcal{F}_s(f'') + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega f''(0) \\ &= \omega^4 \mathcal{F}_s(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega^3 f(0) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega f''(0) \end{aligned}$$

تبدیل فوریه کسینوسی: این تبدیل به صورت زیر است:

$$\mathcal{F}_c(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx = F(\omega) \quad \text{تبدیل فوریه}$$

$$\mathcal{F}_c(f'') = -\omega^2 \mathcal{F}_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega f'(\circ) \quad \text{تبدیل مشتقات از مرتبه ۲}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(\omega) \cos \omega x d\omega \quad \text{تبدیل معکوس یا انتگرال فوریه}$$

تذکره. کاربرد این تبدیل برای حل مسائل تحت شرایط مشابه تبدیل فوریه سینوسی با یک استثنا است که در زیر بیان می‌شود.

استثنا: برای تبدیل فوریه کسینوسی می‌بایستی مقدار مشتقات از مرتبه فرد در مبدأ داده شود.

تبدیل فوریه: این تبدیل برای $-\infty < x < \infty$ قابل اعمال و به صورت زیر است:

$$\mathcal{F}(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{i\omega x} dx = F(\omega) \quad \text{تبدیل فوریه}$$

$$\mathcal{F}(f^{(n)}) = (-i\omega)^n \mathcal{F}(f) \quad \text{و} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{تبدیل مشتقات}$$

تذکره. این تبدیل تحت نکته ۱ و نکته ۲ و بدون هیچ قیدی قابل استفاده است.

نکته ۴. چنانچه تابع‌های آمده در مسئله دارای هر یک از تبدیلات فوق باشند، دراین صورت مقدار جواب و کلیه مشتقات آن در $\pm\infty$ برابر صفر است. در اینجا یک مثال می‌آوریم.

مثال ۱۰.۲. مطلوبست حل مسئله زیر

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{ttxx} - u_{xxxx} - u + te^{-x}, \quad t \geq 0, x \leq 0$$

$$u(x, 0) = e^{-x}, \quad u_t(x, 0) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases},$$

$$u(0, t) = t, \quad u_{xx}(0, t) = 1.$$

حل. ابتدا توجه کنید که نکته ۱ و نکته ۲ برقرار است. همچنین شرایط مرزی برای تابع مجهول و مشتق مرتبه دوم آن نسبت به x در $x = 0$ داده شده و در معادله مشتق فرد نداریم. پس تبدیل فوریه سینوسی مناسب حل این مسئله است. در نتیجه از معادله نسبت به x تبدیل فوریه سینوسی می گیریم. برای سادگی می گیریم

$$\mathcal{F}_s(u(x, t)) = U(\omega, t) = U(t) = U.$$

در اینجا نسبت به t مشتق و نسبت به x انتگرال می گیریم. پس تعویض ترتیب آن ها مقدور است. یعنی

$$\mathcal{F}_s(u_{tt}) = U_{tt}.$$

همچنین

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s(u_{xx}) &= -\omega^2 \mathcal{F}_s(u) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega t \\ &= -\omega^2 U + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega t, \\ \mathcal{F}_s(u_{ttxx}) &= \mathcal{F}_s((u_{xx})_{tt}) = (\mathcal{F}_s(u_{xx}))_{tt} = \left(-\omega^2 U + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega t \right)_{tt} \\ &= -\omega^2 U_{tt}, \\ \mathcal{F}(u_{xxxx}) &= \omega^4 \mathcal{F}_s(u) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega^3 t + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega \\ &= \omega^4 U - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega^3 t + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega, \\ \mathcal{F}_s(e^{-x}) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} \sin \omega x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 + \omega^2}, \\ U(0) &= U(\omega, 0) = \mathcal{F}_s(u(x, 0)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} \sin \omega x \, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 + \omega^2}.\end{aligned}$$

توجه کنید انتگرال فوق تبدیل لاپلاس سینوسی برای $s = ۱$ و $a = \omega$ است.

$$\begin{aligned} U_t(\circ) &= U_t(\omega, \circ) = \mathcal{F}_s(u_t(x, \circ)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \sin \omega x \, dx \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \omega x}{\omega} \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1 - \cos \omega x)}{\omega}. \end{aligned}$$

از قرار دادن این مقادیر در مسئله، مسئله برای متغیر t به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} U_{tt} &= -\omega^2 U + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega t - \omega^2 U_{tt} - \omega^4 U + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega^3 t - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega \\ &\quad - U + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 + \omega^2} t, \\ U(\circ) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 + \omega^2}, \quad U_t(\circ) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1 - \cos \omega x)}{\omega}. \end{aligned}$$

معادله U را به صورت زیر داریم:

$$(1 + \omega^2)U_{tt} + (1 + \omega^2 + \omega^4)U = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\omega^3 + \omega + \frac{\omega}{1 + \omega^2} \right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega.$$

با تعریف $\alpha^2 = 1 + \omega^2$ ، $\beta^2 = 1 + \omega^2 + \omega^4$ ، $a = \omega^3 + \omega + \frac{\omega}{1 + \omega^2}$ و $b = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega$ ، معادله فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$\alpha^2 U_{tt} + \beta^2 U = at + b.$$

معادله مشخصه معادله فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$\alpha^2 r^2 + \beta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm \frac{\beta}{\alpha} i$$

در نتیجه

$$U = A \cos \frac{\beta}{\alpha} t + B \sin \frac{\beta}{\alpha} t + \frac{a}{\beta^2} t + \frac{b}{\beta^2}.$$

با اعمال شرایط اولیه به دست می آوریم

$$U(0) = A + \frac{b}{\beta^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 + \omega^2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 + \omega^2} - \frac{b}{\beta^2},$$

$$U_t(0) = \frac{\beta}{\alpha} B + \frac{a}{\beta^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1 - \cos \omega x)}{\omega}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\alpha}{\beta} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos \omega x}{\omega} - \frac{a}{\beta^2} \right].$$

از قرار دادن A و B در جواب عمومی U به دست می آوریم

$$U = U(\omega, t) = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 + \omega^2} - \frac{b}{\beta^2} \right) \cos \frac{\beta}{\alpha} t$$

$$+ \frac{\alpha}{\beta} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1 - \cos \omega x)}{\omega} - \frac{a}{\beta^2} \right] \sin \frac{\beta}{\alpha} t + \frac{a}{\beta^2} t + \frac{b}{\beta^2}.$$

حال از رابطه فوق تبدیل معکوس می گیریم تا جواب مسئله اولیه به دست آید. پس

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty U(\omega, t) \sin \omega x d\omega.$$

جواب نهایی مسئله را به همین صورت می پذیریم. محاسبه این نوع انتگرال ها با روش نیوتن یا به دست آوردن تابع اولیه چندان مقدور نیست. لیکن با استفاده از مباحث انتگرال مختلط و نظریه مانده بعضاً قابل محاسبه است.

حل با روش دالامبر: همانطوریکه قبلاً گفتیم روش دالامبر اولین، بهترین و دقیق ترین روش برای حل معادلات دیفرانسیل پاره ای است. لیکن با توجه به قیدهای زیر که روی این روش است، اعمال آن فقط برای خانواده کوچکی از معادلات پاره ای قابل اعمال است.

۱. معادله خطی و از مرتبه دوم و فقط حاوی دو متغیر مستقل باشد.

۲. دامنه متغیرهای مستقل بیکران، یکی از آن ها با دامنه $(-\infty, \infty)$ و دامنه دیگری $[0, \infty)$ باشد و شرط تکمیلی فقط با متغیر با دامنه $[0, \infty)$ و به صورت شرط اولیه و یا شرط کشی در صفر باشد، یا شرط گورسا باشد.

۳. معادله از نوع هذلولوی یا موج باشد.

نکته. قیدی روی تابع‌های داده‌شده در مسئله نیست.

تعریف ۱.۲. معادله مرتبه دوم از دو متغیر مستقل x و y

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G(x, y) \quad (۴.۲)$$

را در نظر بگیرید. ضرایب معمولاً ثابت‌اند ولی می‌توانند تابعی از x و y نیز باشند.

آ) این معادله را هذلولوی می‌گوییم اگر $\Delta = B^2 - 4AC > 0$.

ب) این معادله را سهموی می‌گوییم اگر $\Delta = 0$.

ج) این معادله را بیضوی می‌گوییم اگر $\Delta < 0$.

معادله مرتبه اول

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\frac{dy}{dx} + C = 0 \quad (۵.۲)$$

را معادله مشخصه معادله (۴.۲) می‌گوییم.

تذکره ۱. به علامت منفی قبل از B در معادله (۵.۲) توجه کنید.

۲) اگر $A = 0$ و $C \neq 0$ باشد، معادله مشخصه را به صورت زیر می‌گیریم:

$$C\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - B\frac{dx}{dy} = 0$$

از حل معادله (۵.۲) برای $\frac{dy}{dx}$ به دو معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{2A}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{2A}.$$

برای حالت هذلولوی $\Delta > 0$ است. از حل این معادلات جواب عمومی آن‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{B + \sqrt{\Delta}}{2A} \Rightarrow \phi(x, y) = c_1, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{B - \sqrt{\Delta}}{2A} \Rightarrow \psi(x, y) = c_2.\end{aligned}$$

حال تغییر متغیر مستقل به صورت زیر می‌دهیم:

$$\xi = \phi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

با اعمال این تغییر متغیرهای مستقل معادله (۴.۲) به صورت

$$u_{\xi\eta} = H_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

درمی‌آید. یعنی مشتق $u_{\xi\xi}$ و $u_{\eta\eta}$ نداریم.

نکته. اگر ضرایب (۴.۲) ثابت باشد، این معادله با ضرایب ثابت است. اگر در معادله فوق u و u_ξ نباشد، یعنی $u_{\xi\eta} = H_1(\xi, \eta, u_\eta)$ یا اگر در آن u و u_η نباشد، یعنی $u_{\xi\eta} = H_1(\xi, \eta, u_\xi)$ در این صورت این معادله برای جواب عمومی قابل حل است.

روش حل: فرض کنید $u_{\xi\eta} = H_1(\xi, \eta, u_\eta)$ باشد. بگیرد $u_\eta = v$. آنگاه این معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$v_\xi = H_1(\xi, \eta, v)$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل عادی با متغیر مستقل ξ و پارامتر η و خطی است. پس به سادگی قابل حل است. از حل آن به دست می‌آوریم

$$u_\eta = v(\xi, \eta).$$

حال اگر نسبت به η انتگرال بگیریم، $u(\xi, \eta)$ کاملاً مشخص می‌شود. به جای ξ مقدار $\phi(x, y)$ و به جای η مقدار $\psi(x, y)$ را قرار می‌دهیم. در این صورت جواب نهایی مسئله به دست می‌آید. با اعمال شرایط تکمیلی جواب یگانه مسئله مشخص می‌شود.

مثال ۱۱.۲. مطلوبست حل مسئله با شرایط کشی زیر

$$u_{xx} + 5u_{xy} + 6u_{yy} + u_x + 2u_y = x + y,$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_y(x, 0) = x + 2. \quad \text{شرایط کشی}$$

حل. معادله مشخصه معادله فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 5\frac{dy}{dx} + 6 &= 0, \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = 2, 3. \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = 2 &\Rightarrow y = 2x + c_1 \Rightarrow y - 2x = c_1, \\ \frac{dy}{dx} = 3 &\Rightarrow y = 3x + c_2 \Rightarrow y - 3x = c_2. \end{aligned}$$

بگیرید

$$\xi = y - 2x, \quad \eta = y - 3x.$$

حال باید مشتقات u بر حسب x و y را بر حسب ξ و η به دست آوریم. ابزار این کار قاعده زنجیره‌ای مشتق است.

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi(-2) + u_\eta(-3), \\ u_x &= -2u_\xi - 3u_\eta. \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi(+1) + u_\eta(+1), \\ u_y &= u_\xi + u_\eta. \end{aligned} \quad (7.2)$$

اکنون با استفاده از این مشتقات مرتبه اول، مشتقات مرتبه دوم را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_x)_x = (-2u_\xi - 3u_\eta)_x \\ &= (-2u_\xi - 3u_\eta)_\xi \xi_x + (-2u_\xi - 3u_\eta)_\eta \eta_x \\ &= (-2u_{\xi\xi} - 3u_{\eta\xi})(-2) + (-2u_{\xi\eta} - 3u_{\eta\eta})(-3), \\ u_{xx} &= 4u_{\xi\xi} + 12u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned}
 u_{xy} &= (u_x)_y = (-2u_\xi - 3u_\eta)_y \\
 &= (-2u_\xi - 3u_\eta)_\xi \xi_y + (-2u_\xi - 3u_\eta)_\eta \eta_y \\
 &= (-2u_{\xi\xi} - 3u_{\eta\xi})(+1) + (-2u_{\xi\eta} - 3u_{\eta\eta})(+1), \\
 u_{xy} &= -2u_{\xi\xi} - 5u_{\xi\eta} - 3u_{\eta\eta}. \quad (9.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{yy} &= (u_y)_y = (u_\xi + u_\eta)_y \\
 &= (u_\xi + u_\eta)_\xi \xi_y + (u_\xi + u_\eta)_\eta \eta_y \\
 &= (u_{\xi\xi} + u_{\eta\xi})(+1) + (u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})(+1), \\
 u_{yy} &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}. \quad (10.2)
 \end{aligned}$$

از (۶.۲) u_x ، از (۷.۲) u_y ، از (۸.۲) u_{xx} ، از (۹.۲) u_{xy} ، و از (۱۰.۲) u_{yy} به دست می آید. با قرار دادن این مشتقات در معادله اصلی خواهیم داشت

$$0 \cdot u_{\xi\xi} + (-1)u_{\xi\eta} + 0 \cdot u_{\eta\eta} + 0 \cdot u_\xi + (-1)u_\eta = x + y$$

یا

$$u_{\xi\eta} + u_\eta = -x - y.$$

حال $-x - y$ را نیز بر حسب ξ و η محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned}
 y - 2x &= \xi & x &= \xi - \eta \\
 \Rightarrow & & \Rightarrow & x + y = 4\xi - 3\eta
 \end{aligned}$$

$$y - 3x = \eta \quad y = 3\xi - 2\eta$$

در نتیجه معادله بر حسب ξ و η به صورت زیر به دست می آید:

$$u_{\xi\eta} + u_\eta = -4\xi + 3\eta$$

قرار دهید $u_\eta = v$ تا به دست آورید

$$v_\xi + v = -4\xi + 3\eta.$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل عادی با تابع مجهول v و متغیر مستقل ξ است. جواب عمومی این معادله به صورت زیر است:

$$v = C(\eta) e^{-\xi} - 4\xi + 3\eta + 4$$

پس

$$u_{\eta} = C(\eta) e^{-\xi} - 4\xi + 3\eta + 4.$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \phi(\eta) e^{-\xi} - 4\xi\eta + \frac{3}{2}\eta^2 + 4\eta + \psi(\xi) \\ u(x, y) &= \phi(y - 3x) e^{-(y-2x)} - 4(y-2x)(y-3x) + \frac{3}{2}(y-3x)^2 \\ &\quad + 4(y-3x) + \psi(y-2x) \end{aligned}$$

به طوری که در آن $\phi(\eta)$ تابع اولیه $C(\eta)$ و توابع C و ψ توابع اختیاری جواب عمومی هستند.

حال باید شرایط کنشی را اعمال کنیم تا این توابع ϕ و ψ را به دست آوریم. پس

$$u(x, 0) = x \Rightarrow \phi(-3x) e^{2x} - 24x^2 + \frac{27}{2}x^2 - 12x + \psi(-2x) = x$$

و

$$\begin{aligned} u_y(x, 0) = x + 2 &\Rightarrow \phi'(-3x) e^{2x} - \phi(-3x) e^{2x} + 20x - 9x + 4 \\ &\quad + \psi'(-2x) = x + 2 \end{aligned}$$

که در اینجا $\phi' = \frac{d\phi}{d\xi}$ و $\psi' = \frac{d\psi}{d\eta}$. این دو معادله را باید برای ϕ و ψ حل کنیم. برای این کار از معادله اولی نسبت به x مشتق می‌گیریم تا معادله اول زیر به دست آید:

$$-3\phi'(-3x) e^{2x} + 2\phi(-3x) e^{2x} - 21x - 12 - 2\psi'(-2x) = 1.$$

معادله دوم را در ۲ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت

$$2\phi'(-3x) e^{2x} - 2\phi(-3x) e^{2x} + 22x + 8 + 2\psi'(-2x) = 2x + 4.$$

از جمع دو معادله فوق به دست می آوریم:

$$-\phi'(-3x)e^{2x} + x - 4 = 2x + 5$$

یا

$$\phi'(-3x) = -(x+9)e^{-2x}.$$

حال بگیریید $-3x = \eta$ یا $x = -\frac{\eta}{3}$. بنابراین

$$\phi'(\eta) = -\left(-\frac{\eta}{3} + 9\right)e^{\frac{2}{3}\eta}.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\phi(\eta) &= -\int \left(-\frac{\eta}{3} + 9\right)e^{\frac{2}{3}\eta} d\eta = -\frac{3}{2}\left(-\frac{\eta}{3} + 9\right)e^{\frac{2}{3}\eta} - \frac{1}{3}\int e^{\frac{2}{3}\eta} d\eta \\ &= \left(\frac{\eta}{2} - \frac{57}{4}\right)e^{\frac{2}{3}\eta} + A.\end{aligned}$$

از رابطه $u(x, 0) = x$ به دست می آوریم:

$$\psi(-2x) = -\phi(-3x)e^{2x} + \frac{21}{4}x^2 + 13x.$$

از ϕ فوق استفاده کنیم:

$$\psi(-2x) = \left[\frac{57}{4} + \frac{3}{2}x\right]e^{-2x} \cdot e^{2x} - Ae^{2x} + \frac{21}{4}x^2 + 13x$$

یا

$$\psi(-2x) = +\frac{21}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{57}{4} - Ae^{2x}.$$

حال بگیریید $-2x = \xi$ یا $x = -\frac{\xi}{2}$ تا به دست آورید:

$$\psi(\xi) = \frac{21}{8}\xi^2 - \frac{29}{4}\xi + \frac{57}{4} - Ae^{-\xi}.$$

پس جواب نهایی می‌شود:

$$u(x, y) = \left(\frac{(y - 3x)}{2} - \frac{57}{4} \right) e^{\frac{2}{3}(y-3x)} e^{-(y-2x)} + A e^{-(y-2x)} \\ - 4(y - 2x)(y - 3x) + \frac{3}{2}(y - 3x)^2 + 4(y - 3x) \\ + \frac{21}{8}(y - 2x)^2 - \frac{29}{4}(y - 2x) + \frac{57}{4} - A e^{-(y-2x)}.$$

نکته. اگر در معادله هذلولوی متغیر y زمان باشد، این متغیر را با t نشان می‌دهند و شرایط کشی را نیز شرایط اولیه می‌گویند.

تذکره ۱. معادلات از نوع پواسن که یک نوع معادله بیضوی است با روش دالامبر روی میدان بیکران قابل حل نیست. همچنین اگر توابع داده‌شده در اینگونه مسائل فاقد تبدیل فوریه نامتناهی باشند با اینگونه تبدیلات نیز قابل حل نیستند. با استفاده از توابع مختلط و نگاشت‌های هم‌مدیس می‌توان اینگونه مسائل را به مسائل روی میدان کراندار تبدیل و با استفاده از روش پایه آن‌ها را حل نمود.

۲. روش‌های دیگری برای حل مسائل روی میدان بیکران می‌توان یافت که استفاده نظری از آن‌ها بیشتر است اگرچه جنبه‌های محاسباتی نیز دارد. یکی از این روش‌ها اصل دوهامل است که در بخش بعدی می‌آید.

تمرین ۳.۲

مسائل زیر را با استفاده روش تبدیلات فوریه یا روش دالامبر حل کنید.

$$۱. \quad u_t = u_{xx} + u_{txx} - u + te^{-x}, \quad t \geq 0, x \geq 0, \\ u(x, 0) = 2e^{-x}, \quad u(0, t) = t.$$

$$\begin{aligned} ۲. \quad & u_{tt} = u_{xx} + ۲u_{txx} - u + e^{-x}\delta(t-۱), \quad t \geq ۰, x \geq ۰, \\ & u(x, ۰) = U_۱(x) - U_۲(x), \quad u_t(x, ۰) = ۰, \quad u_x(۰, t) = t, \\ & U_a(t) \text{ تابع پله‌ای واحد با نقطه شروع } a \text{ است.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳. \quad & u_{tt} + u_{xxxx} - u_{ttxx} + ۲u_t = te^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty, t \geq ۰ \\ & u(x, ۰) = ۲\delta(x - \frac{1}{۲}), \quad u_t(x, ۰) = \frac{1}{1+x^۲}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۴. \quad & u_{xx} + u_{yy} - u_{xxyy} - u = e^{-x-y}, \quad x \geq ۰, y \geq ۰ \\ & u(۰, y) = e^{-y}, \quad u_y(x, ۰) = ۱ - U_۱(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۵. \quad & u_t = u_{xx} + u_{yy} - u_{txxyy} \quad t \geq ۰, ۰ \leq x \leq ۱, -\infty < y < \infty \\ & -u + tx e^{-|y|}, \\ & u(x, y, ۰) = x U_۰(y) e^{-y}, \quad u_x(۰, y, t) = ۰, \quad u(۱, y, t) = ۰. \end{aligned}$$

مسائل با شرایط کشی زیر را برای $-\infty < x < \infty$ و $y > ۰$ حل کنید.

$$۶. \quad \begin{cases} u_{xx} + ۱۰u_{xy} + ۹u_{yy} = x - y, \\ u(x, ۰) = x^۲, \quad u_y(x, ۰) = x. \end{cases}$$

$$۷. \quad \begin{cases} ۳u_{xx} + ۱۰u_{xy} + ۳u_{yy} = ۲x - ۳y, \\ u(x, ۰) = x, \quad u_y(x, ۰) = e^x. \end{cases}$$

$$۸. \quad \begin{cases} u_{xx} + ۳u_{xy} + ۲u_{yy} + u_x + u_y = xy, \\ u(x, ۰) = e^x, \quad u_y(x, ۰) = ۱. \end{cases}$$

مسائل با شرایط گورسای زیر را برای $-\infty < x < \infty$ و $-\infty < y < \infty$ حل کنید.

$$۹. \quad \begin{cases} u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y = xy, \\ u(x, y) = x^۲, & \text{روی } y = x \\ u(x, y) = -y^۲, & \text{روی } y = -x \end{cases}$$

$$۱۰. \begin{cases} 4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2x + y, \\ u(x, y) = x \\ u(x, y) = x^2, \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{روی } y = x \\ \text{روی } 4y = x \end{matrix}$$

$$۱۱. \begin{cases} u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} + u_x + u_y = xy, \\ u(x, y) = x - y, \\ u(x, y) = -2x - 2y, \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{روی } y = x \\ \text{روی } y = 3x \end{matrix}$$

۴.۲ تبدیل لاپلاس و اصل دوهامل

تبدیل لاپلاس یکی از ابزارهای اصلی حل مسائل معادلات دیفرانسیل عادی با شرایط اولیه محسوب می‌گردد. از این ابزار برای حل مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای همراه با شرایط اولیه نیز می‌توان استفاده کرد. لیکن در اکثر مواقع محاسبه تبدیل معکوس بسیار پیچیده است. به این دلیل از آن کمتر استفاده می‌گردد. استفاده از آن برای معادلات موج یک بعدی ممکن است به جواب بسیار خوبی منجر شود. در اینجا مثال‌هایی از این مورد می‌آوریم.

مثال ۱۲.۲. مطلوبست حل مسئله با شرایط اولیه-مرزی موج یک بعدی زیر

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = e^{t-x}, & x \geq 0, t \geq 0 \\ u(x, 0) = e^{-x}, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) - u_x(0, t) = \sin t, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \end{cases}$$

حل. از معادله تبدیل لاپلاس بگیریم.

$$\mathcal{L}u(x, t) = U(x, s) = U(x) = U$$

$$s^2 U - U_{xx} = \frac{e^{-x}}{s-1} + se^{-x}, \quad s > 1, x \geq 0$$

$$U(0) - U'(0) = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0$$

جواب عمومی معادله را به صورت زیر داریم.

$$s^2 - r^2 = 0 \implies r = \pm s$$

$$U(x) = C_1 e^{-sx} + C_2 e^{sx} - \frac{1}{s^2 - 1} \left(\frac{1}{s-1} + s \right) e^{-x}$$

برای برقراری شرایط مرزی در بینهایت، با توجه به این که $s > 0$ ، باید $C_2 = 0$. برای برقراری شرط مرزی در $x = 0$ باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} U(0) - U'(0) &= C_1 - \frac{1}{s^2 - 1} \left(\frac{1}{s-1} + s \right) - sC_1 + \frac{1}{s^2 - 1} \left(\frac{1}{s-1} + s \right) \\ &= \frac{1}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

یا

$$C_1(1-s) = \frac{1}{s^2 + 1} \implies C_1 = -\frac{1}{(s-1)(s^2 + 1)}.$$

به این ترتیب به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} U(x) &= -\frac{1}{(s^2 + 1)(s-1)} e^{-sx} - \frac{1}{s^2 + 1} \frac{1}{s-1} e^{-x} - \frac{s}{s^2 + 1} e^{-x} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s-1} \right) e^{-sx} + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s-1} \right) e^{-x} \\ &\quad - \frac{s}{s^2 + 1} e^{-x} \end{aligned}$$

با تبدیل معکوس گیری به دست می آوریم:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\cos t + \sin t - e^t) H(t-x) + \frac{1}{2} (-\cos t + \sin t - e^{-t}) e^{-x}.$$

که در این جا $H(t-x)$ تابع پله ای است که برای $t < x$ برابر صفر و برای $t > x$ برابر ۱ است.

مثال ۱۳.۲. مسئله انتقال حرارت زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-t-x}, & x \geq 0, t \geq 0 \\ u(x, 0) = e^{-x}, \quad u(0, t) = e^{-t}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \end{cases}$$

حل. بگیرید $\mathcal{L}u(x, t) = U(x, s) = U(x) = U$ و از مسئله تبدیل لاپلاس بگیرید.

$$sU - U_{xx} = \frac{e^{-x}}{s+1} + e^{-x} = \frac{s+2}{s+1}e^{-x}, \quad s > 1, x \geq 0$$

$$U(0) = \frac{1}{s+1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0$$

جواب عمومی معادله را به صورت زیر داریم.

$$U(x) = C_1 e^{-\sqrt{s}x} + C_2 e^{\sqrt{s}x} + \frac{s+2}{(s+1)(s-1)} e^{-x}$$

حال شرایط مرزی را اعمال کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0 \implies C_2 = 0$$

$$U(0) = C_1 + \frac{s+2}{s^2-1} = \frac{1}{s+1}$$

یا

$$C_1 = -\frac{s+2}{s^2-1} + \frac{1}{s+1}.$$

به این ترتیب به دست می آوریم.

$$U(x, s) = \left(-\frac{s+2}{s^2-1} + \frac{1}{s+1} \right) e^{-\sqrt{s}x} + \frac{s+2}{s^2-1} e^{-x}.$$

چون

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-\alpha\sqrt{s}}) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$$

پس جواب نهائی به صورت زیر به دست می آید.

$$u(x, t) = \left(-\cosh t - 2 \sinh t + e^{-t} \right) * \frac{x}{\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\ + \left(\cosh t + 2 \sinh t \right) e^{-x}.$$

تذکره. استفاده از تبدیل لاپلاس برای معادله حرارت منجر به محاسبات پیچیده برای تبدیل معکوس می‌گردد. به این دلیل از آن برای مسائل معادلات حرارت کمتر استفاده می‌گردد.

در این قسمت به بیان اصل دوهامل روی میدان بیکران می‌پردازیم. فرض کنید u تابعی مجهول و w تابعی معلوم از متغیرهای x, y, z, t و P یک عملگر دیفرانسیل پاره‌ای با ضرایب ثابت و از مرتبه m نسبت به t باشد. حال سه مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} P(u) &= w(x, y, z, t), \quad t \geq 0, a < x < b, c < y < d, \alpha < z < \beta \\ \frac{\partial^j u}{\partial t^j} &= f_j(x, y, z), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1 \\ M_k u &= h_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (11.2)$$

که تساوی اخیر نشان دهنده شرایط مرزی غیر همگن با ضرایب ثابت است. مسئله دوم را به صورت زیر داریم.

$$\begin{aligned} P(u) &= 0, \quad t \geq 0, a < x < b, c < y < d, \alpha < z < \beta \\ \frac{\partial^j u}{\partial t^j} &= f_j(x, y, z), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1 \\ M_k u &= h_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (12.2)$$

مسئله سوم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} P(u) &= 0, \quad t \geq 0, a < x < b, c < y < d, \alpha < z < \beta \\ \frac{\partial^j u}{\partial t^j} &= 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-2 \\ \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} &= w(x, y, z, s) \\ M_k u &= h_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (13.2)$$

خاصیت ۳.۲. فرض کنید f_j ها و h_k ها و w توابعی پیوسته، $u_1(x, y, z, t)$ جواب مسئله (۱۲.۲) و $v(x, y, z, t; s)$ جواب مسئله (۱۳.۲) و

به صورت زیر داریم:

$$u_2(x, y, z, t) = \int_0^t v(x, y, z, t-s; s) ds$$

آن گاه جواب مسئله (۱۱.۲) را

$$u(x, y, z, t) = u_1(x, y, z, t) + u_2(x, y, z, t).$$

علت. چون معادله و کلیه شرایط تکمیلی خطی است و u_1 کلیه شرایط تکمیلی را برقرار می‌کند و $P(u_1) = 0$ ، کفایت نشان دهیم u_2 جواب مسئله زیر است.

$$\begin{aligned} P(u) &= w(x, y, z, t), \quad t \geq 0, a < x < b, c < y < d, \alpha < z < \beta \\ \frac{\partial^j u}{\partial t^j} &= 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1 \\ M_k u &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (14.2)$$

ابتدا شرایط اولیه و مرزی را بررسی می‌کنیم. چون v دارای مشتق از مرتبه m پیوسته نسبت به t و مشتق‌پذیر نسبت به سایر متغیرها است پس جای حد و انتگرال قابل تعویض است. چون v در شرایط مرزی همگن صدق می‌کند پس u_2 نیز در شرایط مرزی همگن نیز صدق می‌کند. یعنی $M_k u_2 = 0$ برای $k = 1, 2, \dots, n$. حال شرایط اولیه را بررسی می‌کنیم. با توجه به تعریف u_2 داریم $u_2(x, y, z, 0) = 0$. همچنین

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{t=0} = v(x, y, z, 0; 0) + \int_0^0 v_t(x, y, z, t-s; s) ds = \int_0^0 v_t(x, y, z, t-s; s) ds$$

پس $u_{2t}(x, y, z, 0) = 0$. حال فرض کنید برای $i, j = 1, 2, \dots$ و $i < m-j$ داریم:

$$\left. \frac{\partial^i u_2}{\partial t^i} \right|_{t=0} = \int_0^0 \frac{\partial^i}{\partial t^i} v(x, y, z, t-s; s) ds \Big|_{t=0} = 0.$$

در این صورت

$$\frac{\partial^{i+1} u_2}{\partial t^{i+1}} = \frac{\partial^i}{\partial t^i} v(x, y, z, 0; t) + \int_0^t \frac{\partial^{i+1}}{\partial t^{i+1}} v(x, y, z, t-s; s) ds.$$

با توجه به فرض استقرا فوق به دست می آوریم.

$$\frac{\partial^{i+1} u_{\gamma}}{\partial t^{i+1}} \Big|_{t=0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-2.$$

برای $i = m-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i u_{\gamma}}{\partial t^i} &= \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} v(x, y, z, 0; t) + \int_0^t \frac{\partial^m}{\partial t^m} v(x, y, z, t-s; s) ds \\ &= w(x, y, z, t) + \int_0^t \frac{\partial^m}{\partial t^m} v(x, y, z, t-s; s) ds. \end{aligned}$$

بدین ترتیب:

$$\begin{aligned} P(u_{\gamma}) &= P\left(\int_0^t v(x, y, z, t-s; s) ds\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial^i v}{\partial t^i} \Big|_{t=0} + \int_0^t P(v(x, y, z, t-s; s)) ds \\ &= w(x, y, z, t). \end{aligned}$$

پس u_{γ} در مسئله (۱۴.۲) صدق می کند.

مثال ۱۴.۲. مسئله موج ناهمگن زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x, t), & t \geq 0, -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

حل. برای $v(x, t; s)$ با توجه به مثال ۹.۲، حل دالامبر برای معادله موج همگن به دست می آوریم.

$$v(x, t; s) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(\tau, s) d\tau$$

در نتیجه

$$u_{\gamma}(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(\tau, s) d\tau ds.$$

همچنین از همان مثال برای u_1 داریم.

$$u_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{c}} \left[f(x - ct) + f(x + ct) \right] + \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

به این ترتیب جواب این مسئله را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{c}} \left[f(x - ct) + f(x + ct) \right] + \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \\ + \frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(\tau, s) d\tau ds.$$

در حالت خاص $h(x, t) = \sqrt{2}xt$ و $g(x) = xe^{-x^2}$ و $f(x) = \sin x^2$ به دست می‌آوریم.

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{c}} \left[\sin(x + ct)^2 + \sin(x - ct)^2 \right] + \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{x-ct}^{x+ct} xe^{-x^2} dx \\ + \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} \sqrt{2}ts d\tau ds.$$

یا

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{c}} \left[\sin(x + ct)^2 + \sin(x - ct)^2 \right] \\ + \frac{1}{\sqrt{c}} \left[e^{-(x+ct)^2} - e^{-(x-ct)^2} \right] + \sqrt{2}cx \frac{t^3}{12}.$$

مثال ۱۵.۲. مسئله انتقال حرارت زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + tf(x), & t \geq 0, -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

حل. جواب این مسئله را با استفاده از اصل دوهامل به صورت $u = u_1 + u_2$ داریم که

u_1 جواب مسئله همگن

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t \geq 0, -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

و $u_1(x, t) = \int_0^t v(x, t-s; s) ds$ که در آن $v(x, t; s)$ جواب مسئله زیر است.

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & t \geq 0, -\infty < x < \infty \\ v(x, 0) = sf(x) \end{cases}$$

حل مسئله u_1 را با تبدیل فوریه به صورت زیر به دست می آوریم.

$$\begin{cases} U_t + w^2 U = 0, \\ U(0) = A = \mathcal{F}(g) \end{cases} \implies U = Ae^{-w^2 t}.$$

پس $U(w, t) = \mathcal{F}(g)e^{-w^2 t}$. طبق مثال ۴.۲ داریم:

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-w^2 t}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

با توجه به خاصیت کنولوشن برای تبدیل فوریه که با فرمول زیر داده می شود:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g) \cdot \mathcal{F}(h)) = g * h = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)h(x-y) dy$$

به دست می آوریم:

$$u_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy.$$

مشابهاً جواب مسئله v می شود.

$$v(x, t; s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} sf(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy.$$

9

$$u_1(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} sf(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} dy \right\} ds.$$

در نتیجه

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(y) \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{s}{\sqrt{t-s}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} ds \right] dy.$$

تذکره. اصل دوهامل هم برای میدان کرانه‌دار و هم برای میدان بیکران کاربرد دارد. در اینجا مثال‌ها برای میدان بیکران آورده شده است.

تمرین ۴.۲

مسائل زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

۱. $u_{tt} = u_{xx} + x \cos t, \quad 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0$
 $u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = t, \quad u(\pi, t) = 0$
۲. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u + xt, \quad 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0$
 $u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = t$
۳. $u_{tt} = u_{xx} + u_{xxtt} + e^{-x} \sin t, \quad x \geq 0, t \geq 0$
 $u(x, 0) = e^{-x}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = t, \quad u(+\infty, t) = 0$
۴. $u_{tt} + u_{xxxx} = te^{-x}, \quad 0 \leq x < \infty, t \geq 0$
 $u(x, 0) = e^{-x}, \quad u_t(x, 0) = 0,$
 $u(0, t) = t, \quad u_{xx}(0, t) = 0, \quad u(+\infty, t) = 0$
۵. $u_t = u_{xx} + t^2 e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty, t \geq 0$
 $u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad u(x, t) \text{ کرانه‌دار}$

مسائل زیر را با استفاده از اصل دوهامل حل کنید.

۶. $u_{tt} + 2u_t = u_{xxtt} + xt, \quad 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0$
 $u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = t, \quad u(\pi, t) = 0$

$$٧. \quad u_t = u_{xx} + u_{xxt} + xe^t, \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_x(0, t) = t, \quad u_x(1, t) = 0$$

$$٨. \quad u_{tt} = u_{xx} + u + te^{-x}, \quad 0 < x < \infty, t \geq 0$$

$$u(x, 0) = xe^{-x}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = e^t, \quad u(+\infty, t) = 0$$

$$٩. \quad u_t = u_{xx} - u + \sin t e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty, t \geq 0$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad \text{کرانه‌دار } u(x, t)$$

$$١٠. \quad u_{tt} + ٢u_{xxxx} + u_{xxtt} - u = e^{t-x}, \quad x \geq 0, t \geq 0$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x, 0) = 0,$$

$$u_x(0, t) = e^t, \quad u_{xxx}(0, t) = t, \quad u(+\infty, t) = 0, \quad u_{xx}(+\infty, t) = 0$$

فصل ۳

توابع تحلیلی

هدف از این فصل معرفی توابع مختلط و در نهایت تابع تحلیلی است که می‌توان گفت کامل‌ترین توابع از نظر خواص و بهترین ابزار برای محاسبه انتگرال‌های پیچیده و تبدیل میدان‌های «بد» به میدان‌های «خوب» است به‌طوری‌که انجام عملیات ریاضی مطلوب در میدان دوم مقدور و قابل انتقال به میدان اول باشد. توابع مختلط توابعی با دامنه و برد اعداد مختلط هستند. تابع تحلیلی هم یعنی تابع مشتق‌پذیر. با توجه به این نکات در بخش ۱.۳ به معرفی اعداد مختلط و خواص آن می‌پردازیم. در بخش ۲.۳ توابع تحلیلی و در بخش ۳.۳ نیز توابع مقدماتی را داریم. در فصل بعدی بعد از معرفی انتگرال مختلط و خواص اساسی آن کاربرد آن را در محاسبات انتگرال حقیقی خواهیم داشت. در فصل پنجم هم بعد از معرفی توابع هم‌دیس و خواص اساسی آن، کاربرد آن را در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خواهیم دید.

۱.۳ اعداد مختلط

در این بخش به یادآوری اعداد مختلط و خواص اساسی آن می‌پردازیم. روی مجموعه نقاط صفحه که آن را با $\mathbb{R}^2$ نشان می‌دهیم یعنی نقاط به‌صورت زوج مرتب (x, y) یک عمل جمع و یک عمل ضرب اسکالر تعریف شده است و آن را تبدیل به فضای برداری می‌کند. این فضای برداری برای انجام چهار عمل اصلی مناسب نیست. چون فاقد ضرب

و تقسیم است. با تعریف یک عمل ضرب روی آن و معرفی تقسیم آن را تبدیل به دستگاه اعداد مختلط می‌کنیم که انجام چهار عمل اصلی در آن مقدور می‌گردد. روی $\mathbb{R}^2$ مجموعه نقاط صفحه دو عمل جمع و ضرب به صورت زیر اعمال می‌کنیم و آن را مجموعه اعداد مختلط یا دستگاه اعداد مختلط می‌گوییم و با $\mathbb{C}$ نشان می‌دهیم. برای دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) در صفحه تعریف می‌کنیم.

الف) عمل جمع:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

توجه کنید این عمل جمع همان جمع بردارها در صفحه است.

ب) عمل ضرب:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

با توجه به این دو عمل مفاهیم و خواصی از اعداد مختلط را به صورت زیر داریم.

۱. دو عدد مختلط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) با هم برابرند اگر $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$.

۲. عدد مختلط $(0, 0)$ را عضو خنثی گوییم و با 0 نشان می‌دهیم چون

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y)$$

۳. عدد مختلط $(-x, -y)$ را قرینه عدد مختلط (x, y) گوییم و با $-(x, y)$ نشان می‌دهیم. چون

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$$

۴. عدد مختلط $(1, 0)$ را واحد می‌نامیم و با 1 نشان می‌دهیم چون

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (x, y)$$

۵. عدد مختلط $(\circ, ۱)$ را واحد موهومی می‌گوییم و با i نشان می‌دهیم.

۶. اگر عدد مختلط $(x, \circ)$ را با عدد حقیقی x یکسان بگیریم در این صورت

$$(x, y) = (x, \circ) + (\circ, ۱)(y, \circ) = x + iy$$

این نمایش نقاط صفحه را نمایش مختلط آن یا نمایش مختلط اعداد مختلط می‌گوییم.

نکته. توجه کنید $-۱ = -(\circ, ۱) = -(\circ, ۱)(\circ, ۱) = (-۱, \circ) = -(\circ, ۱)(\circ, ۱) = i^2$. به این دلیل است که i را ریشه دوم عدد -۱ حقیقی می‌دانند.

برای سادگی اعداد مختلط را معمولاً با z یا w نشان می‌دهیم.

۷. عدد حقیقی x را قسمت حقیقی و عدد حقیقی y را قسمت موهومی عدد مختلط $z = x + iy$ گویند و با $x = \Re z$ و $y = \Im z$ نشان می‌دهند.

۸. عدد مختلط w را معکوس عدد مختلط z می‌گوییم و با $\frac{1}{z}$ نشان می‌دهیم اگر $z \cdot w = ۱$. پس اگر $z = (x, y)$ و $w = (u, v)$ باشد در این صورت داریم:

$$(u, v)(x, y) = (ux - vy, uy + xv) = (۱, \circ)$$

پس باید $ux - vy = ۱$ و $uy + xv = ۰$. از حل این دو معادله برای u و v بر حسب x و y به دست می‌آوریم:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

نکته. عدد خنثی $(\circ, \circ)$ فاقد معکوس و سایر اعداد مختلط دارای معکوس هستند.

۹. عمل تفریق دو عدد مختلط $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ را به صورت زیر می‌گیریم.

$$z_1 - z_2 = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

۱۰. عمل تقسیم دو عدد مختلط $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ را برای $z_2 \neq 0$ به صورت زیر می گیریم.

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

۱۱. عدد مختلط $x - iy$ را مزدوج عدد مختلط $z = x + iy$ گویند و با $\bar{z}$ نشان می دهند.

تذکر. برای انجام محاسبات چهار عمل اصلی برای اعداد مختلط با نمایش مختلط یعنی $z = x + iy$ که از این به بعد فقط از این نمایش اعداد مختلط استفاده خواهیم کرد، بایستی عدد i را مانند یک پارامتر حقیقی منظور و محاسبات را مانند اعداد حقیقی انجام دهیم و i^2 را با -1 جایگزین کنیم. برای رفع i از مخرج کسر از عدد مزدوج استفاده می کنیم.

مثال ۱.۳. عدد مختلط زیر را به فرم $a + ib$ بنویسید.

$$\frac{(1+i)^2 - 2 - i}{(1-i)^3}$$

حل. ابتدا صورت و مخرج را ساده می کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{(1+i)^2 - 2 - i}{(1-i)^3} &= \frac{1 + 2i + i^2 - 2 - i}{1 - 3i + 3i^2 - i^3} = \frac{-2 + i}{-2 - 2i} = \frac{(2-i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} \\ &= \frac{4 - 2i - 4i + 2i^2}{4 + 4} = \frac{2 - 6i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i \end{aligned}$$

تذکر. (۱) نظر به این که اعداد مختلط به صورت $z = x = (x, 0)$ روی محور حقیقی قرار دارد از این نظر مجموعه اعداد حقیقی را زیر مجموعه اعداد مختلط می دانند.

(۲) رابطه ترتیب اعداد حقیقی که روی محور حقیقی صفحه اعداد مختلط قابل تصور است به مجموعه اعداد مختلط قابل تعمیم نیست. چون i را با 0 نمی توان مقایسه نمود. چون اگر بگیریم $i > 0$ در این صورت می بایستی داشته باشیم:

$$i \cdot i > 0 \implies i^2 = -1 > 0 \implies (-1) \cdot i > 0 \implies -i > 0$$

در صورتی که از دو عدد حقیقی غیر صفر اگر عددی بزرگتر از صفر باشد قرینه آن باید کمتر از صفر باشد. برای رفع این کمبود برای نمایش نامساوی ها و نامعادلات از قدر مطلق اعداد مختلط یا قسمت حقیقی و قسمت موهومی این اعداد و رابطه ترتیبی اعداد حقیقی استفاده خواهیم کرد.

۱.۲. خواص مزدوج:

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

۱.۳. قدر مطلق عدد مختلط z را که با $|z|$ نشان می دهیم عدد حقیقی $\sqrt{x^2 + y^2}$ است.

۱.۴. خواص قدر مطلق:

$$|\bar{z}| = |z|, \quad z\bar{z} = |z|^2$$

$$\Re z \leq |\Re z| \leq |z|, \quad \Im z \leq |\Im z| \leq |z|$$

$$|z| \leq |\Re z| + |\Im z|, \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

۱.۵. نمایش اعداد مختلط در مختصات قطبی: نمایش اعداد مختلط با استفاده از مختصات قطبی کارهای توانی اعداد مختلط را ساده می کند. در این مختصات داریم:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

پس

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

۱.۶. عدد θ را شناسه یا آوند عدد مختلط z گویند و با $\arg z$ نشان می دهند.

برای هر عدد مختلط بینهایت آوند موجود است. اگر $-\pi < \theta \leq \pi$ باشد آن را آوند اصلی گویند و با $\text{Arg } z$ نشان می دهند.

مثال ۲.۳. آوند اصلی عدد مختلط $z = 1 - i$ و سایر آوندهای آن را به دست آورید. همچنین این عدد را در مختصات قطبی نشان دهید.

حل. داریم $r^2 = 1^2 + (-1)^2$ پس $r = \sqrt{2}$ و $x = 1$ و $y = -1$. پس $\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ و $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. پس $\text{Arg } z = -\frac{\pi}{4}$ و مجموعه کلیه آوندها عبارتست از:

$$\left\{ \theta : \theta = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}.$$

پس در مختصات قطبی این عدد می شود:

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

یک نتیجه بسیار مهم نمایش اعداد مختلط در مختصات قطبی خاصیت زیر است که محاسبات توانی را ساده می سازد.

خاصیت ۱.۳ (فرمول دوموآور). به ازای هر عدد صحیح n تساوی زیر برقرار است.

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

علت. (با استقرا) برای $n = 1$ برقرار است. اگر برای $n \geq 1$ برقرار باشد در این صورت

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (\cos n\theta + i \sin n\theta)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (\cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta) + i(\cos n\theta \sin \theta + \sin n\theta \cos \theta) \\ &= \cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta. \end{aligned}$$

چون

$$\frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

پس برای n های منفی و صفر هم برقرار است.

مثال ۳.۳. مقدار $(1-i)^{۲۰۰}$ را بیابید.

حل. داریم $x = ۱$ و $y = -۱$ و $r = \sqrt{۲}$ و $\sin \theta = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ و $\cos \theta = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$. پس $\theta = -\frac{\pi}{۴}$ به این ترتیب

$$\begin{aligned}(1-i)^{۲۰۰} &= \left[\sqrt{۲} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{۴} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{۴} \right) \right) \right]^{۲۰۰} \\ &= ۲^{۱۰۰} \left(\cos(-۵۰\pi) + i \sin(-۵۰\pi) \right) = ۲^{۱۰۰} \cdot ۱ = ۲^{۱۰۰}\end{aligned}$$

نمای موهومی: عدد مختلط $\cos \theta + i \sin \theta$ را نمای موهومی گوئیم و با $e^{i\theta}$ نشان می‌دهیم. یعنی

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

تذکره. نمای موهومی $e^{i\theta}$ کلیه خواص جبری e^x را دارد. به این دلیل نام نمایی را برای آن انتخاب کردیم. یعنی داریم:

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

یک استفاده خوب از نمایش قطبی اعداد مختلط محاسبه ریشه n ام اعداد مختلط است.

ریشه n ام: عدد مختلط w را ریشه n ام عدد مختلط z گوئیم اگر $w^n = z$ و می‌نویسیم $w = \sqrt[n]{z}$.

خاصیت ۲.۳. هر عدد مختلط غیر صفر مانند z دارای n ریشه متمایز n ام است. اگر $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ باشد آن گاه این n ریشه عبارتند از

$$w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

علت. ریشه n ام z یعنی $w = \rho e^{i\phi}$ را باید طوری در نظر بگیرید که داشته باشیم:

$$w^n = \rho^n e^{in\phi} = \rho^n (\cos n\phi + i \sin n\phi) = z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

پس باید

$$\rho^n = r, \quad \cos n\phi = \cos \theta, \quad \sin n\phi = \sin \theta.$$

به این ترتیب

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad n\phi = 2k\pi + \theta, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

در نتیجه

$$w = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{2k\pi + \theta}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi + \theta}{n} \right) \right]$$

که برای $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ مقدار متمایز به دست می آید و برای سایر مقادیر k این مقادیر تکرار می شود.

مثال ۴.۳. ریشه های چهارم عدد -۱ را بیابید.

حل. داریم $-۱ = \cos \pi + i \sin \pi$. پس $r = ۱$ و $\theta = \pi$. در نتیجه

$$w_k = \cos \left(\frac{2k\pi + \pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi + \pi}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

پس

$$\begin{aligned} w_0 &= \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ w_1 &= \cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ w_2 &= \cos \left(\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ w_3 &= \cos \left(\frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

تذکره. می‌دانیم مقصود از ریشه n ام یک عدد حقیقی و مثبت فقط ریشه n ام مثبت آن است. لیکن مقصود از ریشه n ام یک عدد مختلط هر یک از ریشه‌های n ام آن ممکن است باشد.

تمرین ۱.۳

۱. قسمت حقیق و موهومی و قدر مطلق و مزدوج هر یک از اعداد زیر را بیابید.

$$\begin{array}{lll} \text{آ)} \frac{5+3i}{1+5i} & \text{ب)} \frac{1}{5z+1-i} & \text{ج)} \frac{2+i}{3+2i} \\ \text{د)} (1+i\sqrt{3})^8 & \text{و)} \frac{(1-i)^3}{3+i} & \text{ه)} (1+i)^n + (1-i)^n \end{array}$$

۲. اعداد مختلط زیر را به صورت $a + ib$ بنویسید.

$$\text{آ)} (5+2i)(2-3i) \quad \text{ب)} \frac{2-3i}{4-i} \quad \text{ج)} (6+8i)^3$$

۳. هر یک از اعداد زیر را در مختصات قطبی بنویسید.

$$\text{آ)} 3+3i \quad \text{ب)} \frac{1}{4+3i} \quad \text{ج)} \frac{(1+i)^6}{(\sqrt{3}-i)^4}$$

۴. معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{آ)} (x,y)^2 - (x,y) + (1,0) = 0 \quad \text{ب)} z^2 - 4iz + 5 = 0$$

۵. دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{ll} x^2 - y^2 = 1 & \text{(آ)} \\ xy = 2 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} x^3 - 3xy^2 = 1 & \text{(ب)} \\ 3x^2y - y^3 = \sqrt{3} & \end{array}$$

۶. مقادیر زیر را ساده کنید.

$$\begin{array}{lll} (1 + i\sqrt{3})^{10} & \text{(ج)} & \sin^4 \theta + \cos^4 \theta \\ \sqrt{1 - \sqrt{i}} & \text{(ه)} & \end{array} \quad \begin{array}{ll} \sqrt[4]{1+i} & \text{(د)} \\ \sqrt[4]{-i} & \text{(و)} \end{array} \quad (1-i)^{50}$$

۷. مجموعه نقاط زیر را بر حسب x و y بنویسید و در صفحه مشخص کنید.

$$\begin{array}{lll} |z-1| < 1 & \text{(آ)} & \operatorname{Arg} \frac{z-i}{z+i} = 5 \\ \Im \frac{1}{z} < 1 & \text{(ه)} & \end{array} \quad \begin{array}{ll} \Re z^2 > 1 & \text{(د)} \\ \Im z^2 + \Re \frac{z+1}{z-1} < 0 & \text{(و)} \end{array} \quad |z+i| + |z-i| = 1 \quad \text{(ب)}$$

۲.۳ توابع تحلیلی

در این بخش بعد از معرفی تابع مختلط به بیان حد، پیوستگی و مشتق توابع مختلط و سرانجام به تابع تحلیلی می‌پردازیم. خواهیم دید عمده مطالب این بخش مشابه توابع حقیقی است.

تابع مختلط: هر تابع با دامنه و برد اعداد مختلط را یک تابع مختلط گویند.

مثال ۵.۳. هر یک از توابع زیر یک تابع مختلط است.

$$\begin{array}{ll} f(z) = z^3 - iz^2 + z + 2 - i & \text{(آ)} \\ g(z) = e^x \cos 3y + ie^{2x} \sin y & \text{(ب)} \end{array}$$

تذکره. اگر تابع $f(z)$ بر حسب z داده شده باشد آن را بر حسب x و y می‌توان نوشت، یعنی $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. بر عکس هر تابع مختلط که به این صورت داده شده باشد را بر حسب z می‌توان نوشت. در این حالت اول z را با $x + iy$ جایگزین کنید و در حالت دوم x و y را به ترتیب با $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ و $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ جایگزین کنید.

مثال ۶.۳. تابع $f(z) = z^3$ را بر حسب x و y بنویسید و ساده کنید.

$$f(z) = z^3 = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$$

مثال ۷.۳. تابع $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$ را بر حسب z بنویسید.

$$\begin{aligned} f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi &= \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 + 2\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)i \\ &= \frac{z^2}{4} + z\bar{z} + \frac{\bar{z}^2}{4} + \frac{z^2}{4} - z\bar{z} + \frac{\bar{z}^2}{4} + \frac{z^2}{2} - \frac{\bar{z}^2}{2} = z^2. \end{aligned}$$

تذکره. معمولاً نیاز است تا تابع بر حسب z را بر حسب x و y بنویسیم.

چندجمله‌ای: تابع $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ را که در آن n عدد طبیعی و $a_n \neq 0$ و a_1 تا a_n اعداد مختلط اند را یک چندجمله‌ای مختلط از درجه n گویند.

تابع کسری: اگر $p(z)$ و $q(z)$ دو چندجمله باشد تابع $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ را یک تابع کسری یا یک تابع منطق گویند.

حال به بیان مفهوم حد و پیوستگی و در انتهای این بخش به بیان مشتق تابع تحلیلی می‌پردازیم.

فرض کنید $f(z)$ تابعی مختلط باشد که روی دیسک $|z - z_0| < R$ مگر در نقطه z_0 تعریف شده باشد.

حد تابع: می‌گوییم حد این تابع در z_0 برابر w_0 است و می‌نویسیم $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ اگر حد تابع دو متغیر حقیقی $|f(z) - w_0|$ در نقطه $z_0 = (x_0, y_0)$ برابر با صفر باشد.

تذکره. اگر $z = x + iy$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ و $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ و $w_0 = u_0 + iv_0$ باشد در این صورت $|z - z_0| < R$ معادل با

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$$

۹

$$|f(z) - w_0|^2 = (u(x, y) - u_0)^2 + (v(x, y) - v_0)^2.$$

پس $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ اگر و فقط اگر

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left[(u(x, y) - u_0)^2 + (v(x, y) - v_0)^2 \right] = 0.$$

خاصیت ۳.۳. با توجه به نمادهای فوق $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ اگر و فقط اگر

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0 \text{ و } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0.$$

علت. (اگر) از نامساوی زیر نتیجه می شود که به دلیل نامساوی مثلث برقرار است.

$$|f(z) - w_0| \leq |u(x, y) - u_0| + |v(x, y) - v_0|$$

حال اگر $z \rightarrow z_0$ در این صورت $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ و در نتیجه طرف دوم نامساوی به صفر میل می کند. پس $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - w_0| = 0$.

(فقط اگر) از نامساوی های زیر نتیجه می شود.

$$|u(x, y) - u_0| \leq |f(z) - w_0|, \quad |v(x, y) - v_0| \leq |f(z) - w_0|.$$

حال اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - w_0| = 0$ در این صورت $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$ و $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$.

تذکر. با توجه به مطالب فوق کلیه قواعد و فرمول های حد برای توابع حقیقی برای تابع مختلط هم برقرار است.

مثلاً اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ و $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w'_0 \neq 0$ باشد آن گاه

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_0}{w'_0}.$$

پیوستگی تابع: می گوییم تابع $f(z)$ در نقطه z_0 پیوسته است اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. همچنین می گوییم $f(z)$ پیوسته است اگر در تمام نقاط دامنه اش پیوسته باشد.

تذکره. با توجه به خاصیت فوق کلیه قواعد و خواص پیوستگی توابع حقیقی برای توابع مختلط هم برقرار است. توجه کنید $u(x, y)$ و $v(x, y)$ توابع حقیقی اند که معمولاً از توابع مقدماتی حقیقی تشکیل می‌شوند. پس تشخیص پیوستگی آنها بسیار آسان است.

مثلاً ترکیب دو تابع پیوسته یا حاصلضرب آنها یا حاصل تقسیم آنها پیوسته است. یا از خواص مشابه آنها می‌توان برای پیوستگی استفاده کرد.

حال به بیان مفهوم مشتق و خواص آن می‌پردازیم. تا به حال توابع مورد بحث از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^2$ بود. یعنی $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$. به این دلیل توانستیم کلیه مطالب مربوط به حد و پیوستگی را به توابع دو متغیره ربط دهیم و از خواص آنها استفاده کنیم. با وارد شدن به مباحث مشتق این کار دیگر امکان‌پذیر نیست و می‌بایستی ابزارهای جدیدی را بسازیم.

فرض کنید z_0 در دامنه f قرار دارد و برای $r > 0$ کوچک r $|z - z_0| < r$ در دامنه f قرار دارد. مشتق f را در z_0 که با $f'(z_0)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

اگر این حد موجود نباشد می‌گوییم f در z_0 فاقد مشتق است. می‌گوییم f مشتق‌پذیر است اگر در تمام نقاط دامنه‌اش دارای مشتق باشد.

مثال ۸.۳. مشتق تابع $f(z) = z^2$ را بیابید.

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = 2z_0$$

مثال ۹.۳. تابع $f(z) = \bar{z}$ در همه جا پیوسته و در هیچ جا مشتق ندارد زیرا مشتق در صورت وجود با حد زیر داده می‌شود.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{(x - x_0) - i(y - y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

حال اگر بگیریم $y = y_0$ و $x \rightarrow x_0$ مقدار حد برابر ۱ می‌شود. بار دیگر اگر بگیریم $x = x_0$ و $y \rightarrow y_0$ مقدار حد برابر -۱ به دست می‌آید که متفاوت است.

تذکر. مشتق مرتبه بالاتر مشابه تابع یک متغیر حقیقی است.

تذکر. کلیه قواعد، فرمول‌ها و خواص مشتق تابع حقیقی $y = f(x)$ برای تابع مختلط مشتق‌پذیر $w = f(z)$ به همان صورت برقرار است. مثلاً قاعده زنجیره‌ای مشتق یا مشتق حاصلضرب یا مشتق حاصل تقسیم و حتی قواعد هوپیتال در حدگیری به همان صورت برقرار است. علت کاملاً مشابه حقیقی است فقط کافیست x به z و y به w تبدیل گردد.

مثال ۱۰.۳. مشتق تابع $f(z) = (1 + z + iz^2)^5$ می‌شود:

$$f'(z) = 5(1 + iz)(1 + z + iz^2)^4.$$

همچنین

$$\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^3 - 8}{z^2 - 5z + 6} \stackrel{H}{=} \lim_{z \rightarrow 2} \frac{3z^2}{2z - 5} = \frac{12}{4 - 5} = -12.$$

حال سوال این است که مشتق توابع به صورت $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ چگونه به دست آوریم. به عنوان مثال برای $f(z) = e^{ix}(\cos 2y + i \sin 2y)$ ، $f'(z)$ چگونه قابل حصول است. اگرچه آن را می‌توان به صورت

$$f(z) = e^{z+\bar{z}}(\cos i(\bar{z} - z) + i \sin i(\bar{z} - z))$$

نوشت. لیکن هنوز توابع کسینوس و سینوس یا نمایی برای اعداد مختلط برای ما دارای معنی نمی‌باشد. از این جا به بعد مطالب نو می‌آید که با ریاضیات قبلی چندان تطابق ندارد. آن را در ادامه این بخش داریم.

فرض کنید تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ دارای مشتق $f'(z_0)$ باشد. در این صورت حدهای زیر موجود است.

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta x + i\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &\quad + i \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} \end{aligned}$$

حال بگیریم $\Delta y = 0$ و $\Delta x \rightarrow 0$ در این صورت چون این حدها موجوداند:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &\quad + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

بار دیگر بگیریم $\Delta x = 0$ و $\Delta y \rightarrow 0$ در این صورت

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i \Delta y} \\ &\quad + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i \Delta y} \\ &= -i u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

چون حد یگانه است، پس خاصیت زیر برقرار است.

خاصیت ۴.۳ (شرط لازم کشی-ریمان). فرض کنید تابع

$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ در نقطه $z_0 = x_0 + i y_0$ مشتق پذیر است. در این صورت

کلیه مشتقات پاره‌ای مرتبه اول u و v نسبت به x و y در نقطه (x_0, y_0) موجود است و

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

به علاوه

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0).$$

تذکره. دو تساوی فوق به روابط کشی-ریمان یا معادلات کشی-ریمان و یا شرایط

کشی-ریمان شهرت دارند.

نکته. اگر در نقطه‌ای روابط کشی-ریمان برقرار نباشد در آن نقطه مشتق موجود

نیست.

مثال ۱۱.۳. تابع $f(z) = x^2 - 2y^2 + 3ixy$ در نقاطی که $2x \neq 3x$ یا $4y \neq -3x$ باشد، مشتق ندارد. پس این تابع در نقاط $z \neq 0$ مشتق ندارد.

ما به دنبال محکی برای مشتق پذیری تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ هستیم. این محک را در خاصیت زیر داریم.

خاصیت ۵.۳ (شرط کافی کشی-ریمان). فرض کنید تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ روی دیسک $|z - z_0| < r$ برای $r > 0$ ای تعریف شده و در این دیسک مشتقات نسبی u_x, u_y, v_x, v_y موجود و پیوسته باشند. به علاوه در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ در روابط کشی-ریمان صدق کند. آن گاه $f'(z_0)$ موجود و از فرمول $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$ قابل حصول است.

علت. با استفاده از بسط مرتبه اول تیلر توابع u و v و قرار دادن آنها در فرمول مشتق قابل دیدن است.

مثال ۱۲.۳. تعیین کنید تابع $f(x) = e^{3x} \cos 2y + ie^{2x} \sin 3y$ در کدام نقاط مشتق پذیر است. مشتق آن را نیز به دست آورید.

حل. داریم:

$$u(x, y) = e^{3x} \cos 2y, \quad v(x, y) = e^{2x} \sin 3y$$

در نتیجه روابط کشی-ریمان می شود:

$$\begin{cases} 3e^{3x} \cos 2y = 3e^{2x} \cos 3y \\ -2e^{3x} \sin 2y = -2e^{2x} \sin 3y \end{cases}$$

پس در نقاطی که دو تساوی زیر برقرار باشد مشتق داریم.

$$\tan 2y = \tan 3y, \quad e^x \cos 2y = \cos 3y$$

چون تابع تانژانت صعودی است پس تساوی سمت چپ فقط برای $x = 0$ و $y = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ برقرار است. لیکن تساوی دوم فقط برای k زوج و $x = 0$ می‌تواند برقرار باشد. پس نقاط مشتق‌پذیری عبارتند از $z = 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ و مشتق در این نقاط می‌شود:

$$f'(z) = (u_x + iv_x) \Big|_{z=2k\pi i} = (2e^{2x} \cos 2y + 2ie^{2x} \sin 2y) \Big|_{z=2k\pi i} = 2$$

مثال ۱۳.۳. نشان دهید $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ در تمام نقاط مشتق‌پذیر است و مشتق آن را نیز به دست آورید.

حل. داریم $u(x, y) = \sin x \cosh y$ و $v(x, y) = \cos x \sinh y$. پس روابط کشی-ریمان می‌شود:

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = \cos x \cosh y \\ \sin x \sinh y = \sin x \sinh y. \end{cases}$$

پس روابط کشی-ریمان در تمام نقاط $\mathbb{C}$ برقرار است. پس این تابع همه جا مشتق‌پذیر است. همچنین

$$f'(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

بعضی مواقع یک تابع مختلط در مختصات قطبی داده می‌شود. برای تشخیص مشتق‌پذیری تابع و محاسبه آن در این مختصات نیاز به روابط کشی-ریمان در مختصات قطبی است که در خاصیت زیر می‌آید.

خاصیت ۶.۳. فرض کنید تابع مختلط $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ روی دیسک $|z - z_0| < \rho$ برای $\rho > 0$ تعریف شده باشد و $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$ و $z = re^{i\theta}$

(۱) اگر f در نقطه z_0 مشتق پذیر باشد آن گاه روابط کشی-ریمان زیر برقرار است:

$$\begin{cases} r_0 u_r(r_0, \theta_0) = v_\theta(r_0, \theta_0) \\ r_0 v_r(r_0, \theta_0) = -u_\theta(r_0, \theta_0) \end{cases} \quad (\text{روابط کشی-ریمان در مختصات قطبی})$$

$$\text{همچنین } f'(z_0) = e^{-i\theta_0} (u_r(r_0, \theta_0) + i v_r(r_0, \theta_0))$$

(۲) اگر مشتقات مرتبه اول u و v نسبت به r و θ در دیسک فوق موجود و پیوسته باشند و در نقطه z_0 در دو تساوی فوق صدق کنند، آن گاه $f'(z_0)$ موجود و از فرمول مشتق فوق قابل محاسبه است.

علت. u_x, u_y, v_x, v_y را بر حسب $u_r, u_\theta, v_r, v_\theta$ محاسبه و در روابط کشی-ریمان قرار دهید و برای $u_\theta(r_0, \theta_0)$ و $v_\theta(r_0, \theta_0)$ حل کنید به دو تساوی فوق می رسید. فرمول مشتق نیز از قرار دادن u_x, v_x بر حسب $u_r, u_\theta, v_r, v_\theta$ بعد از ساده نمودن به صورت فوق حاصل می گردد.

مثال ۱۴.۳. نشان دهید تابع $f(z) = r^{1/4} e^{i\theta/4}$, $r > 0, -\pi < \theta < \pi$ مشتق پذیر است. مشتق آن را نیز محاسبه کنید.

حل. داریم $f(z) = r^{1/4} \cos \frac{\theta}{4} + i r^{1/4} \sin \frac{\theta}{4}$ ، پس

$$u(r, \theta) = r^{1/4} \cos \frac{\theta}{4}, \quad v(r, \theta) = r^{1/4} \sin \frac{\theta}{4}.$$

روابط کشی-ریمان فوق به صورت زیر برقرار است.

$$\begin{cases} r \cdot \frac{1}{4} r^{-3/4} \cos \frac{\theta}{4} = \frac{1}{4} r^{1/4} \cos \frac{\theta}{4}, \\ r \cdot \frac{1}{4} r^{-3/4} \sin \frac{\theta}{4} = \frac{1}{4} r^{1/4} \sin \frac{\theta}{4}. \end{cases}$$

پس این تابع در تمام نقاط دامنه اش مشتق پذیر است و

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-i\theta} \left(\frac{1}{4} r^{-3/4} \cos \frac{\theta}{4} + \frac{1}{4} r^{-3/4} \sin \frac{\theta}{4} \right) \\ &= e^{-i\theta} \frac{1}{4} r^{-3/4} e^{i\theta/4} = \frac{1}{4} r^{-3/4} e^{-3i\theta/4}. \end{aligned}$$

تذکره. توجه کنید در مثال فوق $f(z) = \sqrt[4]{z}$ و $f'(z) = \frac{1}{4\sqrt[4]{z^3}}$ می‌باشد.

تعریف ۱.۳. مجموعه نقاط D از صفحه را باز گوئیم اگر $z_0 \in D$ باشد آن‌گاه $\circ > R$ ای موجود باشد به طوری که تمام نقاط همانند z با $R < |z - z_0|$ نیز در D باشد.

تابع تحلیلی: می‌گوئیم تابع $f(z)$ تابعی تحلیلی است اگر دامنه $f(z)$ یک مجموعه باز از نقاط صفحه باشد و $f(z)$ در هر نقطه از دامنه‌اش مشتق پذیر باشد.

تذکره (۱) کلیه توابع در این کتاب دارای دامنه باز هستند.

(۲) کلیه خواصی که برای مشتق موجود است برای تابع تحلیلی نیز برقرار است.

(۳) در فصل ۴ خواهیم دید که هر تابع تحلیلی نه تنها بی‌نهایت بار مشتق پذیر است بلکه دارای بسط تیلر نیز می‌باشد. در نتیجه قسمت حقیقی و موهومی هر تابع تحلیلی، مشتقات پاره‌ای از هر مرتبه‌ای نسبت به x و y دارند.

تابع تام: تابع تحلیلی با دامنه $\mathbb{C}$ را تابع تام گویند.

مثال ۱۵.۳. هر تابع چند جمله‌ای تام است. لیکن تابع منطبق تام نیست.
 $p(z) = z^5 - iz^2 + 2$ تام، لیکن $f(z) = \frac{z^2 + iz - 1}{z^2 + 1}$ تام نیست.

مطالب نهائی در این بخش ارتباط بین تابع همساز و تابع تحلیلی است. این ارتباط حل مسائل بعضی از معادلات پاره‌ای را با استفاده از توابع تحلیلی مقدور می‌سازد. در ابتدا تعریف تابع همساز را داریم.

تعریف ۲.۳. تابع حقیقی $h(x, y)$ با دامنه باز D را همساز یا هارمونیک گوئیم اگر

(۱) کلیه مشتقات مرتبه دوم آن موجود و پیوسته باشد.

(۲) روی D تساوی $h_{xx} + h_{yy} = 0$ برقرار باشد. یعنی h یک جواب معادله لاپلاس باشد.

در خاصیت زیر فرض بر این است که u و v دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته‌اند.

خاصیت ۷.۳.۱ قسمت حقیقی و قسمت موهومی هر تابع تحلیلی یک تابع همساز است.

(۲) ترکیب یک تابع همساز و یک تابع تحلیلی یک تابع همساز است.

علت. (۱) فرض کنید $f = u + iv$ تحلیلی باشد. روابط کشی-ریمان را به صورت زیر داریم:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

از طرفین معادله سمت چپ نسبت به x و از طرفین معادله سمت راست نسبت به y مشتق بگیرید و با هم جمع کنید تا به دست آورید $u_{xx} + u_{yy} = 0$. مشابهاً به دست می آید $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

(۲) فرض کنید $h(u, v)$ همساز و $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تابع تحلیلی است. نشان می دهیم $H(x, y) = h(u(x, y), v(x, y))$ همساز است. برای این کار H_{xx} و H_{yy} را محاسبه و با هم جمع می کنیم.

$$H_x = h_u u_x + h_v v_x$$

$$H_{xx} = h_{uu} u_x^2 + h_{uv} u_x v_x + h_{vu} u_x v_x + h_{vv} v_x^2 + h_u u_{xx} + h_v v_{xx}$$

پس

$$H_{xx} = h_{uu} u_x^2 + 2h_{uv} u_x v_x + h_{vv} v_x^2 + h_u u_{xx} + h_v v_{xx}.$$

مشابهاً

$$H_{yy} = h_{uu} u_y^2 + 2h_{uv} u_y v_y + h_{vv} v_y^2 + h_u u_{yy} + h_v v_{yy}.$$

با جمع کردن این دو تساوی و استفاده از روابط کشی-ریمان $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} H_{xx} + H_{yy} &= h_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + h_{vv}(v_y^2 + v_x^2) \\ &\quad + h_u(u_{xx} + u_{yy}) + h_v(v_{xx} + v_{yy}). \end{aligned}$$

چون $u + iv$ تحلیلی است پس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ و $v_{xx} + v_{yy} = 0$ پس

$$\begin{aligned} H_{xx} + H_{yy} &= h_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + h_{vv}(u_y^2 + u_x^2) \\ &= (u_x^2 + u_y^2)(h_{uu} + h_{vv}) = 0. \end{aligned}$$

از هر تابع همساز می‌توان یک تابع تحلیلی ساخت. مفاهیم زیر در این ارتباط است.

مزدوج همساز: فرض کنید u تابعی همساز است. تابع v را مزدوج همساز u گوئیم اگر $f = u + iv$ تحلیلی باشد.

می‌توان نشان داد هر تابع همساز دارای مزدوج همساز است لیکن محاسبه آن با استفاده از روابط کشی-ریمان مقدور است.

مثال ۱۶.۳. مزدوج همساز تابع همساز $u(x, y) = \cos x \cosh y + x^2 - y^2 + x$ را به دست آورید.

حل. اگر v مزدوج هارمونیک باشد در این صورت $f = u + iv$ تحلیلی است. پس $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ پس داریم:

$$v_x = -\cos x \sinh y + 2y$$

$$v_y = -\sin x \cosh y + 2x + 1$$

حال از طرفین تساوی اولی نسبت به x انتگرال بگیریم.

$$v(x, y) = -\sin x \sinh y + 2xy + h(y)$$

آن را در تساوی دوم قرار دهید تا h به دست آید.

$$v_y = -\sin x \cosh y + 2x + h'(y) = -\sin x \cosh y + 2x + 1$$

پس $h'(y) = 1$ یا $h(y) = y + a$. به این ترتیب به دست می‌آوریم:

$$v(x, y) = -\sin x \sinh y + 2xy + y + a,$$

که در آن a یک ثابت حقیقی است.

تمرین ۲.۳

۱. دامنه تحلیلی ماگزیمال هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} \text{آ)} f(z) = \frac{z^2-9}{z^2-3z-2} & \text{ب)} f(z) = (z + \frac{1}{z})^3 \\ \text{ج)} f(z) = \frac{z^2+i}{z^2-2} & \text{د)} f(z) = \frac{z^5+iz}{z^3+1} \end{array}$$

۲. مشتق تابع تحلیلی زیر را به دست آورید.

$$f(z) = x^2 - 3xy^2 + \frac{x}{x^2 + y^2} + iv(x, y)$$

۳. تعیین کنید تابع $f(z) = \sin 2x \cosh 3y + i \cos 3x \sinh 2y$ در کدام نقاط مشتق پذیر است. مشتق آن را نیز بیابید.

۴. تابع f را با دامنه $\mathbb{C}$ طوری به دست آورید تا روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ مشتق پذیر و در سایر نقاط مشتق پذیر نباشد.

۵. تابع f را با دامنه $\mathbb{C}$ طوری بیابید تا روی نیم دایره $y = \sqrt{4-x^2}$ مشتق پذیر و در سایر نقاط مشتق پذیر نباشد.

۶. نشان دهید $f(z) = r^{1/n} e^{i\theta/n}$, $r > 0$, $0 < \theta < \pi$ مشتق آن را نیز به دست آورید.

۷. آیا تابع زیر همساز است. مزدوج همساز آن را نیز بیابید.

$$u(x, y) = \sinh x \cos y + 3x^2y - y^3 - 2$$

۸. نشان دهید تابع زیر همساز است. مزدوج همساز آن را نیز به دست آورید.

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + e^{2x} \cos 2y + 2xy - y$$

۹. a و b را طوری تعیین کنید تا تابع زیر همساز باشد. مزدوج همساز آن را نیز به دست آورید.

$$u(x, y) = e^{ax} \cos by$$

۱۰. نشان دهید تابع زیر همساز است. مزدوج همساز آن را نیز به دست آورید.

$$u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \sin 2xy$$

۳.۳ توابع مقدماتی

در این بخش به معرفی توابع مقدماتی مختلط می‌پردازیم. همانند توابع مقدماتی حقیقی از این توابع برای بیان مفاهیم توابع مختلط و کاربرد آنها استفاده می‌گردد. توابع مقدماتی حقیقی اساسی عبارتند از چندجمله‌ای، تابع نمایی، سینوس و کسینوس. سایر توابع مقدماتی با چهار عمل اصلی یا به صورت تابع معکوس آنها بیان می‌گردد. سایر توابع به صورت ترکیبی از توابع مقدماتی اند. این توابع به صورت طبیعی ظاهر می‌شوند و در اصل جواب‌های معادلات دیفرانسیل هستند که پدیده‌های فیزیکی را بیان می‌کنند.

تابع چندجمله‌ای را قبلاً تعریف کردیم. سه تابع اساسی دیگر یعنی تابع نمایی، سینوس و کسینوس می‌بایستی طوری تعریف شوند تا دو خصلت اساسی زیر را داشته باشند. یکی این که تعمیمی از تابع‌های حقیقی هم‌نام خودشان باشند و دیگر این که تام باشند یعنی با دامنه $\mathbb{C}$ و تحلیلی باشند.

خواهیم دید با تعریف تابع نمائی دو تابع دیگر نیز قابل بیان می‌شوند.

الف) تابع نمائی: با توجه به این که تابع نمائی حقیقی، $y = e^x$ ، جواب یگانه مسئله با

شرط اولیه

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

است. برای این که تابع نمائی مختلط که با، $w = e^z$ ، نشان می‌دهیم دو خاصیت ذکر شده فوق را داشته باشد آن را در جواب مسئله با شرط اولیه مختلط زیر جستجو می‌کنیم.

$$\begin{cases} \frac{dw}{dz} = w \\ w(x) = e^x \end{cases}$$

که در آن مانند قبل $z = x + iy$ و $w = u + iv$ است. این مسئله بر حسب u و v و x و y به صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{cases} u_x + iv_x = u + iv \\ u(x, 0) = e^x, \quad v(x, 0) = 0 \end{cases}$$

به این ترتیب به چهار معادله زیر برای تعیین u و v می‌رسیم که دو معادله آن همان روابط کشی-ریمان هستند که برای تحلیلی بودن w می‌بایستی برقرار باشند.

$$u_x = u, \quad v_x = v, \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

از حل دو معادله سمت چپ جواب عمومی آنها را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$u(x, y) = C_1(y)e^x, \quad v(x, y) = C_2(y)e^x$$

برای برقراری دو معادله دیگر این جواب‌ها را در آن دو معادله قرار می‌دهیم. در نتیجه

$$C_1'(y) = -C_2(y), \quad C_1(y) = C_2'(y).$$

به این ترتیب برای $C_2(y)$ به دست می‌آوریم $C_2''(y) + C_2(y) = 0$ یا $C_2(y) = A \cos y + B \sin y$. همچنین $C_1(y) = B \cos y - A \sin y$. از طرف

دیگر از شرایط اولیه $u(x, 0) = e^x$ و $v(x, 0) = 0$ به دست می‌آوریم $C_1(0) = 1$ و $C_2(0) = 0$. با اعمال این شرایط روی دو جواب عمومی فوق

$$C_2(0) = A = 0, \quad C_1(0) = B = 1.$$

پس $w = e^x \cos y + ie^x \sin y$ و $C_2(y) = \sin y$ و $C_1(y) = \cos y$

تابع نمائی مختلط: تابع $e^x \cos y + ie^x \sin y$ را تابع نمائی مختلط گوییم و با e^z نشان می‌دهیم. پس

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

از این پس برای بیان این تابع مختصراً می‌گوییم تابع نمائی. خواص تابع نمائی را در زیر داریم.

$$(۱) \quad \frac{d}{dz} e^z = e^z \text{ و این تابع تام است}$$

$$(۲) \quad \text{داریم: } |e^z| = e^x \text{ و } \arg e^z = y.$$

(۳) تعریف تابع نمای موهومی یعنی $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ با این تعریف تطبیق دارد چون $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.

(۴) تابع نمائی خواص جبری تابع نمای حقیقی را دارد. یعنی:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

چون

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1+iy_1} \cdot e^{x_2+iy_2} = e^{x_1} \cdot e^{iy_1} \cdot e^{x_2} \cdot e^{iy_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdot e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} \\ &= e^{x_1+x_2} \cdot e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

و

$$e^{-z} = e^{-x-iy} = e^{-x} \cdot e^{-iy} = \frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{e^{iy}} = \frac{1}{e^x \cdot e^{iy}} = \frac{1}{e^{x+iy}} = \frac{1}{e^z}.$$

که در این جا از خواص $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$ تابع نمائی حقیقی و $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}$ که بعد از فرمول دوماور نشان داده شده بود استفاده گردیده است.

(۵) این تابع نمائی تناوبی با دوره تناوب $2\pi i$ است. چون

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x (\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) = e^z. \end{aligned}$$

(ب) **توابع مثلثاتی:** از فرمول های $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ و $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ به دست می آوریم:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

برای این که توابع سینوسی و کسینوسی مختلط با توابع سینوس و کسینوس حقیقی سازگاری داشته باشد و تام نیز باشد آنها را با استفاده از فرمول های فوق به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

تذکره (۱) سایر توابع مثلثاتی مشابه حقیقی تعریف می شوند.

(۲) کلیه فرمول های توابع مثلثاتی حقیقی برای توابع مثلثاتی مختلط برقرار است.

(۳) کلیه اتحادهای مثلثاتی حقیقی برای مختلط هم برقرار است.

(۴) با این که $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ لیکن $\sin z$ و $\cos z$ هر مقدار مختلط یا حقیقی را به خود می گیرند. مثلاً معادله $\sin z = 5^\circ$ دارای جواب است.

(۵) فرمول‌های زیر در محاسبات مفیداند.

$$\cos iy = \cosh y$$

$$\sin iy = i \sinh y$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

مثال ۱۷.۳. معادله $\sin z = 5^\circ$ را حل کنید.

حل. برای این کار دستگاه دو معادله زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \sin x \cosh y = 5^\circ \\ \cos x \sinh y = 0 \end{cases}$$

از معادله دوم به دست می‌آوریم $\cos x = 0$ یا $\sinh y = 0$. $\sinh y = 0$ دارای جواب $y = 0$ است که با جاگذاری در معادله اول به $\sin x = 5^\circ$ می‌رسیم که جواب ندارد. پس $\cos x = 0$ یا $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$. برای این x از معادله اول به دست می‌آوریم، $\cosh y = 5^\circ (-1)^k$ که فقط علامت مثبت قابل قبول است. پس:

$$z = (2k\pi + \frac{\pi}{2}) + i \cosh^{-1} 5^\circ.$$

ج) توابع هذلولوی: برای تطبیق توابع هذلولوی مختلط و تام بودن آنها با توجه به

فرمول‌های حقیقی

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

سینوس و کسینوس هذلولوی را به صورت زیر می‌گیریم.

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

تذکره ۱) سایر توابع هذلولوی مشابه توابع هذلولوی حقیقی تعریف می‌شوند.

۲) کلیه فرمول‌های توابع هذلولوی حقیقی برای توابع هذلولوی مختلط برقرار است.

۳) کلیه اتحادهای توابع هذلولوی حقیقی برای توابع هذلولوی مختلط هم برقرار است.

۴) فرمول‌های زیر در محاسبات مفیداند.

$$\cosh z = \cos iz, \quad \sinh iz = i \sin z$$

$$\cos z = \cosh iz, \quad \sin z = -i \sinh iz.$$

د) تابع لگاریتم: این تابع می‌بایستی طوری تعریف شود تا دارای سه خاصیت زیر باشد.

۱. معکوس تابع نمائی باشد.

۲. تعمیم لگاریتم نیپری حقیقی یعنی $\ln x$ از $\mathbb{R}^{>0}$ به $\mathbb{C}$ باشد.

۳. تابعی تحلیلی باشد.

با توجه به این نکات برای $z = re^{i\theta}$ ، لگاریتم آن را به صورت زیر می‌گیریم.

$$\log z = \ln r + i\theta.$$

چون برای هر عدد مختلط z بینهایت مقدار برای θ است پس برای هر z بینهایت مقدار برای $\log z$ به دست می‌آید.

مثال ۱۸.۳. برای $z = 1 + i$ داریم:

$$\log(1 + i) = \frac{1}{2} \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

برای این که تابع داشته باشیم می‌بایستی محدودیتی روی θ قرار دهیم تا برای هر z فقط یک θ داشته باشیم و $\log z$ تک مقداری شود.

شاخه α ام لگاریتم: برای هر عدد حقیقی α تابع زیر را شاخه α ام لگاریتم گویند.

$$\log_{\alpha} z = \ln r + i\theta \quad \alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi.$$

برای این که این تابع پیوسته باشد می بایستی شعاع $\theta = \alpha$ را از دامنه آن حذف کنیم. به این ترتیب

$$\log_{\alpha} z = \ln r + i\theta \quad \alpha < \theta < \alpha + 2\pi.$$

شاخه α ام تابع لگاریتم است که تابعی تحلیلی می باشد. چون

$$u(r, \theta) = \ln r, \quad v(r, \theta) = \theta.$$

پس شرایط کشی-ریمان در مختصات قطبی به صورت زیر برقرار است.

$$ru_r = r \cdot \frac{1}{r} = 1 = v_{\theta}, \quad rv_r = 0 = -u_{\theta}.$$

همچنین

$$\frac{d}{dz} \log_{\alpha} z = e^{-i\theta} (u_r + iv_r) = e^{-i\theta} \frac{1}{r} = \frac{1}{z}.$$

دامنه این تابع $\{z : \arg z = \alpha\} \cup \{0\}$ که مجموعه ای باز است.

پس این تابع یک تابع تحلیلی است. شعاع $\theta = \alpha$ را برش شاخه و نقطه $z = 0$ را نقطه شاخه گویند.

شاخه اصلی لگاریتم: شاخه $\alpha = -\pi$ تابع لگاریتم را شاخه اصلی لگاریتم گویند و با $\text{Log } z$ نشان می دهند. یعنی

$$\text{Log } z = \ln r + i\theta \quad -\pi < \theta < \pi.$$

اکنون به بررسی خواص سه گانه مطلوب می پردازیم.

۱. معکوس تابع نمائی است.

$$\log_{\alpha} e^z = \log_{\alpha} e^x \cdot e^{iy} = \ln e^x + iy = x + iy = z$$

$$e^{\log_{\alpha} z} = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r} \cdot e^{i\theta} = re^{i\theta} = z.$$

پس شرط تابع معکوس بودن تابع نمائی برقرار است.

۲. تعمیم لگاریتم نپری حقیقی است. برای $x > 0$ و $-\pi < \alpha < \pi$ داریم $x = xe^{i\alpha}$.

پس

$$\log_{\alpha} x = \ln x.$$

پس برای این شاخه‌ها این خاصیت نیز برقرار است.

۳. با توجه به مطالب قبلی $\log_{\alpha} z$ تحلیلی است.

نکته. تابع $\log_{\alpha} z$ یا حتی $\text{Log } z$ خواص جبری $\ln x$ را ندارند. یعنی

$$\text{Log } z_1 z_2 = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 \quad \text{یا} \quad \text{Log } \frac{1}{z} = -\text{Log } z$$

ممکن است برای بعضی از نقاط دامنه برقرار نباشد. به عنوان مثال

$$\text{Log } i = \frac{\pi}{2}i, \quad \text{Log } (-1 + i) = \frac{1}{2} \ln 2 + i \frac{3\pi}{4}$$

لیکن

$$\text{Log } i(-1 + i) = \text{Log } (-1 - i) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{3\pi}{4}i$$

پس

$$\text{Log } i(-1 + i) \neq \text{Log } i + \text{Log } (-1 + i).$$

نکته. این مطلب چندان مهم نیست چون نیاز به استفاده از آن نیست.

مفهوم توان در ریاضی به صورت تکاملی زیر بیان گردید. برای عدد طبیعی n

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ بار}} = a^n.$$

برای اعداد صحیح منفی m

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}}.$$

برای عدد $\frac{1}{n}$ ، n عدد طبیعی

$$a^{\frac{1}{n}} = b \iff a = b^n$$

و آن را ریشه n ام عدد طبیعی a گفته و با $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهند.

برای عدد گویا $n, m > 0$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

برای عدد اصم x و $a > 0$

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

نکته. هر کدام از این تعریف‌ها تعریف‌های قبلی را در بر و با آن سازگاری کامل دارد.

برای اعداد مختلط توان را به صورت زیر تعریف می‌کنیم و آن را توان کلی گویند که حالات قبلی فوق را نیز در بر دارد.

توان کلی: برای عدد مختلط $z \neq 0$ توان c آن را که یک عدد مختلط است به صورت زیر می‌گیریم:

$$z^c = e^{c \log z}$$

که این جا $\log z$ بینهایت مقداری است. پس z^c بسته به عدد c ، می‌تواند یک مقداری، چند مقداری و یا بینهایت مقداری باشد. کلیه توان‌های یک عدد مختلط را توان کلی آن می‌گویند. همچنین $e^{c \log z}$ را مقدار اصلی توان کلی گویند.

مثال ۱۹.۳. کلیه توان‌های $(1+i)^{(1-i)}$ و همچنین مقدار اصلی توان کلی آن را بیابید.
حل.

$$(1+i)^{1-i} = e^{(1-i) \log(1+i)} = e^{(1-i) \left(\frac{\ln 2}{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right)}$$

$$= e^{\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi} \cdot e^{(-\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi)i}$$

$$= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi} \left[\cos \left(-\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

که در آن $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ مقدار اصلی به ازای $k = 0$ به دست می‌آید. پس

$$(1+i)^{(1-i)} \text{ مقدار اصلی} = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}} \left[\cos \left(-\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

تمرین ۳.۳

۱. هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{ll} \frac{dw}{dz} = 5w + z & (\text{آ}) \\ \frac{d^2w}{dz^2} + 3\frac{dw}{dz} + 2w = e^z & (\text{ج}) \\ \frac{dw}{dz} + 2zw = 2z & (\text{ب}) \\ \frac{d^4w}{dz^4} + w = e^{2z} & (\text{د}) \end{array}$$

۲. قسمت‌های حقیقی، موهومی، قدر مطلق و شناسه $f(z) = e^{\sin z}$ را مشخص کنید.

۳. هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{ll} e^{z^2} = 1 + i & (\text{آ}) \\ \sin z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i & (\text{ج}) \\ \tan z = 1 + i & (\text{د}) \\ \text{Log } z = (1 - i)\pi^2 & (\text{ب}) \end{array}$$

۴. بزرگ‌ترین دامنه تحلیلی هریک از توابع زیر را مشخص کنید.

$$\begin{array}{ll} f(z) = \text{Log}(z + 1 + i) & (\text{آ}) \\ g(z) = \frac{\text{Log}(z+i)}{z^2+4} & (\text{ب}) \end{array}$$

۵. مشتق شاخه اصلی توان کلی زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} f(z) = z^{2z} & (\text{آ}) \\ f(z) = z^{\sin z} & (\text{ب}) \end{array}$$

۶. کلیه مقادیر و مقدار اصلی هریک از توان‌های کلی زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} (1-i)^{1+i} & (\text{آ}) \\ (2i)^{1+i} & (\text{ج}) \\ (1-i)^i & (\text{ب}) \\ (\sqrt{3} + i)^{\sqrt{3}-i} & (\text{د}) \end{array}$$

۷. شاخه اصلی $f(z) = \sqrt{1+z}$ را مشخص کنید.

۸. مقادیر زیر را محاسبه کنید.

آ) $|\cos z|$ ج) $\Re \tanh z$

ب) $|\cot z|$ د) $\Im \coth z^2$

۴.۳ مروری بر توابع تحلیلی

هدف از توابع مختلط دو قسمت زیر است:

هدف اول: محاسبه آسان انتگرال‌های پیچیده مانند

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)^2} dx \quad \text{یا} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{(2+\cos \theta)^2} d\theta$$

با استفاده از نتایج این قسمت محاسبه آن‌ها را در حد محاسبه چهار عمل اصلی تقلیل خواهیم داد.

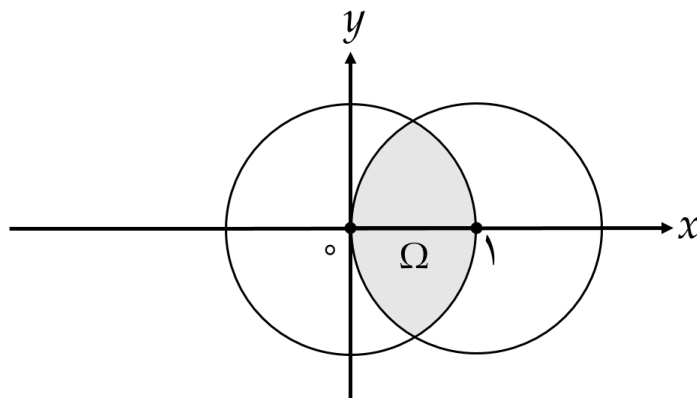
هدف دوم: تبدیل میدان‌های "بد" به میدان‌های "خوب". به عنوان مثال حل مسئله زیر روی میدان بین دو دیسک، یعنی شکل ۱.۳ را در نظر بگیرید.

$$\Omega : x^2 + y^2 < 1, \quad (x-1)^2 + y^2 < 1$$

$$u_{xx} + u_{yy} = xy,$$

$$u|_{\Omega} = x^2 - y^2.$$

حل این مسئله با استفاده از مباحثی که تاکنون گفته شده مقدور نیست. با تبدیل Ω



شکل ۱.۳: میدان بین دو دیسک

فوق به نیم‌دایره یا دایره یا نیم‌صفحه، حل این مسئله آسان می‌گردد. ابزار انجام این کارها توابع تحلیلی (یعنی مختلط مشتق‌پذیر) است. تابع مختلط تابعی با دامنه و برد اعداد مختلط است.

در ابتدا، کار با اعداد مختلط را مرور می‌کنیم.

اعداد مختلط: یک عدد مختلط را به صورت $z = x + iy$ داریم که در آن x و y اعداد حقیقی‌اند. برای اعداد مختلط در انجام چهار عمل اصلی مانند اعداد حقیقی عمل می‌کنیم و به جای i^2 عدد -1 را قرار می‌دهیم.

مثال ۲۰.۳. عدد مختلط زیر را ساده کنید. یعنی به صورت $a + ib$ بنویسید.

$$\frac{(1+i)^2 - (1-i)^3}{(2+3i)(3-2i)}$$

حل. تمام اتحادهای حقیقی برقرار است.

$$\begin{aligned} \frac{(1+i)^2 - (1-i)^3}{(2+3i)(3-2i)} &= \frac{1+2i+i^2 - (1-3i+3i^2-i^3)}{6-4i+9i-6i^2} \\ &= \frac{1+2i-1-1+3i-3(-1)+i(-1)}{6+5i+6} = \frac{2+4i}{12+5i}. \end{aligned}$$

برای حذف i از مخرج کسر صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج کسر ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{2+4i}{12+5i} \cdot \frac{12-5i}{12-5i} &= \frac{24-10i+48i-20i^2}{12^2-5^2(i^2)} \\ &= \frac{24+38i-20(-1)}{144-25(-1)} = \frac{44+38i}{169} \\ &= \frac{44}{169} + \frac{38}{169}i. \end{aligned}$$

نمایش اعداد مختلط:

اعداد مختلط را به صورت $z = a + ib$ در مختصات دکارتی نمایش می‌دهیم. در این

مختصات داریم

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

پس

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

- r را قدر مطلق z و با $|z|$ نیز نمایش می‌دهند.- θ را شناسه z می‌گویند و با $\arg z$ نشان می‌دهند.- x را قسمت حقیقی z می‌گویند و با $\Re z$ نشان می‌دهند.- y را قسمت موهومی z می‌گویند و با $\Im z$ نشان می‌دهند.

با استفاده از دو اتحاد مثلثاتی

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

و

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

می‌توان نشان داد، برای هر عدد صحیح n تساوی زیر برقرار است:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

این اتحاد به اتحاد دوموآور مشهور است. به‌طور مثال برای $n = 2$ روابط زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta, \quad 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

و برای $n = -1$ نیز خواهیم داشت

$$\frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^{-1} = \cos \theta - i \sin \theta.$$

استفاده از قانون دوموآور محاسبات توانی را آسان می‌کند.

مثال ۲۱.۳. عدد $(1 + \sqrt{3}i)^{20}$ را ساده کنید.

حل. برای این کار از فرمول دموآور استفاده می کنیم.

$$1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

پس

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{3}i)^{20} &= \left[2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\right]^{20} = 2^{20}\left(\cos \frac{20\pi}{3} + i \sin \frac{20\pi}{3}\right) \\&= 2^{20}\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) = 2^{20}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\&= -2^{19} + i\sqrt{3}2^{19}.\end{aligned}$$

برای $z = x + iy$ عدد $x - iy$ را مزدوج z می گویند و با $\bar{z} = x - iy$ نشان می دهند. همچنین $\cos \theta + i \sin \theta$ را با $e^{i\theta}$ نشان می دهند و آن را نمای موهومی می گویند. نمای موهومی $e^{i\theta}$ کلیه خواص جبری e^{ax} را دارا است به خصوص $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ که همان تساوی پارسیوال است. محاسبه ریشه n ام یک عدد مختلط با این تساوی به سادگی انجام پذیر است.

اگر $z = re^{i\theta}$ در مختصات قطبی و $w = \rho e^{i\phi}$ ریشه n ام آن باشد، در این صورت $z = w^n$ یا

$$re^{i\theta} = (\rho e^{i\phi})^n = \rho^n e^{in\phi}.$$

پس

$$r = \rho^n, \quad n\phi = \theta + 2k\pi.$$

در نتیجه

$$\rho = r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \geq 0, \quad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

و

$$w = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + i\frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

یا

$$w = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

یعنی هر عدد مختلط، n تا ریشه مختلط n ام دارد.

مثال ۲۲.۳. کلیه ریشه‌های سوم عدد ۸ را به دست آورید.

حل.

$$z = 8 = 8 e^{i0}$$

پس $r = 8$ و $\theta = 0$ و $n = 3$. در نتیجه

$$w = \sqrt[3]{8} \left(\cos \left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2$$

بنابراین

$$w_0 = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2,$$

$$w_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$w_2 = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

تابع مختلط: هر تابع با دامنه اعداد مختلط و برد اعداد مختلط را یک تابع مختلط گویند.

اگر $w = f(z)$ یک تابع مختلط باشد، آن را به صورت

$$w = u(x, y) + iv(x, y)$$

نیز می‌توان نوشت که در آن $u(x, y)$ قسمت حقیقی و $v(x, y)$ قسمت موهومی آن است. برای این کار کافی است در $f(z)$ به جای z قرار دهیم $x + iy$ و قسمت حقیقی و موهومی آن را جدا کنیم.

مثال ۲۳.۳. تابع $f(z) = z^3$ را به صورت $u(x, y) + iv(x, y)$ بنویسید.

حل.

$$f(z) = z^3 = (x + iy)^3$$

$$= x^3 + 3ix^2y + 3i^2xy^2 + i^3y^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$$

پس

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

عکس این مطلب نیز صحت دارد. یعنی اگر دو تابع $u(x, y)$ و $v(x, y)$ داده شده باشد و بگیریم $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، در این صورت $f(z)$ یک تابع مختلط است. چون از $z = x + iy$ داده شده مقادیر x و y معین است. از قرار دادن مقدار آنها در $u(x, y)$ و $v(x, y)$ مقدار $f(z)$ به دست می آید. همچنین از قرار دادن $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ و $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ ، این $f(z)$ را بر حسب z و $\bar{z}$ داریم که می توان گفت تابعی از z داریم.

مثال ۲۴.۳. تابع مختلط $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$ را بر حسب z بنویسید.

حل.

$$f(z) = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + 2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)i$$

$$= \frac{1}{4}(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 + z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2 + 2z^2 - 2\bar{z}^2) = z^2.$$

در موضوع توابع مختلط فقط تابع های مشتق پذیر مطرح و مورد توجه اند. لیکن برای بیان مفهوم مشتق نیاز به مفهوم حد است.

حد: می گوئیم حد $f(z)$ در z_0 برابر w_0 است، اگر

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - w_0| = 0$$

و می نویسیم

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0.$$

توجه کنید این تساوی تعریف حد تابع دومتغیره را در ریاضی ۲ بیان می‌کند. در واقع اگر داریم

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad w_0 = u_0 + iv_0.$$

$$z = x + iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

پس

$$|f(z) - w_0|^2 = (u(x, y) - u_0)^2 + (v(x, y) - v_0)^2,$$

$$z \rightarrow z_0 \iff (x, y) \rightarrow (x_0, y_0).$$

بنابراین

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - w_0| = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} [(u(x, y) - u_0)^2 + (v(x, y) - v_0)^2].$$

نتیجه ۸.۳.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \iff \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = v_0.$$

پیوستگی: می‌گوییم $w = f(z)$ در z_0 پیوسته است اگر

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

نتیجه ۹.۳. $f(z)$ در z_0 پیوسته است اگر $u(x, y)$ و $v(x, y)$ در (x_0, y_0) پیوسته باشد.

تذکر. کلیه قواعد، فرمول‌ها و قضایای حد و پیوستگی برای تابع حقیقی $y = f(x)$ برای تابع مختلط $w = f(z)$ نیز برقرار است.

مثال ۲۵.۳. مطلوبست محاسبه $\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 - 4}{z - 2}$.

حل. اول

$$\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 - 4}{z - 2} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z + 2)(z - 2)}{z - 2} = \lim_{z \rightarrow 2} (z + 2) = 4.$$

دوم

قاعده هوبیتال

$$\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 - 4}{z - 2} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{2z}{1} = 4. \quad (\text{اگرچه مشتق هنوز تعریف نشده است})$$

مشتق: می‌گوییم تابع $f(z)$ در نقطه z_0 دارای مشتق برابر $f'(z)$ است اگر

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

تذکره. کلیه قواعد، فرمول‌ها و قضایای مشتق تابع $y = f(x)$ برای $w = f(z)$ نیز برقرار است.

توجه کنید با استفاده از فرم نمایش $w = f(z)$ فقط چندجمله‌ای و تابع کسری یا یک چندجمله‌ای تقسیم بر چندجمله‌ای از روی مطالب مربوط به اعداد مختلط معنی دارد. برای این توابع مشتق مانند تابع مشابه حقیقی است.

برای توابع به صورت $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تشخیص مشتق‌پذیری از روی روابط کشی-ریمان مقدور است.

خاصیت ۱۰.۳ (شرط کافی کشی-ریمان). اگر u_x, u_y, v_x, v_y موجود و پیوسته و در روابط کشی-ریمان

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

صدق نماید، آنگاه تابع فوق مشتق پذیر و

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = u_x + iv_x.$$

مثال ۲۶.۳. تابع $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ مشتق پذیر است چون

$$\begin{aligned} u_x &= \cos x \cosh y, & v_y &= \cos x \cosh y, \\ u_y &= \sin x \sinh y, & v_x &= -\sin x \sinh y. \end{aligned}$$

پس روابط کشی-ریمان برقرار است و این مشتقات نسبی پیوسته اند. در نتیجه، $f'(z)$ موجود است و

$$f'(z) = u_x + iv_x = \sin x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

بعضی از توابع در مختصات قطبی داده می شود. تشخیص مشتق پذیری و مشتق آن ها با استفاده از روابط کشی-ریمان در مختصات قطبی مقدور است.

خاصیت ۱۱.۳ (شرط کافی کشی-ریمان در مختصات قطبی). فرض کنید برای

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

u_r, u_θ, v_r و v_θ موجود و پیوسته و شرایط کشی-ریمان در مختصات قطبی

$$ru_r = v_\theta, \quad rv_r = -u_\theta$$

برقرار باشد، آنگاه $f'(z)$ موجود و

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r).$$

مثال ۲۷.۳. برای تابع $f(z) = r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} + ir^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2}$ داریم:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2}, & v_\theta &= \frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2}, \\ u_\theta &= -\frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2}, & v_r &= \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

پس روابط کشی-ریمان در مختصات قطبی برقرار است. در نتیجه

$$f'(z) = e^{-i\theta} \left(\frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} + i \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}}.$$

با توجه به روابط کشی-ریمان، اگر دو تابع دومتغیره مشتق‌پذیر $u(x, y)$ و $v(x, y)$ را بدهند شانس اینکه تابع مختلط $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد، بسیار کم است. سوال این است که اگر تابع مشتق‌پذیر $u(x, y)$ را بدهند، آیا تابعی مثل $v(x, y)$ موجود است به طوری که $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ مشتق‌پذیر باشد؟ قبل از بیان جواب این سوال دو تعریف زیر مفید است.

تعریف ۳.۳. اگر دامنه تابع $w = f(z)$ یک مجموعه باز از نقاط صفحه باشد و روی این دامنه مشتق‌پذیر باشد، این تابع را یک تابع تحلیلی گویند.

تعریف ۴.۳. تابع دومتغیره $h(x, y)$ را همساز گوئیم اگر جواب معادله لاپلاس باشد، یعنی $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

خاصیت ۱۲.۳. الف) قسمت حقیقی و قسمت موهومی هر تابع تحلیلی یک تابع همساز است. یعنی اگر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی باشد، آنگاه $u_{xx} + u_{yy} = 0$ و $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

ب) ترکیب یک تابع همساز و یک تابع تحلیلی یک تابع همساز است.

ج) اگر $u(x, y)$ همساز باشد، آنگاه $v(x, y)$ همساز موجود است به طوری که $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ یک تابع تحلیلی است.

تعریف ۵.۳. تابع همساز $v(x, y)$ فوق را مزدوج همساز $u(x, y)$ گویند.

تذکره. تعیین $v(x, y)$ از روی $u(x, y)$ با استفاده از روابط کشی-ریمان مقدور است.

مثال ۲۸.۳. مزدوج همساز تابع همساز $u(x, y) = x^2 - y^2 + e^x \cos y$ را بیابید.

حل. تابع مزدوج همساز $v(x, y)$ می‌بایستی همراه با $u(x, y)$ تابع تحلیلی $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ را تشکیل دهند. پس u و v باید در روابط کشی-ریمان صدق کنند. یعنی

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

در نتیجه v باید در دو معادله زیر صدق کند:

$$v_y = 2x + e^x \cos y$$

$$v_x = 2y + e^x \sin y.$$

اگر از معادله اول نسبت به y انتگرال بگیریم، به دست می‌آوریم:

$$v(x, y) = 2xy + e^x \sin y + h(x),$$

چون انتگرال نسبی و نسبت به y است، پس ثابت انتگرال تابعی از x است. حال $h(x)$ می‌بایستی طوری انتخاب شود تا معادله دوم برقرار گردد. از قرار دادن آن در معادله دوم به دست می‌آوریم

$$v_x = 2y + e^x \sin y + h'(x) = 2y + e^x \sin y.$$

به این ترتیب به دست می‌آوریم $h'(x) = 0$ یا $h(x) = c$ یعنی تابع $h(x)$ ثابت حقیقی است. پس

$$v(x, y) = 2xy + e^x \sin y + c$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + e^x \cos y + i(2xy + e^x \sin y + c)$$

تمرین ۴.۳

۱. اعداد مختلط زیر را ساده کنید.

الف:
$$\frac{3(1-i)^8 - i(1-i\sqrt{3})^9}{2(1+i)^6 + i(\sqrt{3}-i)^7}$$

ب:
$$\sqrt[4]{-\sqrt{6} + \sqrt{1 - \sqrt{3}i}}$$

ج:
$$\sqrt[4]{\sqrt{2} - \sqrt{-i}}$$

۲. قسمت حقیقی، قسمت موهومی، قدر مطلق و شناسه (آوند یا آرگومان) توابع زیر را مشخص کنید.

الف: $\cosh(z^2 + 1)$

ب: $\sin(z^2 - i)$

۳. نشان دهید تابع $u(r, \theta) = r^{\frac{3}{4}} \sin\left(\frac{3}{4}\theta\right) - 2\theta + 3 \ln r$ همساز است و مزدوج همساز آن را به دست آورید.

۴. مشتق تابع تحلیلی $f(z) = u(x, y) + i e^{y^3 - 3x^2y} \sin(x^3 - 3xy^2)$ را به دست آورید.

۵. مشتق تابع تحلیلی $f(z) = e^{3x^2y - y^3} \cos(x^3 - 3xy^2) + i v(x, y)$ را به دست آورید.

۵.۳ مروری بر توابع مقدماتی مختلط

توابع مقدماتی حقیقی یعنی چندجمله‌ای، نمایی و مثلثاتی ابزارهایی برای بیان مفاهیم علمی و اجتماعی هستند و این توابع به صورت طبیعی در زندگی بشر ظاهر شده‌اند. سایر توابع دیگر که در زندگی بشر مؤثراند به صورتی از روی این توابع ساخته می‌شوند و قابل بیان هستند.

توابع مقدماتی مختلط می‌بایستی طوری بیان شوند تا دارای کلیه خواص هم‌نام حقیقی خود باشند. دو خاصیت زیر را تمام آن‌ها می‌بایستی داشته باشند.

الف: تعمیمی از تابع مقدماتی حقیقی هم‌نام خود باشد. مثلاً تابع $\sin z$ می‌بایستی طوری تعریف گردد که اگر به جای z مختلط در آن عدد حقیقی x را قرار دهیم تابع حاصل همان $\sin x$ حقیقی باشد.

ب: توابع تحلیلی باشند. چون کلیه توابع مقدماتی حقیقی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیراند.

تابع چندجمله‌ای قبلاً تعریف شده است. چنانچه تابع نمایی، سینوس و کسینوس مختلط را تعریف کنیم سایر توابع مقدماتی از روی آن‌ها قابل بیان است. ابتدا به تعریف تابع نمایی مختلط می‌پردازیم. خواهیم دید سینوس و کسینوس مختلط از روی آن قابل بیان است.

الف: تابع نمایی

تابع نمایی حقیقی را به صورت معکوس تابع لگاریتم نپری $\ln x$ پذیرفتیم و با e^x نشان دادیم. همچنین در بخش اعداد مختلط تابع نمایی موهومی را به صورت $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ در نظر گرفتیم و دیدیم این تابع نیز خواص اساسی تابع نمایی حقیقی را دارد. برای تطبیق تابع نمایی مختلط با این دو مفهوم قبلی برای $z = x + iy$ تابع نمایی مختلط را به صورت زیر می‌گیریم:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

یا

$$e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

حال نشان می‌دهیم این تابع یک تابع تام است. یعنی برای تمام اعداد مختلط تعریف می‌شود و در تمام این نقاط مشتق‌پذیر است. برای این کار از شرط کافی کشی-ریمان استفاده می‌کنیم. داریم

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

پس

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y,$$

$$v_y = e^x \cos y, \quad v_x = e^x \sin y.$$

در نتیجه

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

یعنی شرط کشی-ریمان در تمام نقاط $\mathbb{C}$ برقرار و این مشتقات نسبی نیز پیوسته‌اند. بنابراین e^z تابعی تحلیلی با دامنه $\mathbb{C}$ است. بعلاوه

$$\frac{de^z}{dz} = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

این تابع نمایی کلیه خواص تابع نمایی حقیقی را دارد. مثلاً

$$e^z \neq 0, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

این تابع همچنین تناوبی با دوره تناوبی $2\pi i$ است.

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z.$$

ب: توابع مثلثاتی

برای تعریف توابع مثلثاتی مختلط از تابع نمایی استفاده می‌کنیم. داریم:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

از این دو اتحاد به دست می آوریم

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

برای تطبیق سینوس و کسینوس مختلط با سینوس و کسینوس حقیقی می گیریم:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

سایر توابع مثلثاتی مشابه توابع حقیقی تعریف می شوند. مثلاً

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

تذکره. کلیه فرمول ها و اتحادهای توابع مثلثاتی حقیقی برای این توابع مثلثاتی نیز برقرار است.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \sin z &= \cos z, & \frac{d}{dz} \cos z &= -\sin z, \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2. \end{aligned}$$

اتحادهای زیر در محاسبات مفیداند:

$$\begin{aligned} \sin iy &= i \sinh y, & \cos iy &= \cosh y, \\ \sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \\ \cos z &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y. \end{aligned}$$

با وجود برقراری اتحاد $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ ، لیکن $\sin z$ و $\cos z$ هر عدد مختلط را به خود می گیرد. همچنین $|\sin z|$ و $|\cos z|$ هر عدد مثبت را به خود می گیرد.

مثال ۲۹.۳. مطلوبست حل معادله $\sin z = 5^\circ$.

حل. با توجه به اتحاد فوق داریم

$$\sin x \cosh y = ۵۰,$$

$$\cos x \sinh y = ۰.$$

از حل معادله دوم داریم $\sinh y = ۰$ یا $\cosh x = ۰$.

$$\sinh y = ۰ \Rightarrow \cosh y = ۱.$$

از معادله اول به دست می آوریم $\sin x = ۵۰$ که فاقد جواب است.

$$\cos x = ۰ \Rightarrow \sin x = \pm ۱.$$

برای $\sin x = -۱$ از معادله اول به دست می آوریم $\cosh y = -۵۰$ که باز هم فاقد جواب است.

برای $\sin x = ۱$ از معادله اول به دست می آوریم $\cosh y = ۵۰$ یا

$$e^y + e^{-y} = ۱۰۰ \quad \text{یا} \quad e^y - ۱۰۰ e^y + ۱ = ۰ \quad \text{یا} \quad e^{2y} - ۱۰۰ e^y + ۱ = ۰$$

$$y = \ln(۵۰ + \sqrt{۲۴۹۹}), \quad y = \ln(۵۰ - \sqrt{۲۴۹۹}) \quad \text{از طرفی}$$

$$\cos x = ۰, \sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}, \quad k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots$$

پس

$$z = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + i \ln(۵۰ \pm \sqrt{۲۴۹۹}), \quad k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots$$

ج: توابع هذلولوی

توابع هذلولوی مختلط با استفاده از توابع هذلولوی حقیقی با تغییر متغیر

حقیقی به متغیر مختلط قابل بیان است. یعنی

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{۲}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{۲}.$$

سایر توابع هذلولوی نیز مشابه حقیقی قابل تعریف است و کلیه فرمول ها و

اتحادهای توابع هذلولوی حقیقی برای مختلط هم برقرار است.

تذکر. با توجه به دو اتحاد

$$\cosh z = \cosh iz, \quad \sinh z = -i \sin iz,$$

از توابع هذلولوی مختلط چندان استفاده نمی‌گردد.

تذکر. توجه کنید توابع سینوس و کسینوس مثلثاتی و هذلولوی تام هستند.

۵: تابع لگاریتم

تابع لگاریتم مختلط می‌بایستی طوری تعریف شود تا علاوه بر تحلیلی بودن و تعمیم $\ln x$ بودن، معکوس تابع نمایی e^z هم باشد. با توجه به خاصیت لگاریتم حقیقی حاصل ضرب دو مقدار برای $z = re^{i\theta} \neq 0$ می‌گیریم. یعنی

$$\log z = \ln r + i\theta$$

چون θ بی‌نهایت مقداری است، این لگاریتم تابع نیست. برای تابع داشتن می‌بایستی روی θ قیدی قرار دهیم تا یک مقداری شود. اگر برای α ثابت بگیریم $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$ ، در این صورت θ یک مقداری است. در نتیجه تعریف زیر را می‌توان بیان کرد.

تعریف ۶.۳. تابع زیر را شاخه α ام لگاریتم گویند

$$\log_{\alpha} z = \ln r + i\theta, \quad r > 0, \quad \alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi.$$

این تابع با توجه به خواص زیر تابع مطلوب است:

۱. با استفاده از شرط کافی کشی-ریمان در مختصات قطبی داریم

$$\frac{d}{dz} \log_{\alpha} z = e^{-i\theta} (u_r + iv_r) = e^{-i\theta} \left(\frac{1}{r} + i0 \right) = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \frac{1}{z}.$$

پس این تابع روی دامنه خود تحلیلی است.

۲.

$$\log_{\alpha} e^z = \log_{\alpha} e^x \cdot e^{iy} = \ln e^x + iy = x + iy = z,$$

$$e^{\log_{\alpha} z} = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r} \cdot e^{i\theta} = r e^{i\theta} = z$$

پس معکوس تابع نمایی است.

۳. اگر $0 < \alpha < 2\pi$ باشد، در این صورت برای $x > 0$ داریم $x = x e^{i0}$.بنابراین $\log_{\alpha} x = \ln x$. پس برای این شاخه‌ها $\log_{\alpha} z$ تعمیم $\ln x$ است.تعریف ۷.۳. $\log_{-\pi} z$ را شاخه اصلی لگاریتم گویند و با $\text{Log } z$ نمایش می‌دهند.

$$\text{Log } z = \ln r + i\theta, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

۵: توان کلی

مفهوم توان را به صورت تکاملی زیر داریم:

۱. برای عدد طبیعی a و عدد طبیعی n

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ بار}}$$

۲. برای عدد صحیح و منفی m

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}}$$

۳. $a^0 = 1$ ۴. برای هر عدد طبیعی n ریشه n ام عدد حقیقی a

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = b \iff a = b^n$$

۵. برای اعداد طبیعی n و m

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

۶. برای $a > 0$ و عدد اصم x

$$a^x = e^{x \ln a}$$

تذکر. هر کدام از این تعریف‌ها، تعریف‌های قبلی را دربردارد و با آن‌ها سازگار است.

برای اعداد مختلط، توان را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که برای اعداد منفی هم برقرار است و با مفاهیم فوق سازگار می‌باشد.

تعریف ۸.۳. برای اعداد مختلط z و c ، توان c عدد z را به صورت زیر می‌گیریم:

$$z^c = e^{c \log z}$$

تذکر. چون $\log z$ بی‌نهایت مقداری است، پس z^c بی‌نهایت مقداری است. لیکن $e^{c \operatorname{Log} z}$ یک مقداری است.

تعریف ۹.۳. $e^{c \operatorname{Log} z}$ را مقدار اصلی z^c می‌گویند.

مثال ۳۰.۳. کلیه مقادیر و مقدار اصلی i^i را به دست آورید.

حل.

$$\begin{aligned} i^i &= e^{i \log i} = e^{i \left(\ln 1 + (2k\pi + \frac{\pi}{2})i \right)} \\ &= e^{-(2k\pi + \frac{\pi}{2})}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

در نتیجه مقدار اصلی به ازای $k = 0$ به دست می‌آید. پس

$$i^i \text{ مقدار اصلی} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

تمرین ۵.۳

۱. کلیه مقادیر و مقدار اصلی $(\sqrt{3} + i)^{-i}$ را مشخص کنید.

۲. کلیه مقادیر و مقدار اصلی $(1 - i)^{1+i}$ را مشخص کنید.

۳. معادلات زیر را حل کنید.

الف: $\sinh z = 3 - 3i$

ب: $\cosh^2 z = 1 - i$

فصل ۴

انتگرال مختلط

در این فصل به معرفی انتگرال تابع مختلط و بررسی خواص آن می پردازیم. این کار با استفاده از انتگرال روی منحنی در داخل صفحه انجام می پذیرد. با استفاده از آن نشان خواهیم داد هر تابع تحلیلی نه تنها بی نهایت بار مشتق پذیر است بلکه دارای بسط تیلر نیز می باشد. با استفاده از این نتایج محاسبه انتگرال های معین پیچیده حقیقی به سادگی و می توان گفت در حد انجام محاسبات چهار عمل اصلی قابل انجام است. مثلاً انتگرال های زیر به سادگی قابل محاسبه است.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{4 + \sin x} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

در بخش ۱.۴ به معرفی انتگرال مختلط و خواص مقدماتی آن می پردازیم. همچنین قضیه کشی-گورسا یا قضیه انتگرال کشی و نتایج آن را داریم. با نتایج حاصل محاسبه انتگرال های فوق مقدور می گردد. در بخش ۲.۴ با معرفی سری تیلر و لران محاسبه انتگرال ها را ساده تر خواهیم کرد. در بخش ۳.۴ با معرفی مانده و خواص آن کار محاسبات را در حد محاسبات چهار عمل اصلی تقلیل می دهیم.

۱.۴ انتگرال مختلط

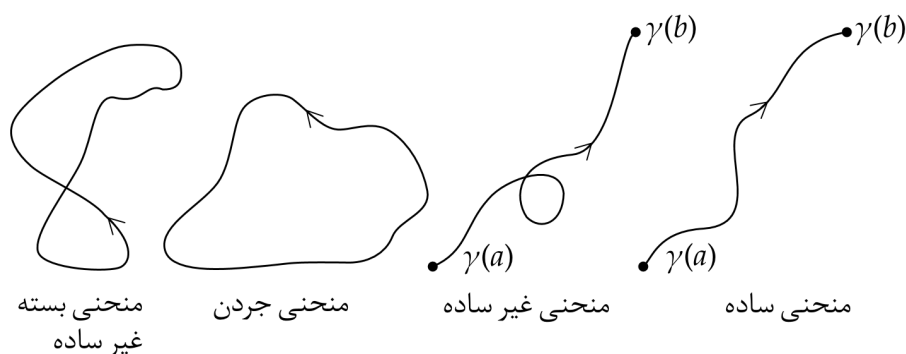
برای معرفی انتگرال در ابتدا به یادآوری مفاهیمی از منحنی در صفحه می‌پردازیم. هر تابع پیوسته مانند $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ را یک منحنی در صفحه مختلط یا مختصراً یک منحنی گوئیم. این منحنی را به صورت پارامتری زیر می‌توان نمایش داد.

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t) \quad a \leq t \leq b$$

که در آن $x(t)$ و $y(t)$ توابع حقیقی از متغیر حقیقی t است.

مثال ۱.۴. منحنی $\gamma(t) = t + it^2$, $-1 \leq t \leq 1$ همان منحنی $y = x^2$ با دامنه $[-1, 1]$ است.

منحنی $\gamma(t)$ را یک منحنی ساده گوئیم اگر خودش را قطع نکند. این منحنی را بسته گوئیم اگر نقاط ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق باشد. یعنی $\gamma(a) = \gamma(b)$. منحنی بسته و ساده را منحنی جردن گویند. (شکل ۱.۴ را ببینید.) اگر طول منحنی متناهی باشد، آن را با طول متناهی گویند. جهت منحنی را جهت افزایش t بر روی آن می‌گیریم. جهت منحنی را جهت مثلثاتی روی دایره و در داخل آن می‌گیریم. این جهت را جهت مثبت منحنی جردن و خلاف آن را جهت منفی می‌دانیم.



شکل ۱.۴: انواع منحنی

انتگرال مختلط: فرض کنید $C: \gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$ یک منحنی در صفحه و $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ یک تابع پیوسته با دامنه $D \subset \mathbb{C}$ باشد به طوری که منحنی C در داخل D واقع باشد. انتگرال f روی C را که با $\int_C f(z) dz$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy).$$

مثال ۲.۴. مطلوبست محاسبه $\int_C z^2 dz$ که در آن $C: \gamma(t) = t + it^2$, $0 \leq t \leq 1$.

حل.

$$\begin{aligned} \int_C z^2 dz &= \int_C (x^2 - y^2) dx - 2xy dy + i \int_C 2xy dx + (x^2 - y^2) dy \\ &= \int_0^1 (t^2 - t^4) dt - 2t \cdot t^2 \cdot 2t dt + i \int_0^1 2t \cdot t^2 dt + (t^2 - t^4) 2t dt \\ &= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} - \frac{4t^5}{5} \right) \Big|_0^1 + i \left(\frac{t^4}{2} + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3} \right) \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i. \end{aligned}$$

تذکره ۱) برای بازنویسی تعریف فوق کافیهست در $\int_C f(z) dz$ به جای $f(z)$ مقدار $u + iv$ و به جای dz مقدار $dx + i dy$ را قرار دهیم و ساده کنیم. یعنی

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + iv)(dx + i dy).$$

۲) در کتاب‌ها توابع مختلط معمولاً انتگرال مختلط را به صورت مجموع ریمان مشابه انتگرال روی منحنی تعریف می‌کنند و سپس به عنوان یک قضیه نشان می‌دهند. تعریف ما برقرار است. از آن جا که در این کتاب از مجموع ریمان در کاربرد استفاده نمی‌شود تعریف فوق برای کار ما کفایت می‌کند.

در زیر خواصی از انتگرال را می‌آوریم که برای انتگرال روی منحنی برقرار است. در این جا فرض بر این است که f و g توابع مختلط پیوسته و C_1 و C_2 و C منحنی‌های با طول متناهی هستند.

۱. از انتگرال روی منحنی داریم:

$$\int_C (f(z) + g(z)) dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz.$$

۲. برای هر عدد مختلط α داریم:

$$\int_C \alpha f(z) dz = \alpha \int_C f(z) dz.$$

۳. اگر $-C$ منحنی C در جهت عکس باشد آن‌گاه:

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz.$$

۴. اگر C_1 و C_2 دو منحنی در صفحه و ابتدای C_2 بر انتهای C_1 منطبق باشد آن‌گاه:

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$$

۵. اگر منحنی $C : \gamma(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$ دارای مشتق قطعه‌به‌قطعه پیوسته هموار باشد آن‌گاه:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

۶. اگر منحنی C دارای دو نوع نمایش پارامتری متفاوت مانند $\gamma_1(t)$ و $\gamma_2(t)$ باشد آن‌گاه:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt = \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(t)) \gamma_2'(t) dt$$

یعنی مقدار انتگرال به نحوه پارامتری کردن منحنی C بستگی ندارد.

۷. اگر منحنی C دارای طولی برابر L و برای نقاط z روی منحنی C داشته باشیم $|f(z)| \leq M$ عددی ثابت، آن گاه

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML.$$

۸. فرض کنید f و f' روی D پیوسته و $C : \gamma(t), a \leq t \leq b$ با $\gamma'(t)$ قطعه به قطعه پیوسته در داخل D باشد، آن گاه

$$\int_C f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

نکته. این خاصیت را می توان تعمیمی از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال دانست.

مثال ۳.۴. مطلوبست محاسبه $\int_C z^2 dz$ وقتی $0 \leq t \leq 1$ ، $C : \gamma(t) = t + it^2$.

حل. روش اول: با توجه به ویژگی ۵ فوق می نویسیم:

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (t + it^2)^2 (1 + 2it) dt = \frac{1}{3} (t + it^2)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (1 + i)^3.$$

روش دوم: با استفاده از ویژگی ۸ فوق می نویسیم:

$$\int_C z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = \frac{(1+i)^3}{3}.$$

برای این انتگرال داریم $M \geq 2$ و $L = \sqrt{2}$. پس

$$\left| \int_C z^2 dz \right| \leq M \cdot L = 2\sqrt{2}$$

لیکن:

$$\left| \frac{1}{3} (1+i)^3 \right| = \frac{1}{3} |1+i|^3 = \frac{1}{3} 2\sqrt{2}.$$

اکنون به بیان قضیه انتگرال کشی که به قضیه کشی-گورسا نیز شهرت دارد می‌پردازیم. این قضیه که همان قضیه گرین برای توابع مختلط است اساس نظریه توابع مختلط است اگرچه کاربرد محاسبه مستقیم ندارد. برای بیان علت صحت این قضیه از قضیه گرین استفاده خواهیم کرد که در ابتدا می‌آوریم.

قضیه ۱.۴ (گرین). فرض کنید C یک منحنی جردن و $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ دو تابع حقیقی باشند که C و داخل آن در دامنه این دو تابع قرار دارد. اگر P و Q دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته باشند، آن گاه

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{C \text{ داخل}} (Q_x - P_y) dx dy.$$

خاصیت ۲.۴ (قضیه انتگرال کشی). فرض کنید f تابعی تحلیلی روی میدان D و C یک منحنی جردن باشد که هم خودش و هم داخل آن در D واقع است. آن گاه

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

علت. با استفاده از قضیه گرین می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C u dx - v dy + i \oint_C v dx + u dy \\ &= \iint_{C \text{ داخل}} (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_{C \text{ داخل}} (u_x - v_y) dx dy. \end{aligned}$$

چون f تحلیلی است پس روابط کشی-ریمان برقرار است. یعنی $u_x - v_y = 0$ و $-v_x - u_y = 0$ پس $\oint_C f(z) dz = 0$.

تذکره ۱. کشی با فرض پیوستگی $f'(z)$ اثبات فوق را ارائه نمود. لیکن مشتق توابع لزوماً پیوسته نیستند. این فرض هم‌ارز اهمیت این قضیه و هم استفاده از آن را محدود می‌کند. گورسا بعد از چهار دهه اثباتی بدون فرض پیوستگی $f'(z)$ ارائه داد و با استفاده از آن نشان داد $f'(z)$ هم پیوسته است.

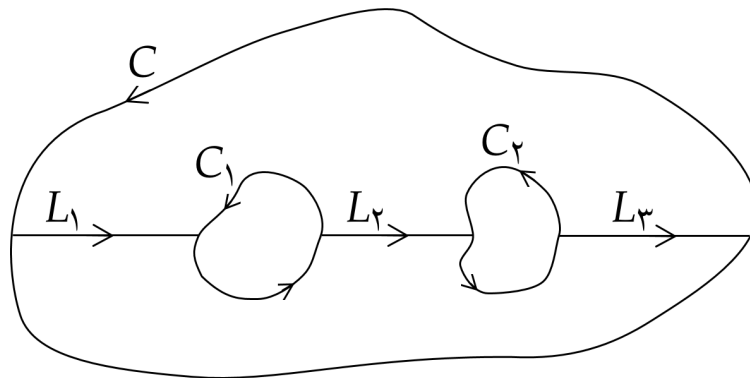
(۲) اگر C یک منحنی بسته با طول متناهی باشد باز هم قضیه انتگرال کشی صحیح است.

خاصیت زیر کمک می‌کند تا از قضیه انتگرال کشی به فرمول انتگرال کشی برسیم.

خاصیت ۳.۴. فرض C یک منحنی جردن و C_1 تا C_n ، n تamenحنی جردن جدا از هم در داخل C باشد. همچنین فرض کنید تا f روی این منحنی‌ها و بین آن‌ها تحلیلی است. آن‌گاه

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz.$$

علت. علت را برای $n = 2$ بررسی می‌کنیم. حالت کلی مشابه است. از یک نقطه C به یک نقطه C_1 و از یک نقطه دیگر C_1 به C_2 و از یک نقطه C_2 به یک نقطه C مطابق شکل وصل کنید. این خطوط واصل را L_1 ، L_2 و L_3 بنامید. (شکل ۲.۴ را ببینید.) لبه بالایی این منحنی‌ها را با علامت $+$ و لبه پایینی را با علامت $-$ در نظر بگیرید و دو منحنی جردن به صورت زیر را بسازید.



شکل ۲.۴

$$K_1 = C^+ \cup L_1 \cup (-C_1^+) \cup L_2 \cup (-C_2^+) \cup L_3$$

$$K_2 = C^- \cup (-L_3) \cup (-C_2^-) \cup (-L_2) \cup (-C_1^-) \cup (-L_1).$$

طبق قضیه انتگرال کشی

$$\int_{K_1} f(z) dz = 0, \quad \int_{K_2} f(z) dz = 0$$

با باز کردن این انتگرال‌ها روی منحنی‌های تشکیل دهنده K_1 و K_2 و جمع آن‌ها به دست می‌آوریم:

$$\oint_C f(z) dz - \oint_{C_1} f(z) dz - \oint_{C_2} f(z) dz = 0$$

به این ترتیب اثبات کامل می‌گردد.

اولین فرمول محاسباتی را در خاصیت زیر داریم.

خاصیت ۴.۴ (فرمول انتگرال کشی). فرض کنید C یک منحنی جردن و z_0 یک نقطه در داخل C و $f(z)$ تابعی تحلیلی روی C و داخل C باشد. آن‌گاه:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

علت. برای $\epsilon > 0$ داده شده $\delta > 0$ را طوری بگیرید تا برای $|z - z_0| < \delta$ داشته باشیم $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. حال Γ_ϵ را دایره به مرکز z_0 و شعاع $r < \delta$ در نظر بگیرید. (شکل ۳.۴ را ببینید.) طبق خاصیت ۳.۴ داریم:

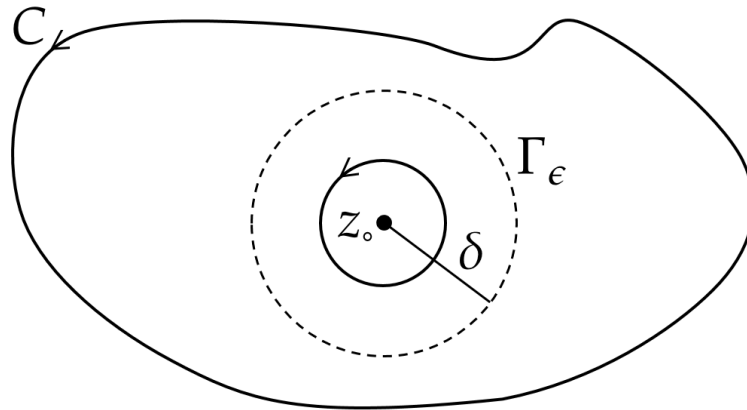
$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

از طرف دیگر

$$\oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{1}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{e^{i\theta}} d\theta = 2\pi i f(z_0)$$

9

$$\left| \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{\epsilon}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi \epsilon.$$



شکل ۳.۴

به این ترتیب:

$$\left| \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| = \left| \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq 2\pi\epsilon$$

چون این نامساوی برای کلیه مقادیر ϵ برقرار است. پس باید برابر صفر باشد یا

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

مثال ۴.۴. انتگرال $\oint_C \frac{e^{z^2} + z}{z - 2} dz$ را روی منحنی $9x^2 + 16y^2 = 144$ محاسبه کنید.

حل. منحنی C یک منحنی جردن و نقطه $z = 2$ در داخل آن است. پس طبق فرمول انتگرال کشی

$$\oint_C \frac{e^{z^2} + z}{z - 2} dz = 2\pi i (e^{z^2} + z) \Big|_{z=2} = 2\pi i (e^4 + 2).$$

از خاصیت زیر در محاسبات استفاده خواهد شد.

خاصیت ۵.۴. اگر C دایره به شعاع r و به مرکز z_0 باشد آن گاه

$$\oint_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

علت. داریم:

$$|z - z_0| = re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

در این صورت

$$\begin{aligned} \oint_C (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} i r e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta \\ &= \begin{cases} i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i & n = -1 \\ i r^{n+1} \frac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)} \Big|_0^{2\pi} = 0 & n \neq -1. \end{cases} \end{aligned}$$

خاصیت ۶.۴ (فرمول مشتق). فرض کنید C ، z_0 و f مانند خاصیت ۴.۴ باشد در

این صورت f در z_0 از هر مرتبه‌ای مشتق پذیر است و

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

علت. فرمول انتگرال کشی را به صورت زیر داریم:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

z_0 را می‌توان به عنوان یک متغیر در داخل C محسوب کرد. تابع زیر انتگرال نسبت به z_0 مشتق پذیر و تابع مشتق نیز نسبت به z انتگرال پذیر است. پس جای مشتق نسبت به z_0 و انتگرال نسبت به z را می‌توان عوض کرد. به این ترتیب به دست می‌آوریم.

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

با استقرا

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

نتیجه ۷.۴. هر تابع تحلیلی بی نهایت بار مشتق پذیر است. در نتیجه قسمت حقیقی و موهومی هر تابع تحلیلی، مشتقات پاره ای از هر مرتبه ای نسبت به x و y دارند.

مثال ۵.۴. مطلوبست محاسبه $\oint_C \frac{\sin 2z}{z^2} dz$ که در آن $C: 9x^2 + 16y^2 = 144$.

حل. طبق فرمول مشتق

$$\oint_C \frac{\sin 2z}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} (\sin 2z)' \Big|_{z=0} = 2\pi i \cdot 2 \cos 0 = 4\pi i.$$

در این جا می توانیم به محاسبه انتگرال های حقیقی بپردازیم.

مثال ۶.۴. مطلوبست محاسبه $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta$.

حل. ابتدا انتگرال را بر حسب $e^{i\theta}$ بنویسید و سپس بگیرید $z = e^{i\theta}$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2e^{i\theta}}{e^{2i\theta} + 4e^{i\theta} + 1} d\theta$$

$$z = e^{i\theta} \implies dz = ie^{i\theta} d\theta$$

پس

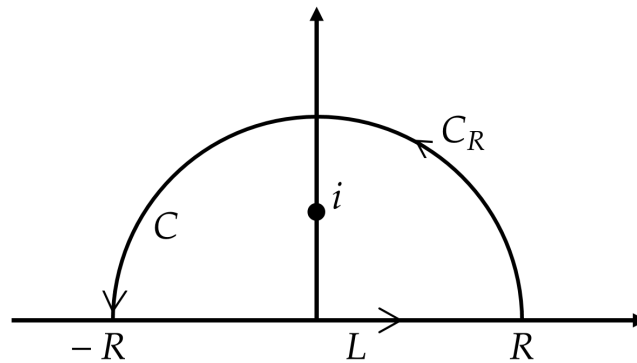
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{2}{i} \frac{1}{z^2 + 4z + 1} dz \\ &= \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z + 2 + \sqrt{3})(z + 2 - \sqrt{3})} dz \\ &= \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z + 2 - \sqrt{3}} dz = \frac{2}{i} 2\pi i \frac{1}{z + 2 + \sqrt{3}} \Big|_{z=-2+\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

که در آخر از فرمول انتگرال کشی استفاده شده است.

تذکره. با این روش هر انتگرال مثلثاتی حاوی سینوس و کسینوس به انتگرال مختلط تبدیل و قابل محاسبه است.

مثال ۷.۴. مطلوبست محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^5} dx$.

حل. انتگرال $\oint_C \frac{1}{(1+z^2)^5} dz$ را روی منحنی C زیر در جهت مثلثاتی در نظر بگیرید که در آن $C = C_R \cup L$. (به شکل ۴.۴ توجه کنید.) شعاع R را بزرگ‌تر از ۱ در نظر بگیرید تا



شکل ۴.۴: $C = C_R \cup L$

نقطه i در داخل C قرار گیرد. در این صورت

$$\oint_C \frac{1}{(1+z^2)^5} dz = \oint_C \frac{(z+i)^{-5}}{(z-i)^5} dz$$

این انتگرال با فرمول مشتق تطبیق دارد.

$$f(z) = (z+i)^{-5}, \quad n = 4, \quad z_0 = i$$

پس

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{(1+z^2)^5} dz &= \frac{2\pi i}{4!} \frac{d^4}{dz^4} (z+i)^{-5} \Big|_{z=i} = \frac{2\pi i}{4!} \frac{8!}{4!} (z+i)^{-9} \Big|_{z=i} \\ &= \frac{2\pi i \cdot 8!}{4!4!(2i)^9} = \frac{2\pi \cdot 8!}{4!4!2^9} = \frac{35\pi}{128}. \end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\oint_C \frac{1}{(1+z^2)^\delta} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{(1+x^2)^\delta} dx + \int_{C_R} \frac{1}{(1+z^2)^\delta} dz$$

9

$$\left| \int_{C_R} \frac{1}{(1+z^2)^\delta} dz \right| \leq \frac{1}{(R^2-1)^\delta} \cdot \pi R$$

پس وقتی که $R \rightarrow \infty$ ، $\int_{C_R} \frac{1}{(1+z^2)^\delta} dz \rightarrow 0$.

حال اگر در تساوی

$$\int_{-R}^R \frac{1}{(1+x^2)^\delta} dx + \int_{C_R} \frac{1}{(1+z^2)^\delta} dz = \frac{35\pi}{128}$$

 $R \rightarrow \infty$ به دست می‌آوریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^\delta} dx = \frac{35\pi}{128}.$$

مثال ۸.۴. مطلوبست محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$.

حل. برای این گونه انتگرال‌های ناسره منحنی C را مانند مثال قبل و $\oint_C \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$ را در نظر می‌گیریم. برای R ‌های بزرگ i در داخل C قرار می‌گیرد و فرمول انتگرال کشی برای انتگرال زیر قابل اعمال است.

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \oint_C \frac{e^{iz}}{z-i} dz = 2\pi i \frac{e^{-1}}{1i} = \frac{\pi}{e}.$$

از طرف دیگر

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \frac{\pi}{e}.$$

حال $R \rightarrow \infty$ در این صورت

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz \right| \leq \frac{e^{-R}}{R^2-1} \cdot \pi R \rightarrow 0.$$

پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e^2}$$

یا

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e^2}.$$

پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e^2}.$$

تذکر. اگر $\cos 2x$ را به $\cos 2z$ تبدیل می‌کردیم انتگرال روی C_R به صفر همگرا نمی‌شد.

از فرمول مشتق نامساوی زیر حاصل می‌گردد که به نامساوی کشی مشهور است.

خاصیت ۸.۴ (نامساوی کشی). فرض کنید $f(z)$ روی دایره $|z - z_0| = r$ و داخل آن تحلیلی است و روی این دایره داریم $|f(z)| \leq M$. آن‌گاه برای هر z_0 در داخل C و هر عدد طبیعی داریم.

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M.$$

علت. بنابر فرمول مشتق داریم:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

پس

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r.$$

یا

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M.$$

خاصیت ۹.۴ (قضیه لیوویل). هر تابع تام کران دار ثابت است.

علت. فرض کنید تابع f تام یا روی $\mathbb{C}$ تعریف شده و تحلیلی است. به علاوه دارای کران M است. یعنی برای هر $z \in \mathbb{C}$ داریم $|f(z)| \leq M$. حال اگر f را روی دایره $|z - z_0| = r$ در نظر بگیریم. طبق خاصیت قبلی برای z_0 در داخل این دایره داریم.

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}.$$

چون این نامساوی برای هر $r > 0$ برقرار است پس برای هر z_0 ، $|f'(z_0)| = 0$ یا $f'(z_0) = 0$ پس $f(z)$ ثابت است.

تذکره ۱. با استفاده از قضیه لیوویل می توان نشان داد هر چندجمله ای از درجه n حداقل یک ریشه و در نهایت نشان داد دارای n ریشه است.

۲. می توان نشان داد قدر مطلق هر تابع تحلیلی مقدار ماکزیمم خود را روی مرز دامنه به خود می گیرد.

۳. عکس قضیه انتگرال کشی نیز صحت دارد و به قضیه مرزا شهرت دارد.

۴. محاسبه انتگرال های حقیقی مشابه انتگرال هایی که در مثال ها آوردیم به صورت مشابه قابل محاسبه است لیکن ما دنبال محاسبه آسان تر هستیم. در بخش بعد سری ها را داریم و در بخش آخر تحت عنوان مانده، محاسبه این گونه انتگرال ها را بسیار ساده خواهیم کرد.

تمرین ۱.۴

۱. انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \int_i^1 z^{\sqrt{z}} e^{\sqrt{z}} dz & \text{(ج)} \\ \int_{-i}^i z^{\sqrt{z}} \sinh \sqrt{z} dz & \text{(د)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \int_{i+1}^{i-1} z e^{z^{\sqrt{z}}} dz & \text{(آ)} \\ \int_0^{\pi} z \cos^{\sqrt{z}} z dz & \text{(ب)} \end{array}$$

۲. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \oint_{|z-2i|=1} \frac{\sin z}{z^{\sqrt{z}} + \sqrt{z}} dz & \text{(ج)} \\ \oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^{\sqrt{z}}(z^{\sqrt{z}} + \lambda)} dz & \text{(د)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \oint_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z(z-2)^{\sqrt{z}}} dz & \text{(آ)} \\ \oint_{|z|=1} z^{-\sqrt{z}} (z^{\sqrt{z}} + z - 1)^{\sqrt{z}} dz & \text{(ب)} \end{array}$$

۳. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \oint_{|z|=1} (z^{\sqrt{z}} + 1) d|z| & \text{(ج)} \\ \oint_{|z|=1} (z^{\sqrt{z}} - 1) |dz| & \text{(د)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \oint_{|z|=\frac{\pi}{\sqrt{z}}} \sin \bar{z} dz & \text{(آ)} \\ \oint_{|z|=2} (z^{\sqrt{z}} + z + 1) d\bar{z} & \text{(ب)} \end{array}$$

۴. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \oint_{|z|=1} (z + \bar{z})^{\sqrt{z}} dz & \text{(ج)} \\ \oint_{|z-1|=1} \left(\frac{\bar{z}}{z-1}\right)^{\sqrt{z}} dz & \text{(د)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \oint_{|z|=2} \frac{1}{|z-1|^{\sqrt{z}}} dz & \text{(آ)} \\ \oint_{|z-2|=1} \frac{\text{Log } z}{z^{\sqrt{z}}} dz & \text{(ب)} \end{array}$$

۵. انتگرال‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \int_0^{2\pi} \sin^{\sqrt{z}} \theta d\theta & \text{(ج)} \\ \int_0^{\pi} \frac{\sin^{\sqrt{z}} \theta}{\sqrt{z} + \cos \theta} d\theta & \text{(د)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z} + \sin^{\sqrt{z}} \theta} d\theta & \text{(آ)} \\ \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta}{\sqrt{z} + \cos \theta} d\theta & \text{(ب)} \end{array}$$

۶. انتگرال‌های حقیقی زیر را حساب کنید.

$$\begin{array}{ll} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^{\sqrt{z}} + \sqrt{z}x + \sqrt{z})^{\sqrt{z}}} dx & \text{(ج)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^{\sqrt{z}} + x + 1} dx & \text{(د)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \int_0^{\infty} \frac{x^{\sqrt{z}} + 1}{(x^{\sqrt{z}} + \sqrt{z})^{\sqrt{z}}} dx & \text{(آ)} \\ \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^{\sqrt{z}} + 1)(x^{\sqrt{z}} + \sqrt{z})^{\sqrt{z}}} dx & \text{(ب)} \end{array}$$

۷. مطلوبست محاسبه انتگرال‌های ناسره زیر

$$\begin{aligned} \text{آ)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^3 x}{(x^2+1)^3} dx \\ \text{ب)} \quad & \int_0^{\infty} \frac{x \sin^2 x}{(1+x^2)(4+x^2)} dx \\ \text{ج)} \quad & \int_0^{\infty} \frac{x^2 \sin^2 x}{(4+x^2)^2} dx \\ \text{د)} \quad & \int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \end{aligned}$$

۲.۴ سری تیلر و سری لران

هدف از این بخش معرفی سری لران، بررسی خواص آن و استفاده از آن در محاسبه انتگرال‌های مختلط و به‌خصوص انتگرال‌های حقیقی است. برای این کار ضرورت دارد تا به بیان دنباله، سری، سری توانی و سری تیلر پردازیم و در انتها به سری لران برسیم.

حد دنباله: می‌گوییم حد دنباله مختلط $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ برابر z_0 است و می‌نویسیم $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z_0| = 0$. دنباله‌ای که همگرا نباشد را واگرا می‌گوییم.

مثال ۹.۴. حد دنباله $\left\{ \frac{in^2 + 2n - 4 + i}{(1+i)n^2 - in + 6} \right\}$ را بیابید.

حل. چنانچه i را یک پارامتر حقیقی منظور کنیم حد برابر $\frac{i}{i+1}$ می‌شود. حال آن را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{in^2 + 2n - 4 + i}{(1+i)n^2 - in + 6} - \frac{i}{i+1} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(1+2i)n - 9i - 5}{(1+i)n^2 - in + 6} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n-5)^2 + (2n-9)^2}{(n^2+6)^2 + (n^2-n)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n-5}{n^2+6}\right)^2 + \left(\frac{2n-9}{n^2+6}\right)^2}{1 + \left(\frac{n^2-n}{n^2+i}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

پس مقدار حد برابر $\frac{i}{i+1}$ است.

خاصیت ۱۰.۴. فرض کنید $z_n = x_n + iy_n$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ باشد آن گاه $z_n \rightarrow z_0$ اگر و فقط اگر $x_n \rightarrow x_0$ و $y_n \rightarrow y_0$.

علت. از نامساوی مثلث داریم:

$$|z_n - z_0| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$$

پس اگر $x_n \rightarrow x_0$ و $y_n \rightarrow y_0$ آن گاه $z_n \rightarrow z_0$
از طرف دیگر $|x_n - x_0| \leq |z_n - z_0|$ و $|y_n - y_0| \leq |z_n - z_0|$ پس اگر $z_n \rightarrow z_0$ آن گاه $x_n \rightarrow x_0$ و $y_n \rightarrow y_0$.

مثال ۴.۱۰. دنباله مثال قبلی را به صورت زیر می توان نوشت.

$$\frac{in^2 + 2n - 4 + i}{(1+i)n^2 - in + 6} = \frac{(2n-4)(n^2+6) + (n^2-n)(n^2+1)}{(n^2+6)^2 + (n^2-n)^2} + i \frac{(n^2+1)(n^2+6) - (2n-4)(n^2-n)}{(n^2+6)^2 + (n^2-n)^2}.$$

حال اگر $n \rightarrow \infty$ بعد از تقسیم صورت و مخرج طرف دوم بر n^4 و حدگیری از صورت و مخرج حد طرف دوم، به دست می آوریم $i\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ که برابر با $\frac{i}{1+i}$ همان حد قبلی است.

تذکر. کلیه قواعد و فرمول های حد دنباله های حقیقی برای دنباله های مختلط هم برقرار است.

مثال ۴.۱۱. دنباله مثال قبلی را به صورت زیر می توان نوشت.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{in^2 + 2n - 4 + i}{(1+i)n^2 - in + 6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i + \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{i}{n^2}}{1 + i - \frac{i}{n} + \frac{6}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(i + \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{i}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i - \frac{i}{n} + \frac{6}{n^2} \right)} = \frac{i}{1+i}.$$

حد سری: می گوئیم حد سری $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ یا مقدار آن برابر با s است اگر حد دنباله $s_n = \sum_{k=0}^n d_k$ که آن را مجموع جزئی این سری می نامیم برابر با s باشد.

خاصیت ۱۱.۴. فرض کنید $z_n = x_n + iy_n$ و $s = \alpha + i\beta$ است. $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = s$ اگر و فقط اگر $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \alpha$ و $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \beta$.

علت. بگیرید $s_n = \sum_{k=0}^n z_k$ ، $\alpha_n = \sum_{k=0}^n x_k$ و $\beta_n = \sum_{k=0}^n y_k$. در این صورت طبق خاصیت ۱۰.۴ $s_n = \alpha_n + i\beta_n$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \alpha + i\beta.$$

تذکره (۱) کلیه خواص، قواعد و فرمول‌های سری حقیقی برای مختلط هم برقرار است. مثلاً اگر $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ همگرا باشد آن‌گاه $z_n \rightarrow 0$. همچنین هر سری مطلقاً همگرا یک سری همگرا است.

(۲) سری که همگرا نباشد را واگرا گوئیم.

سری توانی: سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ را یک سری توانی به مرکز z_0 و ضرایب a_n گویند. خواص زیر در مورد سری توانی مختلط برقرار است که مشابه حقیقی است و علت آن‌ها نیز به صورت مشابه قابل بررسی است.

خاصیت ۱۲.۴. (۱) اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ برای z_1 همگرا باشد برای هر z با $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ نیز همگرا است.

(۲) اگر این سری برای z_2 واگرا باشد، این سری برای هر z با $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ واگرا است.

(۳) عددی مانند $0 \leq R \leq \infty$ موجود است به طوری که برای z با $|z - z_0| < R$ این سری همگرا و برای z با $|z - z_0| > R$ واگرا است. عدد R را شعاع همگرایی سری و دیسک $|z - z_0| < R$ را میدان همگرایی سری گویند.

(۴) شعاع همگرایی R از فرمول زیر که به فرمول هادامارد مشهور است قابل حصول است.

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (\text{در صورتی که این حد موجود باشد}).$$

- (۵) از سری توانی می‌توان جمله به جمله مشتق و انتگرال گرفت. یعنی اگر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ باشد آن گاه $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$ و $\int_{z_0}^z f(s) ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$.
- (۶) هر سری مطلقاً همگرا یک سری همگرا است.
- (۷) اگر سری فوق همگرا باشد آن گاه $a_n \rightarrow 0$.
- (۸) برای $|z| < 1$ ، $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. این سری را سری هندسی مختلط یا مختصراً سری هندسی گویند.

اکنون شرایط معرفی سری تیلر را داریم.

خاصیت ۱۳.۴ (بسط تیلر). فرض کنید تابع $f(z)$ روی دیسک $|z - z_0| < R$ تحلیلی باشد آن گاه روی این دیسک $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$.

علت. فرض کنید $0 < \rho < R$ یک عدد ثابت باشد. برای z_0 معین با $|z - z_0| < \rho$ و ξ با $|\xi - z_0| = \rho$ با توجه به سری هندسی می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}.$$

از ضرب طرفین تساوی در $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$ و انتگرال گیری روی $|\xi - z_0| = \rho$ با توجه به فرمول انتگرال کشی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

که در تساوی آخر از فرمول مشتق، خاصیت ۶.۴، استفاده شده است.

تذکره ۱. سری فوق را سری تیلر f حول نقطه z_0 یا بسط تیلر f حول نقطه z_0 گویند.

(۲) شعاع همگرایی سری تیلر برابر با فاصله z_0 تا نزدیکترین نقطه تکین (نقطه غیر تحلیلی) f تا z_0 است.

(۳) اگر $z_0 = 0$ سری تیلر را سری مک‌لورن گویند.

(۴) سری مک‌لورن توابع مقدماتی حقیقی به همان صورت برای توابع مقدماتی مختلط هم برقرار است.

(۵) برای محاسبه سری تیلر یک تابع حتی المقدور می‌بایستی از بسط مک‌لورن توابع مقدماتی و خواص سری‌های توانی استفاده نمود.

مثال ۱۲.۴. بسط مک‌لورن تابع $f(z) = z^2 e^{z^2}$ را به دست آورید.

حل. اگر بخواهیم با محاسبه مشتقات تابع این بسط را بنویسیم می‌شود گفت کاری طاقت‌فرسا و تقریباً ناممکن است. برای آن از تذکر فوق استفاده می‌کنیم. برای $w \in \mathbb{C}$ داریم:

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}.$$

پس این تساوی برای هر تابعی که به جای w قرار دهیم برقرار است. پس

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}.$$

حال طرفین تساوی را در z^2 ضرب کنیم:

$$f(z) = z^2 e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2(n+1)}}{n!} = z^2 + \frac{z^4}{1!} + \frac{z^6}{2!} + \dots.$$

مثال ۱۳.۴. سری مک‌لورن تابع $f(z) = \frac{z^2+1}{(z^2+1)^2}$ را به دست آورید.

حل. برای حل این مسئله از سری هندسی کمک می‌گیریم.

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \quad |w| < 1.$$

از طرفین مشتق بگیریم:

$$\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1}$$

حال در طرفین تساوی w را با $-z^4$ جایگزین کنید تا به دست آورید.

$$\frac{1}{(1+z^4)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{4(n-1)}.$$

در z^2 ضرب کنیم

$$\frac{z^2}{(1+z^4)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{4(n-1)+2}.$$

حال با سری قبلی جمع کنیم:

$$\frac{z^2 + 1}{(1+z^4)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{4(n-1)+2} + \sum_{n=1}^{\infty} n z^{4(n-1)}.$$

حال می‌بایستی دو سری را با هم جمع کنیم. ابتدا می‌بایستی با تغییر اندیس توان‌ها را یکسان کنیم تا به دست آوریم.

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{(1+z^4)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

که در آن

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} & n = 1, 3, 5, \dots, (2k+1), \dots \\ \frac{1}{2}n + 1 & n = 0, 2, 4, \dots, 2k, \dots \end{cases}$$

حال به معرفی سری لران می‌پردازیم که با سری مک‌لورن ارتباطی ندارد.

خاصیت ۱۴.۴ (بسط لران). فرض کنید z_0 یک نقطه تکین (نقطه غیر تحلیلی) $f(z)$ و f روی $R > 0$ برای $0 < |z - z_0| < R$ تحلیلی است. در این صورت برای هر z با $0 < |z - z_0| < R$ داریم:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

که در آن منحنی C عبارت است از $|z - z_0| = \frac{1}{2}R$.

علت. فرض کنید z نقطه‌ای معین از میدان $0 < |z - z_0| < R$ باشد. حال بگیرید $\rho = \frac{1}{2}(|z| + R)$. همچنین r را به قدری کوچک بگیرید تا دیسک $|z - \xi| \leq r$ در داخل میدان $0 < |z - z_0| < \rho$ قرار گیرد. همچنین ρ را هم به قدری کوچک انتخاب کنید تا دیسک $|z - z_0| \leq \rho$ در داخل $|z - z_0| < \rho$ و جدا از دیسک $|z - z_0| \leq r$ قرار گیرد. (به شکل ۵.۴ توجه کنید).

برای سادگی در نوشتن می‌گیریم:

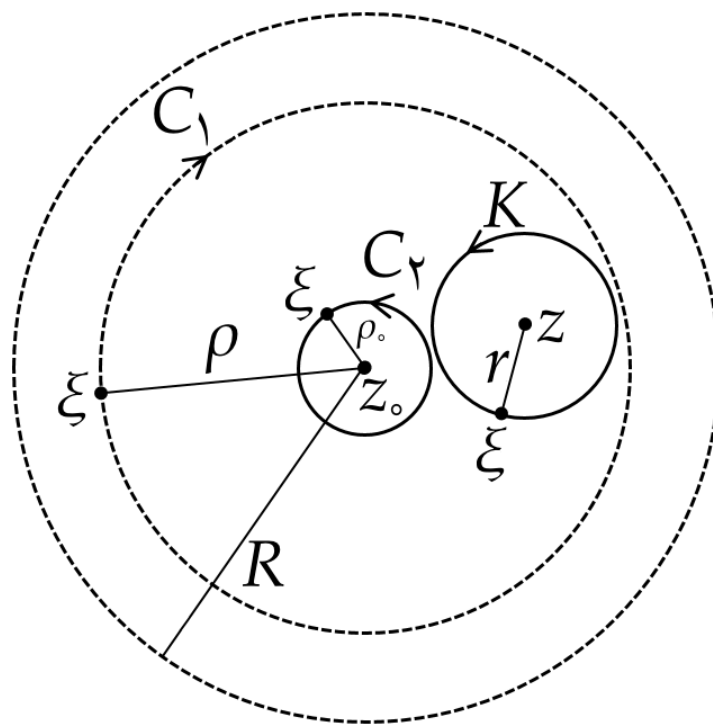
$$C_1 : |z - z_0| = \rho, \quad C_2 : |z - z_0| = \rho, \quad K : |z - z_0| = r$$

در این صورت تابع $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ برای متغیر ξ و z معین فوق روی منحنی‌های C_1 ، C_2 و K و همچنین بین آن‌ها تحلیلی است. پس

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \oint_K \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + 2\pi i f(z) \end{aligned}$$

یا

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$



شکل ۵.۴

برای $\xi \in C_1$ داریم:

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1$$

پس مشابه بسط تیلر برای $z \in C_1$ می‌نویسیم

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}.$$

از ضرب طرفین این تساوی در $\frac{f(\xi)}{2\pi i}$ و انتگرال‌گیری روی C_1 به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right] (z - z_0)^n.$$

برای $\xi \in C_2$ داریم:

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1$$

پس در این حالت

$$-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(z - z_0) - (\xi - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

از ضرب طرفین تساوی در $\frac{f(\xi)}{2\pi i}$ و انتگرال گیری روی C_2 به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n}} d\xi \right] (z - z_0)^{-n-1} \\ &= \sum_{m=-1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{m+1}} d\xi \right] (z - z_0)^m. \end{aligned}$$

که تساوی اخیر با تغییر اندیس $m = -n - 1$ یا $n + 1 = -m$ صورت گرفته است. به این ترتیب به دست می آوریم:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

که در آن

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = -1, -2, \dots \end{aligned}$$

چون بین $|\xi - z_0| \leq \rho$ و $|\xi - z_0| \leq \rho$ تابع $\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ تحلیلی است و $|\xi - z_0| = \frac{1}{\rho} R$ در این ناحیه قرار دارد. پس می توان دو فرمول فوق را برای a_n به یک فرمول زیر تقلیل داد.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

حال با تغییر متغیر ξ به z به دست می آوریم:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

و به این ترتیب اثبات کامل می گردد.

نکته. توجه کنید $f(\xi)$ در z_0 تحلیلی نیست پس $f^{(n)}(z_0)$ موجود نیست و a_n نمی تواند برابر $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ باشد.

تذکره ۱. سری فوق را سری لران f یا بسط لران f حول نقطه z_0 گویند.

۲. شعاع همگرایی این سری برابر با فاصله نقطه تکین z_0 تا نزدیک ترین نقطه تکین دیگر تابع f به این نقطه است.

۳. محاسبه ضرایب a_n با استفاده از فرمول های فوق پیچیده است و هدف از بسط لران این است که این بسط را از طریق دیگر محاسبه کنیم و با استفاده از آنها این ضرایب را که انتگرال های مختلط است معین کنیم.

۴. محاسبه سری لران همانند سری تیلر با استفاده از بسط مک لورن توابع مقدماتی و خواص بخصوص سری های توانی مقدور است.

مثال ۱۴.۴. بسط لران تابع $f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}}$ را حول نقطه تکین آن به دست آورید. همچنین $\oint_{|z|=1} z^5 e^{\frac{1}{z}} dz$ را نیز محاسبه کنید.

حل. برای حل این مسئله از بسط مک لورن $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ استفاده می کنیم. در این صورت

$$f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}} = z^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{5-n}$$

چون از سری توانی می توان جمله به جمله انتگرال گرفت، پس

$$\oint_{|z|=1} z^5 e^{\frac{1}{z}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \oint_{|z|=1} z^{5-n} dz = \frac{2\pi i}{1!}.$$

تساوی آخر با استفاده از خاصیت ۵.۴ بیان شده است.

نکته. محاسبه این انتگرال با استفاده از فرمول انتگرال کشی یا فرمول مشتق میسر نبود، لیکن با تغییر متغیر $w = \frac{1}{z}$ به دست می آوریم.

$$\oint_{|z|=1} z^5 e^{\frac{1}{z}} dz = + \oint_{|w|=1} \frac{e^w}{w^6} dw = \frac{2\pi i}{6!} \cdot \left. \frac{d^6 e^w}{dw^6} \right|_{w=0} = \frac{2\pi i}{6!}.$$

خاصیت ۱۵.۴. فرض کنید z_0 یک نقطه تکین $f(z)$ و $f(z)$ روی ناحیه $|z - z_0| \leq R$ تحلیلی باشد. در این صورت:

$$\oint_{|z-z_0|=R} f(z) dz = 2\pi i \cdot a_{-1}$$

علت. روی این ناحیه بسط لران $f(z)$ را به صورت زیر داریم.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

حال از طرفین روی $|z - z_0| = R$ انتگرال بگیرید تا با توجه به خاصیت ۵.۴ به دست آورید:

$$\oint_{|z-z_0|=R} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$$

تذکره. توجه کنید طبق این خاصیت کلیه ضرایب a_n در بسط لران f حول نقطه z_0 غیر از a_{-1} در مقدار انتگرال فوق بی اثراند و تنها اثر a_{-1} در این محاسبه ماندگار است. با توجه به این مطلب تعریف زیر اهمیت خاص دارد.

تعریف ۱.۴ (مانده). ضریب a_{-1} را در بسط لران f حول نقطه z_0 مانده f در z_0 گویند و با $\text{Res}(f, z_0)$ نشان می دهند.

مثال ۱۵.۴. مطلوبست محاسبه $\int_0^{2\pi} e^{\gamma \cos \theta} d\theta$.

حل. از قرار دادن $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ و تغییر متغیر $z = e^{i\theta}$ به دست می آوریم.

$$\int_0^{2\pi} e^{i \cos \theta} d\theta = \oint_{|z|=1} e^{z + \frac{1}{z}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} e^{z + \frac{1}{z}} dz = 2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z} e^{z + \frac{1}{z}}, 0\right).$$

برای محاسبه این مانده می بایستی ضریب $\frac{1}{z}$ را در بسط لران این تابع به دست آورد. این ضریب برابر با ضریب مقدار ثابت یا ضریب z^0 در بسط لران $e^{z + \frac{1}{z}}$ است. آن را به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} e^{z + \frac{1}{z}} &= e^z \cdot e^{\frac{1}{z}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{-m}}{m!} \right) \\ &= \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \right) \left(1 + \frac{z^{-1}}{1!} + \frac{z^{-2}}{2!} + \cdots \right). \end{aligned}$$

پس برای هر $n = m$ یک جمله z^0 داریم. در نتیجه $a_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$ و

$$\int_0^{2\pi} e^{i \cos \theta} d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}.$$

نکته. توجه کنید محاسبه انتگرال مثال فوق با استفاده از فرمول مشتق نیز مقدور است.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{i \cos \theta} d\theta &= \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} e^{z + \frac{1}{z}} dz = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} e^z e^{\frac{1}{z}} dz \\ &= \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \right) dz = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz \\ &= \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{2\pi i}{n!} = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}. \end{aligned}$$

تمرین ۲.۴

۱. بسط مک لورن توابع زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} f(z) = \frac{1}{(1+z)^4} & \text{(ج)} \\ f(z) = \frac{1}{(1+z)^4} & \text{(آ)} \\ f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3} & \text{(د)} \\ f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} & \text{(ب)} \end{array}$$

۲. بسط مک‌لورن توابع زیر را بنویسید.

$$\begin{array}{ll} f(z) = \sin^2 z^2 & \text{(ج)} \\ f(z) = e^z \sin z & \text{(آ)} \\ f(z) = \int_0^z \sin t^2 dt & \text{(د)} \\ f(z) = e^{z^2+z} & \text{(ب)} \end{array}$$

۳. بسط تیلر توابع زیر را حول $z_0 = 1$ به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} f(z) = z^2 e^z & \text{(ج)} \\ f(z) = \frac{1}{z^2} & \text{(آ)} \\ f(z) = \frac{z^2+z+1}{z^3+z^2-z} & \text{(د)} \\ f(z) = e^{z^2} & \text{(ب)} \end{array}$$

۴. بسط لران توابع زیر را حول مبدأ مختصات به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} f(z) = \frac{z^2+1}{(z^2-z)^2} & \text{(ج)} \\ f(z) = \frac{1}{z^2(1+z^2)} & \text{(آ)} \\ f(z) = \frac{z^2+z}{z^2-z} & \text{(د)} \\ f(z) = \frac{z^2+1}{z^3+z^2} & \text{(ب)} \end{array}$$

۵. بسط لران توابع زیر را حول مبدأ مختصات به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} f(z) = z^2 \tan \frac{1}{z} & \text{(ج)} \\ f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z^2} & \text{(آ)} \\ f(z) = \coth z & \text{(د)} \\ f(z) = e^z \cos \frac{1}{z} & \text{(ب)} \end{array}$$

۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \int_0^{2\pi} e^{2 \sin \theta} d\theta & \text{(ج)} \\ \oint_{|z|=1} z^2 \tan \frac{1}{z} dz & \text{(آ)} \\ \int_0^{2\pi} \sin(\cos \theta) d\theta & \text{(د)} \\ \oint_{|z|=1} e^z dz & \text{(ب)} \end{array}$$

۳.۴ مانده و انتگرال‌های حقیقی

در بخش گذشته با استفاده از بسط لران تابع f حول نقطه تکین z_0 یعنی

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad 0 < |z-z_0| < R$$

مانده f در نقطه z_0 را تعریف کردیم و با $\text{Res}(f, z_0)$ نشان دادیم که برابر a_{-1} در بسط فوق است. همچنین نشان دادیم اگر $0 < r < R$ باشد در این صورت

$$\oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_0) = 2\pi i a_{-1}$$

پس برای محاسبه این گونه انتگرال‌ها نیاز به محاسبه کامل سری لران نیست. فقط کافیست a_{-1} یا مانده را به دست آوریم. هدف از این بخش این است که روش‌هایی را برای محاسبه مانده ارائه دهیم. همچنین در بخش‌های گذشته دیدیم که با تبدیل انتگرال‌های حقیقی به انتگرال‌های مختلط محاسبه این گونه انتگرال‌ها مقدور است. هدف دیگر این بخش این است که مقدار این گونه انتگرال‌های حقیقی را بر حسب مانده بیان کنیم. خواهیم دید با انجام این دو کار محاسبه این گونه انتگرال‌ها تا حد عملیات چهار عمل اصلی حساب تقلیل می‌یابد. در ابتدا قضیه مانده را داریم که محاسبه انتگرال‌های مختلط را آسان می‌کند.

خاصیت ۱۶.۴ (قضیه مانده). فرض کنید C یک منحنی جردن و z_1 تا z_n ، n نقطه در داخل آن و تابع $f(z)$ روی و داخل به جز در نقاط z_0 تا z_n که نقاط تکین f هستند تحلیلی است. آن گاه

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

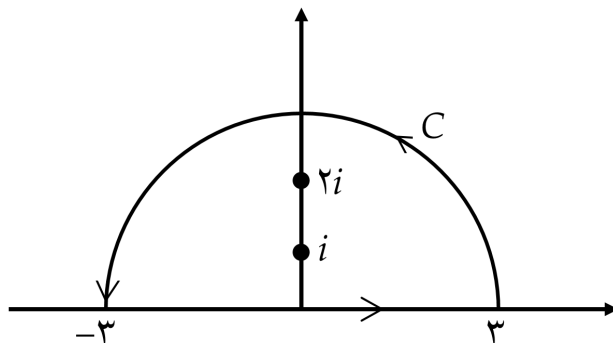
علت. دایره‌های C_k به مرکز z_k و شعاع r_k کوچک، $k = 1, 2, \dots, n$ ، را طوری انتخاب کنید تا این n دیسک در داخل C و کاملاً جدا از هم باشند. در این صورت طبق خاصیت

۳.۴ می‌توان نوشت:

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

که تساوی اخیر را با توجه به خاصیت ۱۵.۴ نوشته‌ایم.

مثال ۱۶.۴. مطلوبست محاسبه انتگرال $\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} dz$ که در آن C منحنی زیر است.



شکل ۶.۴

حل. نقاط تکین تابع در داخل C عبارتند از i و $2i$. پس طبق قضیه مانده

$$\oint_C \frac{1}{(1+z^2)(4+z^2)} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 2i)).$$

محاسبه سری لوران تابع $\frac{1}{(1+z^2)(4+z^2)}$ حول نقطه i و $2i$ چندان ساده نیست. برای محاسبه انتگرال ابتدا تغییراتی در انتگرال می‌دهیم.

$$\frac{1}{(1+z^2)(4+z^2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{4+z^2}.$$

پس

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{(1+z^2)(4+z^2)} dz &= \frac{1}{3} \oint_{|z-i|=1} \frac{1}{1+z^2} dz - \frac{1}{3} \oint_{|z-2i|=1} \frac{1}{4+z^2} dz \\ &= \frac{2\pi i}{3} \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right) - \frac{2\pi i}{3} \text{Res}\left(\frac{1}{4+z^2}, 2i\right). \end{aligned}$$

محاسبه سری لران برای این دو تابع آسان تر است.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z-i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} (z-i)^{n-1}.\end{aligned}$$

پس

$$\operatorname{Res} \left(\frac{1}{1+z^2}, i \right) = \frac{1}{2i}.$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{4+z^2} &= \frac{1}{z-2i} \cdot \frac{1}{z+2i} = \frac{1}{z-2i} \cdot \frac{1}{(z-2i)+4i} = \frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{z-2i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2i}{4i}} \\ &= \frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{z-2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2i}{4i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4i)^{n+1}} (z-2i)^{n-1}.\end{aligned}$$

پس

$$\operatorname{Res} \left(\frac{1}{4+z^2}, 2i \right) = \frac{1}{4i}.$$

به این ترتیب به دست می آوریم.

$$\oint_C \frac{1}{(1+z^2)(4+z^2)} dz = \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{2i} - \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

نکته. توجه کنید این انتگرال با استفاده از فرمول انتگرال کشی به مراتب آسان تر قابل

محاسبه است. چون

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{(1+z^2)(4+z^2)} dz &= \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}}{z-i} dz + \oint_{|z-2i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{(z^2+1)(z+2i)}}{z-2i} dz \\ &= \frac{2\pi i}{(z+i)(z^2+4)} \Big|_{z=i} + \frac{2\pi i}{(z^2+1)(z+2i)} \Big|_{z=2i} \\ &= \frac{2\pi i}{6i} + \frac{2\pi i}{-12i} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

لیکن با روش محاسبه مانده که در زیر می‌آید حل این مسئله با استفاده از مانده آسان‌تر می‌شود.

قطب مرتبه m : اگر در بسط لران f حول نقطه تکین z_0 برای $m > 0$ ، $a_{-m} \neq 0$ و $a_n = 0$ برای $n < -m$. در این صورت z_0 را یک قطب از مرتبه m تابع f گویند. قطب مرتبه اول را قطب ساده گویند. در این حالت بسط لران f را حول z_0 به صورت زیر داریم.

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

تکین اساسی: اگر نقطه z_0 یک نقطه تکین غیر قطب باشد آن را نقطه تکین اساسی گویند.

محاسبه مانده با استفاده از خاصیتی که در زیر می‌آید، آسان می‌شود. قبل از آن خاصیت زیر را برای تشخیص قطب مرتبه m داریم.

خاصیت ۱۷.۴. فرض کنید $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ، $p(z)$ و $q(z)$ توابعی تحلیلی، $p(z_0) \neq 0$ و $q(z_0) = 0$ ، $q'(z_0) = 0$ تا $q^{(m-1)}(z_0) = 0$ و $q^{(m)}(z_0) \neq 0$. آن گاه z_0 یک ریشه از مرتبه m از $q(z)$ و یک قطب از مرتبه m از $f(z)$ است.

علت. تابع تحلیلی $q(z)$ در همسایگی نقطه z_0 دارای بسط تیلر زیر است.

$$\begin{aligned} q(z) &= a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + a_{m+2}(z - z_0)^{m+2} + \cdots \\ &= (z - z_0)^m \left[a_m + a_{m+1}(z - z_0) + a_{m+2}(z - z_0)^2 + \cdots \right] \end{aligned}$$

پس

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot \frac{p(z)}{a_m + a_{m+1}(z - z_0) + a_{m+2}(z - z_0)^2 + \cdots} = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

که در آن $g(z)$ در z_0 تابعی تحلیلی با $g(z) = \frac{p(z_0)}{a_m}$ می‌باشد. پس

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \left(\frac{p(z_0)}{a_m} + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \cdots \right).$$

پس z_0 یک قطب از مرتبه m است.

نتیجه ۱۸.۴. اگر در فوق $q(z)$ یک چندجمله‌ای و دارای فاکتور $(z - z_0)^m$ باشد. در این صورت z_0 یک قطب از مرتبه m است.

خاصیت ۱۹.۴ (محاسبه مانده). فرض کنید z_0 یک قطب تابع f است.
(۱) اگر z_0 قطبی ساده باشد آن گاه

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

(۲) اگر $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ، $p(z)$ و $q(z)$ تحلیلی و $p(z_0) \neq 0$ و $q(z_0) = 0$ و $q'(z_0) \neq 0$ باشد آن گاه

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

(۳) اگر z_0 یک قطب از مرتبه m باشد

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z).$$

علت. (۱) اگر z_0 قطب ساده باشد بسط لران f در z_0 به صورت زیر است:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

پس

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

(۲) اگر $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ و z_0 قطب ساده باشد در این صورت

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{p(z)}{q'(z_0) + q''(z_0) \frac{(z - z_0)}{2!} + \dots}$$

پس

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

۳) اگر z_0 یک قطب از مرتبه m باشد. بسط لران f حول z_0 عبارتست از

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

از ضرب طرفین این تساوی در $(z - z_0)^m$ به دست می آوریم:

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m}.$$

با $(m-1)$ بار مشتق گیری به دست می آوریم:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) = (m-1)! a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!} a_n (z - z_0)^{n+1}$$

حال اگر $z \rightarrow z_0$ نتیجه مطلوب به دست می آید.

تذکره. اگر z_0 یک نقطه تکین اساسی باشد مانده فقط با بسط لران قابل تعیین است.

مثال ۱۷.۴. مطلوبست محاسبه انتگرال مثال ۱۶.۴.

حل. داریم $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ و i و $2i$ نقاط تکین داخل C هستند. چون

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)}$$

هر دو قطب ساده اند. در نتیجه طبق (۱) خاصیت فوق

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{(z+i)(z^2+4)} \Big|_{z=i} = \frac{1}{6i}$$

$$\text{Res}(f, 2i) = \frac{1}{(z^2+1)(z+2i)} \Big|_{z=2i} = -\frac{1}{12i}.$$

پس طبق قضیه مانده

$$\oint_C \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

مثال ۱۸.۴. مطلوبست محاسبه $\oint_{|z|=1} \frac{z+1}{z \sin z} dz$.

حل. تنها نقطه تکین تابع زیر انتگرال فقط نقطه $z_0 = 0$ است. همچنین $z = 0$ یک ریشه مرتبه اول $\sin z$ است. پس $z_0 = 0$ یک قطب مرتبه دوم است.

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{z+1}{z \sin z} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{z+1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \dots} \quad (\text{به جای سینوس بسط مک لورن قرار می دهیم}) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 \cdot (1 - \frac{z^2}{3!} + \dots) - (-\frac{2}{3}z + \dots)(z+1)}{(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots)^2} = 1. \end{aligned}$$

پس

$$\oint_{|z|=1} \frac{z+1}{z \sin z} dz = 2\pi i.$$

مثال ۱۹.۴. انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\oint_{|z|=1} z^6 \sin \bar{z} dz$$

حل. چون روی دایره $|z|=1$ داریم $z\bar{z}=1$ پس روی مسیر انتگرال گیری $\bar{z} = \frac{1}{z}$ و

$$\oint_{|z|=1} z^6 \sin \bar{z} dz = \oint_{|z|=1} z^6 \sin \frac{1}{z} dz.$$

نقطه $z_0 = 0$ تنها نقطه تکین تابع در داخل $|z| = 1$ است و یک نقطه تکین اساسی است. پس برای تعیین مانده می‌بایستی از بسط لران استفاده کنیم. داریم:

$$\sin w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1}$$

پس

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}}.$$

در نتیجه

$$z^{\ell} \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-2n+\ell}.$$

مانده برابر با ضریب a_{-1} است که برای $n = 3$ به دست می‌آید.

$$\operatorname{Res} \left(z^{\ell} \sin \frac{1}{z}, 0 \right) = \frac{(-1)^3}{7!} = \frac{-1}{7!}.$$

در نتیجه:

$$\oint_{|z|=1} z^{\ell} \sin \bar{z} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(z^{\ell} \sin \frac{1}{z}, 0 \right) = -\frac{2\pi i}{7!}.$$

اکنون به بیان محاسبه انتگرال‌های حقیقی با استفاده از مانده می‌پردازیم.

خاصیت ۲۰.۴. فرض کنید $Q(x, y)$ تابعی دو متغیره حقیقی همواری باشد که روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ پیوسته است. اگر

$$f(z) = \frac{1}{iz} Q\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

باشد، آن گاه

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k)$$

که در آن z_1 تا z_k نقاط تکین f در داخل دایره واحد است.

علت. از قرار دادن

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

در انتگرال فوق داریم:

$$\int_0^{2\pi} Q\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) d\theta = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta.$$

حال بگیریم $z = e^{i\theta}$ در این صورت $dz = ie^{i\theta} d\theta$ و

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

که z_k ها نقاط تکین f در داخل دایره واحدند.

مثال ۲۰.۴. مطلوبست محاسبه

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{2 + \sin \theta} d\theta.$$

حل.

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{ie^{i\theta}} \cdot \frac{\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2}{2 + \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 2}{4ie^{i\theta} + e^{2i\theta} - 1}.$$

پس

$$f(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{z^2 + z^{-2} - 2}{z^2 + 4iz - 1} = -\frac{1}{2z^2} \cdot \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2 + 4iz - 1}.$$

نقاط تکین f عبارتند از $z = 0$ و $z = -2i \pm \sqrt{3}i$. پس دو نقطه تکین $z = 0$ و $z = \sqrt{3}i - 2i$ در داخل دیسک واحد قرار دارند. نقطه تکین $z = 0$ قطب مرتبه دو است.

پس

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{-2z^2 - 4iz + 2} \Big|_{z=0} = -\frac{4i}{-2} = -2i.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, (\sqrt{3}-2)i) &= -\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{2z(z^2 + 4iz - 1) + z^2(2z + 4i)} \Big|_{z=(\sqrt{3}-2)i} \\ &= -\frac{(\sqrt{3}-2)^4 + 2(\sqrt{3}-2)^2 + 1}{-2(\sqrt{3}-2)^2(2\sqrt{3}i - 2i + 4i)} = \frac{112 - 64\sqrt{3}}{i(6\sqrt{3} - 10)}.\end{aligned}$$

بدین ترتیب به دست می‌آوریم.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{2 + \sin \theta} d\theta = 2\pi i \left(-2i - i \frac{-64\sqrt{3} + 112}{6\sqrt{3} - 10} \right) = 2\pi \left(2 + \frac{112 - 64\sqrt{3}}{6\sqrt{3} - 10} \right).$$

خاصیت ۲۱.۴. فرض کنید $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ یک تابع کسری باشد، یعنی $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای اند به طوری که $q(x)$ فاقد ریشه حقیقی و درجه $q(x)$ حداقل دوتا بیشتر از درجه $p(x)$ باشد. آن گاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k)$$

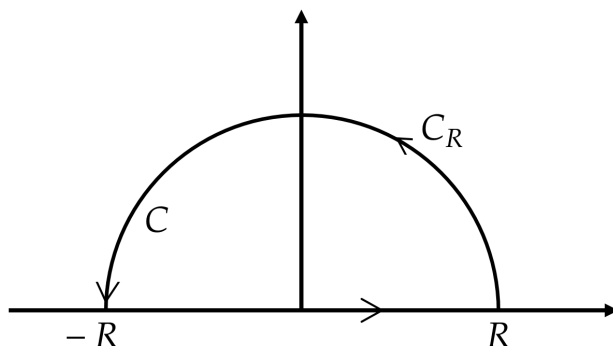
که در آن z_1 تا z_n قطب‌های f در نیم‌صفحه بالایی است.

علت. انتگرال $\oint_C f(z) dz$ روی منحنی C در شکل ۷.۴ که R بسیار بزرگ است تا تمام نقاط تکین در نیم‌صفحه بالایی f در داخل C قرار گیرد را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k).$$

از طرف دیگر

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz.$$



شکل ۷.۴

لیکن اعداد مثبت M و N موجود است به طوری که برای R بزرگ داریم:

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^2 - N} \cdot \pi R$$

پس $\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0$ وقتی که $R \rightarrow \infty$. از فوق داریم:

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

حال اگر $R \rightarrow \infty$ به دست می آوریم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

مثال ۲۱.۴. مطلوبست محاسبه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} dx.$$

حل. داریم:

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)}.$$

نقاط قطب عبارتند از $\pm i$ و i و $2i$ در نیم‌صفحه بالایی قرار دارند. شرایط خاصیت فوق برقرار است. پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} dx = 2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 2i)).$$

قطب $z_0 = 2i$ یک قطب ساده است. پس

$$\text{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} = \frac{(2i)^2 - 1}{((2i)^2 + 1)^2(2i + 2i)} = \frac{-5}{36i}.$$

قطب i از مرتبه دو است و

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{z^2 - 1}{(z + i)^2(z^2 + 4)} \\ &= \frac{2i(-4 \cdot 3) - [4i \cdot 3 + 2i(-4)](-2)}{16 \cdot 9} = -\frac{i}{9}. \end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} dx = 2\pi i \left(-\frac{i}{9} + \frac{5i}{36} \right) = -\frac{\pi}{18}.$$

خاصیت ۲۲.۴. فرض کنید $f(z)$ تابع خاصیت ۲۱.۴ و $a > 0$ عددی ثابت باشد. آن‌گاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z) e^{iaz}, z_k)$$

که در آن z_1 تا z_n قطب‌های f در نیم‌صفحه بالایی است.

علت. منحنی C را همان منحنی شکل ۷.۴ در نظر بگیرید. در این صورت

$$\oint_C f(z) e^{iaz} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z) e^{iaz}, z_k).$$

از طرف دیگر

$$\oint_C f(z)e^{iaz} dz = \int_{-R}^R f(x)e^{iax} dx + \int_{C_R} f(z)e^{iaz} dz.$$

همچنین اعداد مثبت M و N موجود است به طوری که

$$\left| \int_{C_R} f(z)e^{iaz} dz \right| \leq \frac{M}{R^\gamma - N} \max_{y \in [0, R]} e^{-ay} \cdot \pi R \leq \frac{M}{R^\gamma - N} \cdot \pi R.$$

پس $\int_{C_R} f(z)e^{iaz} dz \rightarrow 0$ وقتی که R به سمت بینهایت برود. حال اگر در تساوی زیر که در فوق به دست آمده است $R \rightarrow \infty$ نتیجه مطلوب حاصل می شود.

$$\int_{-R}^R f(x)e^{iax} dx + \int_{C_R} f(z)e^{iaz} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z)e^{iaz}, z_k).$$

تذکره ۱) برای این خاصیت اگر درجه مخرج کسر $f(x)$ حداقل یکی بیشتر از درجه صورت باشد باز هم نتیجه برقرار است.

۲) با توجه به این که $e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$ است پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax dx = \Re \left\{ 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z)e^{iaz}, z_k) \right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ax dx = \Im \left\{ 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z)e^{iaz}, z_k) \right\}.$$

به این ترتیب محاسبه این گونه انتگرال ها مقدور است.

مثال ۲۲.۴. مطلوبست محاسبه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)^2} dx.$$

حل. با توجه به مطالب فوق می بایستی $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{(1+x^2)^2} dx$ را محاسبه کنیم. زیرا قسمت موهومی جواب این انتگرال جواب انتگرال فوق است. طبق خاصیت ۲۲.۴،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} \left(\frac{z e^{iz}}{(1+z^2)^2}, z_k \right).$$

تنها قطب این تابع در نیم صفحه بالائی $z_0 = i$ و قطب مرتبه دو است.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{z e^{iz}}{(1+z^2)^2}, i \right) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{z e^{iz}}{(z+i)^2} \\ &= \frac{e^{-1}(2i)^2 - e^{-1}(2i)^2 - 2 \cdot 2i \cdot i e^{-1}}{(2i)^2} = -e^{-1}. \end{aligned}$$

پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)^2} dx = -2\pi e^{-1}.$$

تذکر. چنانچه C یک منحنی جردن هموار و z_0 قطب ساده $f(z)$ بر روی منحنی C قرار داشته باشد در این صورت اثر این قطب در انتگرال روی منحنی جردن C نصف می گردد.

مثال ۲۳.۴. مطلوبست محاسبه

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z(z-1)} dz.$$

حل. تابع زیر انتگرال دارای دو قطب ساده $z_0 = 0$ و $z_1 = 1$ است. قطب $z_0 = 0$ در داخل منحنی $|z|=1$ و قطب $z_1 = 1$ در روی C قرار دارد. پس

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z(z-1)} dz &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z(z-1)}, 0 \right) + \pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z(z-1)}, 1 \right) \\ &= 2\pi i(-1) + \pi i(1) = -\pi i. \end{aligned}$$

مثال ۲۴.۴. مطلوبست محاسبه

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

حل. برای محاسبه این انتگرال، انتگرال $\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz$ را که منحنی C به صورت شکل ۷.۴ است در نظر بگیرید. با توجه به تذکر فوق و این که $z = 0$ یک قطب ساده است، داریم:

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = \pi i.$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_{-R}^0 \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_0^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \\ &= - \int_0^R \frac{e^{-ix}}{x} dx + \int_0^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz. \end{aligned}$$

که انتگرال اولی به کمک تغییر متغیر $-x \rightarrow x$ از انتگرال $\int_{-R}^0 \frac{e^{ix}}{x} dx$ به دست می آید.

پس

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 2i \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i.$$

حال اگر $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$ باشد، به دست می آوریم:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

حال نشان می دهیم $\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow 0$ وقتی که $R \rightarrow \infty$.

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iR \cos t} \cdot e^{-R \sin t}}{Re^{it}} R i e^{it} dt = i \int_0^{\pi} e^{iR \cos t} \cdot e^{-R \sin t} dt.$$

می دانیم برای $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ عددی مانند $a > 0$ موجود است به طوری که $\sin t \geq at$. پس

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_0^{\pi} e^{-R \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rat} dt = \frac{2}{aR} \left(1 - e^{-\frac{\pi}{2} aR} \right).$$

بنابراین $\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow 0$ وقتی که $R \rightarrow \infty$.

تمرین ۳.۴

۱. نوع هر یک از نقاط تکین هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

$$f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z-1} \quad (\text{ج}) \quad f(z) = \frac{z+2}{z^2(z-2)^2} \quad (\text{آ})$$

$$f(z) = z^{-2}(\sin z^2)^{-1} \quad (\text{د}) \quad f(z) = \frac{1}{(e^z-1)z^2} \quad (\text{ب})$$

۲. مانده‌های هر یک از توابع زیر را در هر یک از نقاط تکین آن محاسبه کنید.

$$f(z) = e^{z+\frac{1}{z}} \quad (\text{ج}) \quad f(z) = \frac{(1-z^2)e^{2z}}{z^2} \quad (\text{آ})$$

$$f(z) = \frac{z^2+1}{e^z \sin z} \quad (\text{د}) \quad f(z) = \frac{\tan z}{(z-\frac{\pi}{4})^2 z} \quad (\text{ب})$$

۳. انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$\oint_{|z|=\frac{5}{4}} e^z \tan z \, dz \quad (\text{ج}) \quad \oint_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{\cot z}{1+z+z^2} \, dz \quad (\text{آ})$$

$$\oint_{|z|=\frac{\pi}{4}} \frac{(z+1) \sin z}{z^3} \, dz \quad (\text{د}) \quad \oint_{|z|=5\pi} \tan z \, dz \quad (\text{ب})$$

۴. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\oint_{|z|=2} z \sin \frac{1}{z} d\bar{z} \quad (\text{ج}) \quad \oint_{|z|=1} \frac{iz+1}{(z^2+1)^2(z+2i)} \, dz \quad (\text{آ})$$

$$\oint_{|z|=1} \bar{z} \tan z \, d\bar{z} \quad (\text{د}) \quad \oint_{|z|=1} \bar{z} \cos \frac{1}{z} \, dz \quad (\text{ب})$$

۵. انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$\oint_{|z|=1} e^y dx \quad (\text{ج}) \quad \oint_{|z|=1} e^{xy} dz \quad (\bar{\text{آ}})$$

$$\oint_{|z|=1} \cot \bar{z} dy \quad (\text{د}) \quad \oint_{|z|=1} \sin \frac{1}{z} dx \quad (\text{ب})$$

۶. انتگرال‌های حقیقی زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta \quad (\text{ج}) \quad \int_0^\pi \frac{1}{4 + \cos^2 \theta} d\theta \quad (\bar{\text{آ}})$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta + \cos \theta}{3 + \cos^2 \theta} d\theta \quad (\text{د}) \quad \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{3 + \sin \theta} d\theta \quad (\text{ب})$$

۷. انتگرال‌های حقیقی زیر را به دست آورید.

$$\int_0^\infty \frac{x^4}{1+x^8} dx \quad (\text{ج}) \quad \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+4)^2} dx \quad (\bar{\text{آ}})$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^4)^2} dx \quad (\text{د}) \quad \int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4} dx \quad (\text{ب})$$

۸. مطلوبست محاسبه

$$\int_0^\infty \frac{x \sin 4x}{(4+x^2)^2} dx \quad (\text{ج}) \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2} dx \quad (\bar{\text{آ}})$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^4} dx \quad (\text{د}) \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin 3x}{1+x^4} dx \quad (\text{ب})$$

۹. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^\pi \cos^{2n} x dx \quad (\text{ج}) \quad \int_0^\pi \sin^{2n} x dx \quad (\bar{\text{آ}})$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin \theta} d\theta \quad (\text{د}) \quad \int_0^\pi \frac{1}{1 + \sin^2 t} dt \quad (\text{ب})$$

۴.۴ اصل آوند و قضیه روشه

در این بخش به دو کاربرد اساسی انتگرال مختلط می‌پردازیم. در بسیاری از شاخه‌های علوم مهندسی از جمله مهندسی کنترل تعیین موقعیت قرارگیری صفرها و قطب‌های

توابع در صفحه اعداد مختلط اطلاعات مهمی را آشکار می‌سازد. اصل آوند که در ادامه می‌آید، در این زمینه می‌باشد و می‌توان از آن برای یافتن کارآمد صفر یا قطب توابع مختلط استفاده کرد. در عمل این کار به کمک رایانه صورت می‌گیرد. حتی با خطاهای گرد کردن که در محاسبات عددی اجتناب ناپذیر است، نتیجه عبارت زیر

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

که طبق اصل آوند تفاضل تعداد صفرها و قطب‌های تابع f را درون منحنی C با احتساب تکرار نمایش می‌دهد، نزدیک یک عدد صحیح خواهد بود. با تعیین این عدد صحیح برای منحنی‌های مختلف C می‌توان اطلاعات مربوط به محل صفرها و قطب‌ها را به دست آورد. نخستین بار آگوستین-لوئیس کشی در سال ۱۸۳۱ به دور از زادگاه خود فرانسه در جریان تبعیدش در تورین، نسخه‌ای مشابه از قضیه فوق را ارائه کرد. با این حال قضیه او برای توابع فاقد قطب بود و فقط صفرهای توابع را شمارش می‌کرد. این قضیه به دلیل دست‌نویس بودن، ناخوانا بود. کشی در سال ۱۸۵۵، دو سال قبل از مرگش، مقاله دیگری اما این بار با بحث در مورد هر دو صفر و قطب منتشر کرد. نهایتاً در انتهای این بخش قضیه روشه که نتیجه‌ای از اصل آوند است و تعیین موقعیت و تعداد صفرهای توابع را راحت‌تر ممکن می‌سازد بیان می‌داریم.

خاصیت ۲۳.۴ (اصل آوند). فرض کنید f درون و روی منحنی جردن C به جز احتمالاً تعدادی منتهای قطب درون C تحلیلی و f روی C غیر صفر و درون C تعدادی منتهای صفر داشته باشد. آن گاه داریم:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

که در آن N و P با احتساب تکرار به ترتیب تعداد صفرها و قطب‌های f در درون C است.

علت. فرض کنید z_1 تا z_n صفرهای f درون خم C به ترتیب از مرتبه k_1 تا k_n باشند. پس $\sum_{i=1}^n k_i = N$. در همسایگی از z_i به صورت $|z - z_i| < \rho_i$ که داخل C قرار دارد و f روی آن تحلیلی است و داخل آن صفری جز z_i وجود ندارد، می‌توان نوشت:

$$f(z) = (z - z_i)^{k_i} g_i(z), \quad 1 \leq i \leq n$$

که در آن g_i روی $|z - z_i| < \rho_i$ تحلیلی و فاقد صفر است. محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که در این همسایگی داریم:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_i}{z - z_i} + \frac{g'_i(z)}{g_i(z)}.$$

اکنون فرض کنید w_1 تا w_m قطب‌های f درون خم C به ترتیب از مرتبه l_1 تا l_m باشند. پس $\sum_{i=1}^m l_i = P$. در همسایگی محذوفی از w_j به صورت $|w - w_j| < \lambda_j$ که داخل C قرار دارد و f روی آن تحلیلی و فاقد صفر است، می‌توان نوشت:

$$f(z) = (z - w_j)^{-l_j} h_j(z), \quad 1 \leq j \leq m.$$

که در آن h_j روی $|z - w_j| < \lambda_j$ تحلیلی و فاقد صفر است. بار دیگر محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که در این همسایگی محذوف داریم:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-l_j}{z - w_j} + \frac{h'_j(z)}{h_j(z)}.$$

حال فرض کنید C_i ، $1 \leq i \leq n$ ، دایره‌ای به مرکز z_i واقع در $|z - z_i| < \rho_i$ و Γ_j ، $1 \leq j \leq m$ ، دایره‌ای به مرکز w_j واقع در $|z - w_j| < \lambda_j$ باشد. C_i ها و Γ_j ها همدیگر را قطع نمی‌کنند.

حال طبق خاصیت ۳.۴، فرمول انتگرال کشی و قضیه انتگرال کشی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{i=1}^n \oint_{C_i} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \sum_{j=1}^m \oint_{\Gamma_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} \left(\frac{k_i}{z - z_i} + \frac{g'_i(z)}{g_i(z)} \right) dz \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_j} \left(\frac{-l_j}{z - w_j} + \frac{h'_j(z)}{h_j(z)} \right) dz \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} \frac{k_i}{z - z_i} dz + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} \frac{g'_i(z)}{g_i(z)} dz \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_j} \frac{-l_j}{z - w_j} dz + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_j} \frac{h'_j(z)}{h_j(z)} dz \\ &= \sum_{i=1}^n k_i + \circ + \sum_{j=1}^m (-l_j) + \circ = N - P. \end{aligned}$$

تذکره. توجه کنید چون f روی C صفر نمی‌شود پس تصویر منحنی C تحت f ، یعنی $\Gamma = f(C)$ در صفحه w ، از مبدأ مختصات نمی‌گذرد. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{w} dw.$$

عبارت سمت راست که یک عدد صحیح است دارای تعبیر مهم زیر می‌باشد. فرض کنید $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ نقطه‌ای روی منحنی C و $w_0 = f(z_0)$ تصویر آن تحت f روی Γ باشد. با انتخاب شاخه لگاریتمی $\log_{\theta_0}(\cdot)$ یعنی:

$$\log_{\theta_0} z = \ln |z| + i \arg z, \quad \theta_0 < \arg z < \theta_0 + 2\pi$$

و طی یک فرآیند حدی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\log_{\theta_0} f(z) \Big|_{z_0}^{r_0 e^{i(2\pi + \theta_0 - \epsilon)}} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\left(\ln |f(z)| + i \arg f(z) \right) \Big|_{z_0}^{r_0 e^{i(2\pi + \theta_0 - \epsilon)}} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\left(\arg f(r_0 e^{i(2\pi + \theta_0 - \epsilon)}) - \arg f(z_0) \right) \right] \\ &:= \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f. \end{aligned}$$

که در آن $\Delta_C \arg f$ نشان دهنده میزان تغییر $\arg f(z)$ است، وقتی z منحنی C را یک دور در جهت مثلثاتی طی می‌کند. در نتیجه:

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f.$$

دلیلی نام‌گذاری اصل آوند به‌خاطر رابطه فوق است. همچنین به‌وضوح $\Delta_C \arg f$ برابر تعداد دفعاتی است که منحنی Γ مبدأ را در صفحه w دور می‌زند، وقتی از w_0 شروع کرده و یک‌بار Γ را می‌پیماید و دوباره به w_0 برمی‌گردد.

خاصیت ۲۴.۴ (قضیه روزه). فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ روی منحنی جردن C و درون آن تحلیلی باشند و در هر نقطه روی C داشته باشیم $|g(z)| < |f(z)|$. آن‌گاه تعداد صفرهای $f + g$ و f درون C برابرند.

علت. طبق اصل آوند کافی است نشان دهیم:

$$\Delta_C \arg(f + g) = \Delta_C \arg f.$$

برای این منظور به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \Delta_C \arg(f + g) &= \Delta_C \arg \left(f \cdot \left(1 + \frac{g}{f} \right) \right) \\ &= \Delta_C \arg f + \Delta_C \arg \left(1 + \frac{g}{f} \right). \end{aligned}$$

که در فوق از اتحاد $\Delta_C \arg(f \cdot g) = \Delta_C \arg f + \Delta_C \arg g$ ، مسئله ۲، استفاده شده است. اما چون $|g| < |f|$ روی C ، پس تصویر C تحت نگاشت $h = 1 + \frac{g}{f}$ ، یعنی $\Gamma = h(C)$ ، در صفحه w درون دایره $|w - 1| < 1$ قرار می‌گیرد. در نتیجه Γ مبدأ را دور نمی‌زند و در نتیجه $\Delta_C \arg h = 0$. پس اثبات کامل می‌گردد.

مثال ۲۵.۴. تعداد صفرهای تابع $F(z) = z^4 - 5z^2 + z^2 - 2$ را درون دایره واحد تعیین کنید.

حل. قرار دهید:

$$f(z) = -5z^4, \quad g(z) = z^4 + z^2 - 2.$$

در این صورت روی دایره واحد داریم:

$$|f(z)| = |-5z^4| = 5, \quad |g(z)| \leq |z^4| + |z^2| + 2 = 4.$$

پس روی دایره واحد نابرابری $|g(z)| < |f(z)|$ برقرار است. پس طبق قضیه ریشه تعداد صفرهای F و f درون دایره واحد برابر است. چون f با احتساب تکرار در درون دایره واحد دارای چهار ریشه است پس F نیز درون دایره واحد چهار ریشه دارد.

تمرین ۴.۴

۱. فرض کنید f درون و روی منحنی جردن C به جز احتمالاً تعدادی متناهی قطب درون C تحلیلی و f روی C غیر صفر و درون C تعدادی متناهی صفر داشته باشد. همچنین فرض کنید g درون و روی C تحلیلی باشد. تعمیم زیر از اصل آوند را ثابت کنید:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n g(z_k) - \sum_{k=1}^m g(p_k)$$

که در آن z_1 تا z_n و p_1 تا p_m به ترتیب ریشه‌ها و قطب‌های f در درون C است که به تعداد مرتبه هر کدام ظاهر شده‌اند.

۲. درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید:

$$\Delta_C \arg(f \cdot g) = \Delta_C \arg f + \Delta_C \arg g.$$

۳. نشان دهید تمام صفرهای $f(z) = z^5 + 6z^3 + 2z + 1$ درون طوق $1 < |z| < 3$ قرار دارد.

۴. تعداد جواب‌های $e^z = 5z^4$ را درون دایره واحد بیابید.

۵. تعداد صفرهای معادله $z^4 - 5z + 1 = 0$ در طوق $1 < |z| < 2$ را بیابید.

۶. تعداد جواب‌های معادلات زیر را در میدان‌های داده شده بیابید.

$$\begin{aligned} & \text{آ) } z^4 - 3z^3 - 1 = 0, \quad |z| < 2 \quad \text{ج) } z^3 + z + 1 = 0, \quad |z| < \frac{1}{2} \\ & \text{ب) } z^8 - 6z^4 - z^3 + 2 = 0, \quad |z| < 1 \quad \text{د) } z^6 - 8z + 1 = 0, \quad 1 < |z| < 3 \end{aligned}$$

۵.۴ مروری بر انتگرال مختلط-سری لران و مانده

در بخش‌های قبلی اشاره کردیم که با یاد گرفتن انتگرال مختلط قادر خواهیم بود انتگرال‌های حقیقی پیچیده را بسیار ساده حساب کنیم. به طور مثال

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin \theta} d\theta \quad \text{یا} \quad \int_0^\infty \frac{x \sin x + \cos x}{(1+x^4)^2} dx.$$

برای محاسبه انتگرال‌های فوق مراحل زیر را طی می‌کنیم:

مرحله ۱: معرفی انتگرال مختلط و خواص مقدماتی آن

مرحله ۲: معرفی فرمول‌های ساده برای محاسبه انتگرال‌های مختلط

مرحله ۳: برقرار کردن ارتباط بین انتگرال‌های حقیقی از نوع فوق و انتگرال مختلط

مرحله ۴: معرفی سری لران و مانده و استفاده از آن‌ها برای آسان‌تر محاسبه کردن انتگرال مختلط

مرحله ۵: معرفی روش‌های مستقیم و ساده برای محاسبه مانده

مرحله ۶: محاسبه انتگرال‌های حقیقی با استفاده از مانده بدون حضور انتگرال مختلط
بعد از توضیح هر یک از مراحل فوق مثال‌های مربوط را در انتهای بخش می‌آوریم.

مرحله ۱: برای تابع مختلط و پیوسته

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

انتگرال آن را روی منحنی با طول متناهی

$$C : z(t) = x(t) + i y(t) \quad a \leq t \leq b$$

با استفاده از مفهوم انتگرال روی منحنی برای توابع دومتغیره در صفحه از درس ریاضی عمومی ۲ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u + iv) (dx + i dy) \\ &= \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy \end{aligned}$$

تذکر. این انتگرال روی منحنی کلیه خواص مقدماتی انتگرال را دارد. لیکن از دو خاصیت زیر بیشتر استفاده می‌شود.

خاصیت ۲۵.۴. اگر L برابر طول منحنی C و روی منحنی C داشته باشیم
 $|f(z)| \leq M$ و M عددی ثابت باشد، آنگاه

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML.$$

خاصیت ۲۶.۴. اگر $f(z)$ تحلیلی و منحنی C در دامنه آن باشد، آنگاه

$$\int_C f'(z) dz = f(z) \Big|_{z_0 \text{ نقطه ابتدایی } C}^{z_1 \text{ نقطه انتهایی } C} = f(z_1) - f(z_0).$$

مرحله ۲: برای محاسبه انتگرال مختلط فرمول‌های محاسباتی زیر اساسی است.

خاصیت ۲۷.۴ (قضیه انتگرال کشی). فرض کنید C یک منحنی جردن و تابع $f(z)$ روی C و داخل C تحلیلی باشد، آنگاه

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

خاصیت ۲۸.۴. فرض کنید C یک منحنی جردن، C_1 و C_2 دو منحنی جردن جدا از هم در داخل C هستند. همچنین تابع $f(z)$ روی C ، C_1 و C_2 تحلیلی است. آنگاه

$$\oint_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$$

تذکره. تعداد منحنی‌های داخل C می‌تواند بیشتر از دو تا هم باشد.

خاصیت ۲۹.۴ (فرمول انتگرال کشی). فرض کنید C یک منحنی جردن، z_0 داخل C و تابع $f(z)$ روی C و داخل C تحلیلی است. آنگاه

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

خاصیت ۳۰.۴ (فرمول مشتق). فرض کنید C ، z_0 و f مانند خاصیت ۲۹.۴ باشند. آنگاه برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

مرحله ۳: ارتباط بین انتگرال مختلط و انتگرال حقیقی
برای محاسبه انتگرال‌های مثلثاتی به صورت

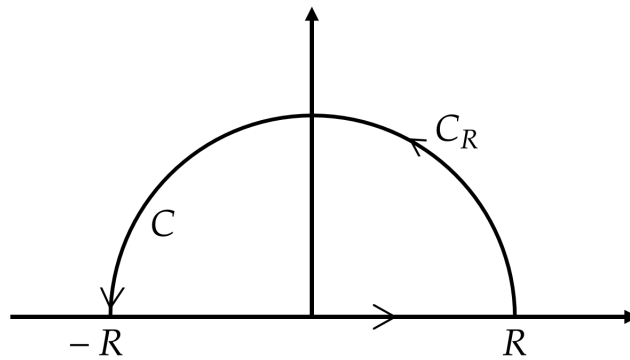
$$\int_0^{2\pi} Q(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

می‌گیریم $z = e^{i\theta}$. در این صورت $dz = ie^{i\theta} d\theta$ یا $d\theta = \frac{1}{iz} dz$ و

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \oint_{|z|=1} Q\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{1}{iz} dz.$$

به این صورت انتگرال حقیقی به انتگرال مختلط تبدیل می‌شود.

برای محاسبه انتگرال‌هایی از نوع $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{cases} \cos ax \\ \sin ax \end{cases} dx$ برای $a \geq 0$ ، منحنی C را به صورت زیر، یعنی شکل ۸.۴، می‌گیریم:



شکل ۸.۴: منحنی $C = C_R \cup [-R, +R]$

پس

$$\oint_C f(z) e^{iaz} dz = \int_{-R}^R f(x) e^{iax} dx + \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz.$$

با محاسبه مقدار انتگرال سمت چپ برای R بزرگ و میل دادن $R \rightarrow \infty$ ، مقدار $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx$ محاسبه می شود. با استفاده از تساوی های زیر انتگرال های مطلوب به دست می آیند.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ax dx$$

مرحله ۴: سری لران و مانده

خاصیت ۳۱.۴ (سری یا بسط لران). فرض کنید z_0 یک نقطه تکین $f(z)$ و $f(z)$ روی دایره $C: |z - z_0| = r$ و داخل آن غیر از z_0 تحلیلی باشد. آنگاه

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

تذکر. برای $n = -1$ داریم $2\pi i a_{-1} = \oint_C f(z) dz$. به این دلیل a_{-1} را مانده f در z_0 می گویند و با $\text{Res}(f, z_0)$ نمایش می دهند.

تذکر. برای محاسبه سری لران می بایستی از خواص سری توانی و سری های مک لورن توابع استفاده کرد.

تعریف ۲.۴. اگر تعداد جملات با توان منفی در بسط لران m تا باشد، z_0 را یک قطب از مرتبه m می گویند. قطب از مرتبه اول را قطب ساده گویند.

تشخیص قطب از مرتبه m : اگر $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ و توابع p و q تحلیلی باشند به طوری که $p(z_0) \neq 0$ و z_0 یک ریشه از مرتبه m تابع $q(z)$ باشد، آنگاه z_0 یک قطب از مرتبه m تابع $f(z)$ است.

خاصیت ۳۲.۴ (قضیه مانده). اگر C یک منحنی جردن و تابع $f(z)$ روی C و داخل C غیر از نقاط z_1 تا z_n تا تحلیلی باشد، آنگاه

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

مرحله ۵: روش مستقیم محاسبه مانده

خاصیت ۳۳.۴ (محاسبه مانده). (۱) فرض کنید z_0 یک قطب ساده تابع $f(z)$ است.

(الف) $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$

(ب) اگر z_0 یک قطب ساده تابع f و $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ به طوری که تابع $q(z)$ تحلیلی و

$\text{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$ آنگاه $p(z_0) \neq 0$.

(۲) اگر z_0 یک قطب از مرتبه m تابع f باشد، آنگاه

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z).$$

مرحله ۶: محاسبه انتگرال های حقیقی با استفاده از مانده

خاصیت ۳۴.۴ (محاسبه انتگرال های حقیقی مثلثاتی). فرض

کنید $Q(x, y)$ تابع دومتغیره حقیقی روی دیسک بسته $x^2 + y^2 \leq 1$ دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته و روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ پیوسته باشد. آنگاه اگر

$$f(z) = \frac{1}{iz} Q\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

که در آن z_1 تا z_n نقاط تکین تابع f در داخل دایره واحد است.

تذکره. نقطه تکین غیر قطب را نقطه تکین اساسی می‌گویند.

خاصیت ۳۵.۴ (محاسبه انتگرال‌های ناسره روی $\mathbb{R}$). فرض کنید $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ، $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای به‌طوری که درجه $q(x)$ حداقل دو تا بیشتر از درجه $p(x)$ و $q(x)$ فاقد ریشه حقیقی باشد. آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

که در آن z_1 تا z_n قطب‌های تابع f در نیم‌صفحه بالایی است.

خاصیت ۳۶.۴ (محاسبه انتگرال‌های ناسره روی $\mathbb{R}$ حاوی توابع مثلثاتی). فرض کنید $f(x)$ مانند خاصیت ۳۴.۴ و $a > 0$ عددی ثابت باشد. آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f e^{iaz}, z_k)$$

که در آن z_1 تا z_n قطب‌های تابع f در نیم‌صفحه بالایی است.

تذکره. حالت ۳۵.۴ برای حالت درجه $q(x)$ یکی بیشتر از درجه $p(z)$ نیز صادق است.

تذکره. در بعضی از انتگرال‌ها در تابع زیر انتگرال $\bar{z}$ یا $d\bar{z}$ یا $d|z|$ یا $|dz|$ یا $|d\bar{z}|$ ظاهر می‌شود. این مقادیر برای روی منحنی C انتگرال‌گیری است که معمولاً به‌صورت دایره $|z - z_0| = R$ است. توجه کنید که از روی تساوی $(\bar{z} - \bar{z}_0)(z - z_0) = |z - z_0|^2$ ، مقدار $\bar{z}$ قابل محاسبه است.

مثال ۲۶.۴ (برای خاصیت ۲۵.۴).

$$\left| \int_{|z|=R>1} \frac{z^2}{1+z^2} dz \right| \leq \frac{R^2}{R^2-1} 2\pi R.$$

مثال ۲۷.۴ (برای خاصیت ۲۶.۴). انتگرال زیر را محاسبه کنید.

حل.

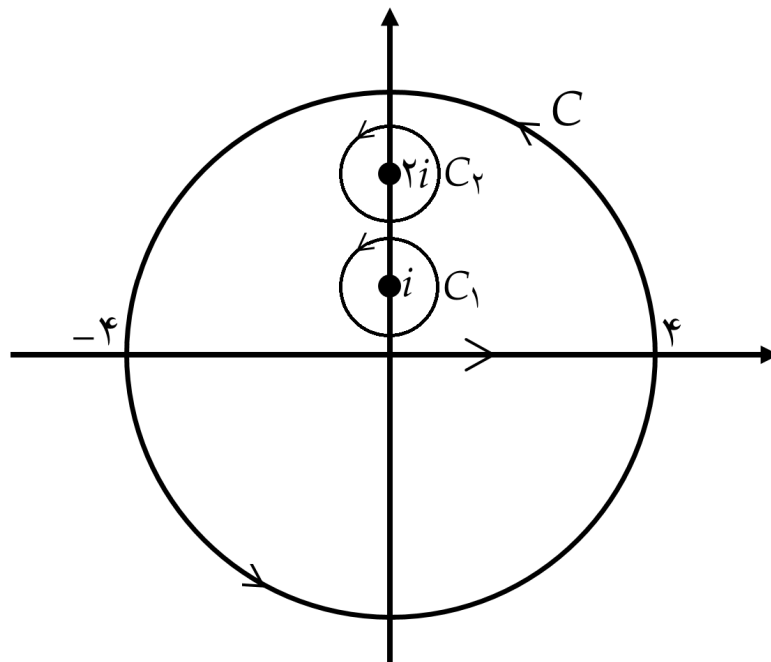
$$\int_{1+i}^{2-3i} \cosh z \, dz = \sinh z \Big|_{1+i}^{2-3i} = \sinh(2-3i) - \sinh(1+i).$$

مثال ۲۸.۴ (برای خاصیت ۲۷.۴). انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z^2 \cos z}{(z^4 + 4)(z^2 + 6)} \, dz$$

حل. چون تابع زیر انتگرال در $|z| \leq 1$ تحلیلی است، پس $I = 0$.

مثال ۲۹.۴ (برای خاصیت ۲۸.۴). برای منحنی‌های C ، C_1 و C_2 به‌طوری‌که



شکل ۹.۴: منحنی‌های C ، C_1 و C_2

$$C : |z| = 4, \quad C_1 : |z - i| = \frac{1}{4}, \quad C_2 : |z - 2i| = \frac{1}{4}$$

(شکل ۹.۴ را ببینید.) حاصل انتگرال زیر را به دست آورید.

$$I = \oint_C \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} dz$$

حل.

$$I = \oint_{C_1} \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} dz + \oint_{C_2} \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} dz.$$

مثال ۳۰.۴ (برای خاصیت ۲۹.۴). انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I = \oint_{|z-2i|=\frac{1}{4}} \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} dz$$

حل.

$$\begin{aligned} I &= \oint_{|z-2i|=\frac{1}{4}} \frac{\frac{z^2+z+1}{(z^2+1)^2(z+2i)}}{z-2i} dz \\ &= 2\pi i \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 1)^2(z + 2i)} \Big|_{z=2i} \\ &= 2\pi \frac{-3 + 2i}{36}. \end{aligned}$$

مثال ۳۱.۴ (برای خاصیت ۳۰.۴). انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I = \oint_{|z-i|=\frac{1}{4}} \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} dz$$

حل.

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_{|z-i|=\frac{1}{4}} \frac{\frac{z^2+z+1}{(z+i)^2(z^2+4)}}{(z-i)^2} dz \\
 &= 2\pi i \frac{d}{dz} \frac{z^2+z+1}{(z+i)^2(z^2+4)} \Big|_{z=i} \\
 &= 2\pi i \frac{(2z+1)(z+i)^2(z^2+4) - [2(z+i)(z^2+4) + 2z(z+i)^2](z^2+z+1)}{\left((z+i)^2(z^2+4)\right)^2} \Big|_{z=i} \\
 &= 2\pi i \frac{-6i-2}{36} = 2\pi \frac{6-2i}{36}.
 \end{aligned}$$

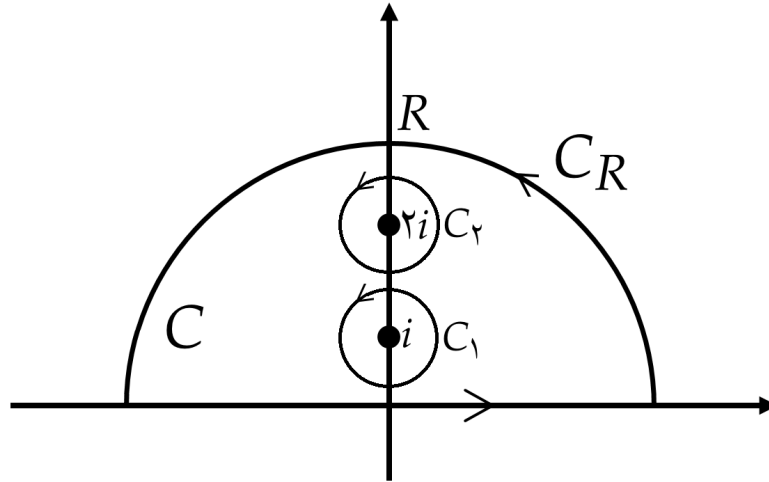
مثال ۳۲.۴ (برای مرحله ۳). مطلوبست محاسبه $I = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\sin\theta} d\theta$

حل. با توجه به مطالب مرحله ۳ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_{|z|=1} e^{2\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}} \frac{dz}{iz} \\
 &= \oint_{|z|=1} e^{\frac{i}{z}} e^{-iz} \frac{dz}{iz} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n!} \oint_{|z|=1} \frac{e^{-iz}}{z^{n+1}} dz \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n!} \frac{2\pi i}{n!} (-i)^n = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}.
 \end{aligned}$$

مثال ۳۳.۴. مطلوبست محاسبه $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2(x^2+4)} dx$

حل. منحنی جردن را به صورت شکل ۱۰.۴ در نظر می گیریم.

شکل ۱۰.۴: منحنی‌های C ، C_1 و C_2

همچنین انتگرال مختلط زیر را روی منحنی فوق در نظر می‌گیریم که طبق مثال‌های ۲۹.۴، ۳۰.۴ و ۳۱.۴ می‌نویسیم

$$\begin{aligned}
 & \int_C \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} dz \\
 &= \underbrace{\int_{C_1} \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} dz + \int_{C_2} \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} dz}_{\text{مثال ۲۹.۴}} \\
 &= \underbrace{2\pi \frac{6 - 2i}{36}}_{\text{مثال ۳۱.۴}} + \underbrace{2\pi \frac{-3 + 2i}{36}}_{\text{مثال ۳۰.۴}} \\
 &= 2\pi \frac{3}{36} = \frac{\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

حال از خاصیت ۲۵.۴ داریم

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} dz \right| \leq \pi R \frac{R^2 + R + 1}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)^2}.$$

از طرفی $\circ$ وقتی $R \rightarrow \infty$ در نتیجه $I = \frac{\pi}{6}$

مثال ۳۴.۴ (برای خاصیت ۳۱.۴). مطلوبست محاسبه

$$I = \oint_{|z|=1} z^6 \sin \frac{1}{z} dz.$$

حل. تنها نقطه تکین تابع زیر انتگرال $z = 0$ است. همچنین از بسط مک لورن سینوسی داریم

$$\sin w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1}, \quad w \in \mathbb{C}.$$

حال به جای w قرار می‌دهیم $\frac{1}{z}$. پس

$$z^6 \sin \frac{1}{z} = z^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-2n+5}.$$

مانده در نقطه $z = 0$ برابر با ضریب z^{-1} در بسط فوق است. بنابراین برای جمله مانده باید $-1 = -2n + 5$ یا $n = 3$. در نتیجه

$$\text{Res}\left(z^6 \sin \frac{1}{z}, 0\right) = a_{-1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Big|_{n=3} = -\frac{1}{7!}.$$

پس

$$I = 2\pi i \left(-\frac{1}{7!}\right) = -\frac{2\pi i}{7!}.$$

مثال ۳۵.۴ (برای خاصیت ۳۲.۴ و ۳۳.۴). مطلوبست محاسبه

$$I = \int_C \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} dz$$

که در آن C همان منحنی جردن مثال ۳۳.۴ است.

حل. نقاط تکین در داخل C عبارت‌اند از $z_1 = 2i$ که قطب ساده و $z_2 = i$ که قطب مرتبه ۲ است. پس

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i (\text{Res}(f, 2i) + \text{Res}(f, i)) \\ &= 2\pi i \left(\frac{z^2 + z + 1}{4z(z^2 + 1)(z^2 + 4) + 2z(z^2 + 1)^2} \right) \Bigg|_{z=2i} + \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \frac{z^2 + z + 1}{(z+i)^2(z^2 + 4)} \Bigg|_{z=i} \\ &= 2\pi i \left(\frac{-3 + 2i}{36i} + \frac{6 - 2i}{36i} \right) \\ &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

مثال ۳۶.۴ (برای خاصیت ۳۴.۴). مطلوبست محاسبه انتگرال زیر

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \theta}{\sin \theta + 2} d\theta.$$

حل. با توجه به خاصیت ۳۴.۴ خواهیم داشت

$$f(z) = \frac{\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}}{\frac{z - \frac{1}{z}}{2i} + 2} \frac{1}{iz} = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 1 + 4iz} \frac{1}{iz} = \frac{1}{i} \frac{z^2 - 1}{z(z^2 + 4iz - 1)}.$$

نقاط تکین عبارت‌اند از $z_1 = 0$ و ریشه‌های $z^2 + 4iz - 1 = 0$. ریشه‌های این چندجمله‌ای درجه دوم به صورت زیر است:

$$z = -2i \pm \sqrt{-4 + 1} = -2i \pm \sqrt{3}i = (-2 \pm \sqrt{3})i.$$

نقاط تکین $z_1 = 0$ و $z_2 = -(2 - \sqrt{3})i$ داخل دایره واحد هستند و هر دو قطب ساده‌اند.

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{i} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 4iz - 1} = \frac{1}{i} = -i$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -(2 - \sqrt{3})i) &= \frac{1}{i} \frac{z^2 - 1}{3z^2 + 4iz - 1} \Bigg|_{z=-(2-\sqrt{3})i} \\ &= \frac{1}{i} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}}i. \end{aligned}$$

پس

$$I = 2\pi i \left(\frac{2}{\sqrt{3}}i - i \right) = 2\pi \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \right).$$

مثال ۳۷.۴ (برای خاصیت ۳۶.۴). مطلوبست محاسبه

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 1} dx.$$

حل. در ابتدا می‌دانیم که

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 1} dx.$$

با توجه به خاصیت ۳۶.۴ نقاط تکین عبارت‌اند از ریشه‌های $z^4 = -1$. پس

$$z^4 = -1 = e^{2k\pi i + \pi i} = e^{(2k+1)\pi i} \Rightarrow z = e^{(2k+1)\frac{\pi}{4}i}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i}, \quad z_3 = e^{\frac{5\pi}{4}i}, \quad z_4 = e^{\frac{7\pi}{4}i}.$$

نقاط تکین z_1 و z_2 در نیم‌صفحه بالایی هستند.حال مانده تابع $f(z)e^{iz} = \frac{z^3 e^{iz}}{z^4 + 1}$ را در نقاط تکین z_1 و z_2 به دست می‌آوریم.

$$\text{Res}(f, z_1) = \left. \frac{z^3 e^{iz}}{4z^3} \right|_{z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{e^{(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})i}}{4}$$

$$\text{Res}(f, z_2) = \left. \frac{z^3 e^{iz}}{4z^3} \right|_{z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i}} = \frac{e^{(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})i}}{4}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 1} dx &= 2\pi i \left(\frac{e^{(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})i}}{4} + \frac{e^{(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})i}}{4} \right) \\ &= 2\pi \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{\frac{1}{\sqrt{2}}i} + e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}i}}{2} \\ &= \pi e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$I = \frac{\pi}{2} \frac{\cos \frac{1}{\sqrt{2}}}{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}.$$

تمرین ۵.۴

۱. بسط لران توابع زیر را حول مبدأ مختصات بنویسید.

$$f(z) = \frac{5z+1}{z^4(z+1)^2} \quad (\text{ج}) \qquad f(z) = \frac{z+2}{z^6(z-i)^2} \quad (\text{الف})$$

$$f(z) = \frac{z-2}{z^4(z+i)^2} \quad (\text{د}) \qquad f(z) = \frac{2z+3i}{z^5(z-1)^2} \quad (\text{ب})$$

۲. مانده توابع زیر را در نقاط تکین آن‌ها به دست آورید.

$$f(z) = \frac{2z-4i}{(z+1)(z-i)^3} \quad (\text{ج}) \qquad f(z) = \frac{z+3}{z^3(z+2)} \quad (\text{الف})$$

$$f(z) = \frac{z+3i}{(z+1)^3(z-2i)} \quad (\text{د}) \qquad f(z) = \frac{3z+2i}{z(z+i)^3} \quad (\text{ب})$$

۳. مانده توابع زیر را در نقاط تکین آن‌ها محاسبه کنید.

$$f(z) = e^z \cos \frac{1}{z} \quad (\text{ج}) \qquad f(z) = e^{z-\frac{1}{iz}} \quad (\text{الف})$$

$$f(z) = \sin \frac{1}{z} \cos z \quad (\text{د}) \qquad f(z) = \sin z e^{\frac{1}{z}} \quad (\text{ب})$$

۴. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\oint_{|z|=2} \bar{z}^2 \cot \bar{z} \, dz \quad (\text{ج})$$

$$\oint_{|z|=1} \bar{z}^5 \cos z \, d\bar{z} \quad (\text{الف})$$

$$\oint_{|z|=2} z^6 \sin \frac{1}{z} \, d\bar{z} \quad (\text{د})$$

$$\oint_{|z|=1} \bar{z} \tan z \, d\bar{z} \quad (\text{ب})$$

۵. حاصل انتگرال‌های زیر را به دست آورید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\cos 2\theta} \, d\theta \quad (\text{ج})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \theta}{4-3\cos \theta} \, d\theta \quad (\text{الف})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 2\theta}{3-2\sin \theta} \, d\theta \quad (\text{د})$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{2-\sin \theta} \, d\theta \quad (\text{ب})$$

۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{16+x^4} \, dx \quad (\text{ج})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos 2x}{1+x^4} \, dx \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)^2} \, dx \quad (\text{د})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2(x^2+4)} \, dx \quad (\text{ب})$$

فصل ۵

نگاشت‌های همدیس

هدف از این فصل بررسی خواص هندسی توابع تحلیلی و استفاده از آن برای تبدیل میدان‌های «بد» به میدان‌های «خوب» است. مقصود از میدان «خوب» میدانی است که انجام عملیات مطلوب در آن ممکن و میدان «بد» میدانی است که انجام عملیات مطلوب در آن غیرممکن است. به عنوان مثال یک مثلث برای طرح و حل مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای یک میدان «بد» و یک مربع مستطیل یک میدان «خوب» است. در فصل اول دیدیم حل مسائل معادلات پاره‌ای وقتی که $a < x < b$ و $c < y < d$ بود با استفاده از سری فوریه مقدور بود لیکن مسئله‌ای طرح نشد که (x, y) در داخل یک مثلث باشد. لیکن مسائلی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای روی میدان مثلثی شکل نیز مطرح است که در فصل اول مطرح نشدند. مطالب این فصل به حل این گونه مسائل کمک می‌کنند. برای این که بتوانیم میدان‌های «بد» را به میدان‌های «خوب» با استفاده از توابع تحلیلی تبدیل کنیم می‌بایستی شناخت خوبی از توابع تحلیلی در کلیت و خواص توابعی خاص از آن را داشته باشیم. در بخش ۱.۵ به معرفی نگاشت‌های همدیس می‌پردازیم. در بخش ۲.۵ به بررسی چند تابع تحلیلی خاص می‌پردازیم. در بخش ۳.۵ کاربرد آنها را داریم.

۱.۵ نگاشت‌های همدیس

هدف از این بخش بررسی خواص هندسی توابع تحلیلی در کلیت می‌باشد. برای تابع یک متغیر حقیقی مانند $y = f(x)$ خواص هندسی مماس بر منحنی، طول منحنی، مساحت زیر منحنی، حجم دوار و رویه دوار مطرح، برای توابع دو متغیر حقیقی نیز مطالب مشابه مانند حجم زیر رویه، سطح رویه و مماس بر رویه مطرح و قابل بررسی است. برای تابع تحلیلی چنین مفاهیم هندسی غیر قابل تصور است. چون برای نمایش نقاط دامنه تابع دو محور و نقاط برد تابع نیز دو محور نیاز است. در نتیجه عملیات در دو صفحه مجزا انجام می‌شود. لذا نمایش ارتباط نقاط در فضای سه بعدی مقدور نیست. لذا کار هندسی ممکن تعیین تصویر مجموعه نقاط، از قبیل خط، منحنی و یا اشکال خاص هندسی و انتقال ارتباط بین اجزا هندسی از دامنه به اجزا تصویر است. خاصیت همدیسی به این مطلب کمک می‌کند. برای بیان مفاهیم همدیسی نیاز به مقدمات زیر است.

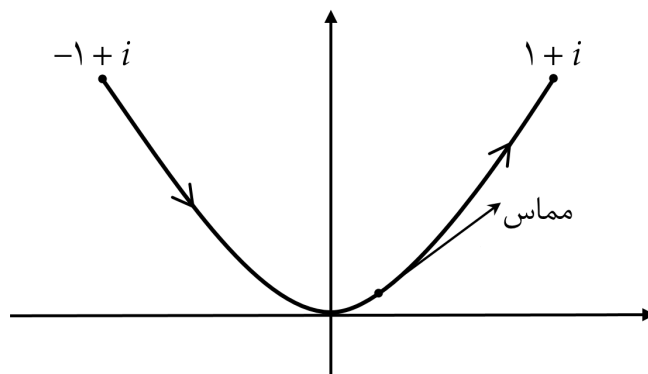
برای منحنی $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ که به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b]$$

جهت افزایش t را روی منحنی، جهت منحنی می‌گیریم. منحنی را هموار گوییم اگر مماس بر آن در هر نقطه موجود باشد. جهت منحنی را نیز جهت بردار مماس بر منحنی می‌گیریم.

مثال ۱.۵. منحنی $\gamma(t) = t + it^2$, $-1 \leq t \leq 1$ دارای نمایش شکل ۱.۵ است. زاویه بین دو منحنی هموار را زاویه بین مماس‌های آنها در نظر می‌گیریم. همچنین هر تابع پیوسته از صفحه Z به w را یک نگاشت گوییم.

نگاشت همدیس: نگاشت f از صفحه Z به صفحه w را در نقطه z_0 یک نگاشت همدیس گوییم اگر این نگاشت زاویه بین دو منحنی همواری که از نقطه z_0 می‌گذرند هم از نظر مقدار و هم از نظر جهت حفظ نماید. یعنی اگر دو منحنی C_1 و C_2 که از نقطه z_0 می‌گذرند در این نقطه دارای زاویه α باشند تصویر این دو منحنی که از نقطه $f(z_0)$



شکل ۱.۵

می‌گذرند نیز دارای زاویه α باشند و به علاوه اگر مماس بر C_1 در جهت مثلثاتی حول z_0 بر C_2 منطبق شود در صفحه تصویر نیز مماس بر C'_1 با چرخش در جهت مثلثاتی حول $f(z_0)$ بر مماس بر $C'_2 = f(C_2)$ منطبق گردد.

حال نشان می‌دهیم برای تابع تحلیلی $f(z)$ با $f'(z_0) \neq 0$ ، نگاشت وابسته f در z_0 همدیس است.

فرض کنید منحنی هموار $\gamma(t)$ از نقطه z_0 می‌گذرد و برای $t_0 \in (a, b)$ ، $\gamma'(t_0) \neq 0$ و $\gamma(t_0) = z_0$. در این صورت بردار مماس بر γ در z_0 عبارتست از

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z - z_0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_0 + \Delta t) - \gamma(t_0)}{\Delta t} = \gamma'(t_0) \quad (\Delta t > 0).$$

زاویه‌ای که این بردار مماس با محور x می‌سازد برابر با $\text{Arg } \gamma'(t_0)$ است. تصویر منحنی $\gamma(t)$ تحت نگاشت $f(z)$ منحنی $\tilde{\gamma}(t)$ است که از نقطه $f(z_0)$ می‌گذرد. با توجه به مطالب فوق بردار مماس بر $\tilde{\gamma}(t)$ در نقطه $f(z_0)$ عبارتست از

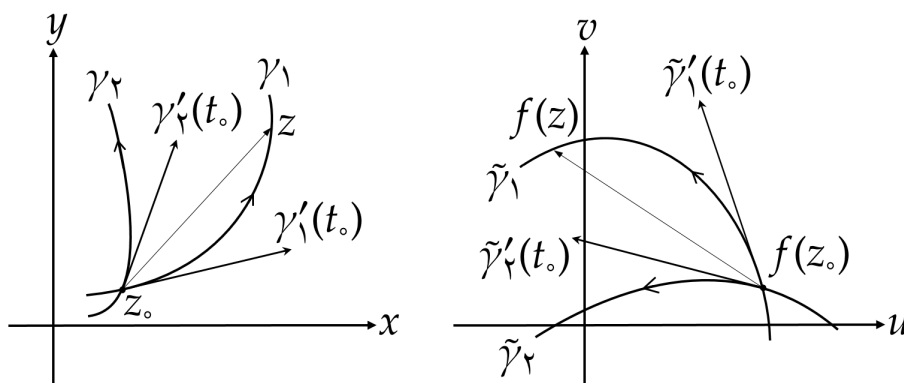
$$\tilde{\gamma}'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0).$$

حال اگر $f'(z_0) \neq 0$ در این صورت $\tilde{\gamma}'(t_0) \neq 0$. یعنی مماس بر $\tilde{\gamma}(t)$ در نقطه $f(z_0)$ موجود و با محور u زاویه $\text{Arg } \tilde{\gamma}'(t_0)$ را می‌سازد. لیکن

$$\text{Arg } \tilde{\gamma}'(t_0) = \text{Arg } \gamma'(t_0) + \arg f'(z_0).$$

یعنی با دوران بردار مماس $\gamma'(t_0)$ بر منحنی $\gamma(t)$ در نقطه z_0 به اندازه $\text{Arg } f'(z_0)$ بردار مماس $\tilde{\gamma}'(t_0)$ به دست می‌آید. چون این مطلب برای تمام منحنی‌های همواری که از z_0 می‌گذرند برقرار است، پس اگر زاویه بین دو منحنی $\gamma_1(t)$ و $\gamma_2(t)$ برابر با α باشد زاویه بین $f(\gamma_1(t))$ و $f(\gamma_2(t))$ نیز برابر α است و اگر مماس بر $\gamma_1(t)$ با چرخش آن به اندازه α در جهت مثلثاتی بر $\gamma_2(t)$ منطبق گردد مماس بر $f(\gamma_1(t))$ هم اگر به اندازه α در جهت مثلثاتی دوران نماید بر مماس بر $f(\gamma_2(t))$ منطبق می‌گردد. پس خاصیت زیر برقرار است. (به شکل ۲.۵ توجه کنید.)

خاصیت ۱.۵ (نگاشت همدیس). اگر تابع f در نقطه z_0 تحلیلی و $f'(z_0) \neq 0$ باشد، آن گاه f در z_0 همدیس است.



شکل ۲.۵

تذکره. شرط $f'(z_0) \neq 0$ در خاصیت فوق اساسی است. چون اگر $f'(z_0) = 0$ باشد $\arg f'(z_0)$ نامشخص است و روش فوق ارتباطی بین $\text{Arg } \tilde{\gamma}'(t_0)$ و $\text{Arg } \gamma'(t_0)$ ارائه نمی‌دهد.

مثال ۲.۵. تابع $f(z) = z^n$ برای عدد طبیعی n دارای مشتق $f'(z) = nz^{n-1}$ است که برای $z_0 \neq 0$ داریم $f'(z_0) \neq 0$. پس نگاشت آن برای $z_0 \neq 0$ همدیس است. لیکن

تصویر شعاع $\gamma(r)e^{i\theta}$, $r > 0$ تحت این نگاشت می‌شود شعاع $\tilde{\gamma}(r) = r^n e^{in\theta}$. یعنی $\text{Arg } \gamma'(r) = \theta$ لیکن $\text{Arg } \tilde{\gamma}'(r) = n\theta$. یعنی برای این نگاشت شعاع با آوند θ به شعاع با آوند $n\theta$ تصویر می‌شود. پس زاویه بین دو شعاع نیز در تصویر n برابر می‌شود. همچنین همین خاصیت برای منحنی‌هایی که از مبدأ می‌گذرند برقرار است.

تعیین تصویر یک ناحیه از صفحه z تحت یک نگاشت معین مانند $w = f(z)$ در صفحه w کار مقدماتی است که ممکن است آسان نباشد. مسئله را به صورت زیر داریم.

مسئله: فرض کنید منحنی C در صفحه z با معادله ضمنی به صورت $g(x, y) = 0$ و نگاشت $w = f(z) = u + iv$ به صورت $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ داده شده باشد. پس در این جا سه معادله به صورت زیر داریم.

$$g(x, y) = 0, \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

برای تعیین تصویر می‌بایستی بین این سه معادله x و y را حذف نماییم تا یک معادله بر حسب u و v به صورت $G(u, v) = 0$ به دست آید.

تذکره. توجه کنید معادله $g(x, y) = 0$ ممکن است بر حسب z و $\bar{z}$ یا بر حسب r و θ نیز داده شده باشد. همچنین تابع $w = f(z)$ ممکن است بر حسب r و θ داده شده باشد. یعنی $u = u(r, \theta)$ و $v = v(r, \theta)$. همچنین منحنی تصویر ممکن است به صورت $G(R, \phi) = 0$ قابل حصول باشد که در آن منظور از R و ϕ متغیرهای مختصات قطبی تصویر می‌باشند، یعنی $w = f(z) = Re^{i\phi}$. بسته به این که حذف متغیرهای صفحه z با استفاده از کدام نوع از این متغیرها آسان تر باشد از آن نوع متغیرها استفاده می‌گردد.

مثال ۳.۵. تصویر دایره $|z - i| = 2$ را تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ به دست آورید.

حل. روش اول: داریم $|z - i| = 2$ و $w = \frac{1}{z}$. اگر بین این دو معادله z را حذف کنیم مجموعه تصویر به دست می‌آید. از نگاشت داریم $z = \frac{1}{w}$. آن را در معادله دایره قرار دهیم می‌شود $2 = \left| \frac{1}{w} - i \right|$. حال می‌بایستی آن را ساده کنیم تا تصویر مشخص گردد.

$$\left| \frac{1}{w} - i \right| = 2 \iff \left(\frac{1}{w} - i \right) \left(\frac{1}{\bar{w}} + i \right) = 4$$

یا

$$\frac{1}{w\bar{w}} + \frac{i}{w} - \frac{i}{\bar{w}} + 1 = 4 \iff 1 + i\bar{w} - iw = 3(u^2 + v^2)$$

یا

$$1 + v + v = 3(u^2 + v^2) \iff u^2 + v^2 - \frac{2}{3}v = \frac{1}{3}$$

یا

$$u^2 + (v - \frac{1}{3})^2 = \frac{4}{9} \iff \left| w - \frac{i}{3} \right| = \frac{2}{3}.$$

پس تصویر دایره به شعاع $\frac{2}{3}$ و به مرکز $w_0 = \frac{i}{3}$ است.

روش دوم: معادلات را در مختصات دکارتی بنویسیم:

$$|z - i| = 2 \iff x^2 + (y - 1)^2 = 4$$

$$w = \frac{1}{z} \iff u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

بین این سه معادله می‌بایستی x و y را حذف کنیم. پس x و y را اگر از دو معادله آخر بر حسب u و v به دست آوریم حل ممکن می‌شود.

$$w = \frac{1}{z} \iff z = \frac{1}{w} \iff x + iy = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2}.$$

پس

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}.$$

از قرار دادن آنها در معادله منحنی به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{u}{u^2 + v^2} \right)^2 + \left(-\frac{v}{u^2 + v^2} - 1 \right)^2 = 4$$

یا

$$u^2 + (-v - u^2 - v^2)^2 = 4(u^2 + v^2)^2$$

یا

$$u^2 + v^2 + 2v(u^2 + v^2) + (u^2 + v^2)^2 = 4(u^2 + v^2)$$

یا

$$(u^2 + v^2)(3u^2 + 3v^2 - 2v - 1) = 0.$$

چون روی دایره $|z - i| = 2$ ، $x^2 + y^2 = 3 + 2y$ و $-1 \leq y \leq 3$ پس:

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{3 + 2y} \geq \frac{1}{9}.$$

در نتیجه $u^2 + v^2 \neq 0$ و به دست می‌آوریم:

$$3u^2 + 3v^2 = 2v + 1 \iff u^2 + \left(v - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

روش سوم: در صفحه z و صفحه w مختصات قطبی را به ترتیب به صورت $z = re^{i\theta}$ و $w = Re^{i\phi}$ در نظر بگیرید. پس

$$w = Re^{i\phi} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{z}.$$

یا $R = \frac{1}{r}$ و $\phi = -\theta$. همچنین

$$|z - i| = 2 \iff |re^{i\theta} - i| = 2.$$

حال باید بین سه معادله زیر r و θ را حذف کنیم.

$$\phi = -\theta, \quad R = \frac{1}{r}, \quad |re^{i\theta} - i| = 2.$$

پس کفایت در معادله منحنی به جای r و θ بر حسب ϕ و R قرار دهیم.

$$|re^{i\theta} - i| = 2 \implies \left|\frac{1}{R}e^{-i\phi} - i\right| = 2$$

برای مشاهده تصویر می‌بایستی آن را به صورت بهتر بنویسیم.

$$\left|\frac{1}{R}e^{-i\phi} - i\right| = 2 \iff \left(\frac{1}{R}e^{-i\phi} - i\right)\left(\frac{1}{R}e^{i\phi} + i\right) = 4$$

یا

$$\frac{1}{R^2} + i\frac{1}{R}e^{-i\phi} - i\frac{1}{R}e^{i\phi} + 1 = 4 \iff \frac{1}{R^2} + \frac{2}{R}\sin\phi = 3$$

یا

$$3R^2 - 2R\sin\phi = 1 \iff 3(u^2 + v^2) - 2v = 1$$

یا

$$u^2 + (v - \frac{1}{3})^2 = \frac{4}{9}.$$

تذکره. بسته به این که محاسبه کدام یک از مختصات صفحه z بر حسب کدام یک از مختصات صفحه w آسان تر باشد از آن مختصات استفاده می کنیم. توجه داشته باشد همیشه معادله منحنی را در صفحه z بر حسب هر سه نوع مختصات (x, y) ، (r, θ) و (z) می توان نوشت.

مثال ۴.۵. تصویر خط $x + y = 1$ را تحت نگاشت $w = z^2$ به دست آورید.

حل. روش اول: در مختصات قطبی معادله نگاشت را به صورت زیر داریم:

$$z = re^{i\theta}, \quad w = Re^{i\phi}, \quad Re^{i\phi} = r^2 e^{2i\theta}.$$

پس $R = r^2$ و $\phi = 2\theta$ یا $r = \sqrt{R}$ و $\theta = \frac{\phi}{2}$. حال معادله منحنی را در مختصات قطبی بنویسیم:

$$x + y = 1 \implies r \cos \theta + r \sin \theta = 1, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}.$$

پس تصویر می شود:

$$\sqrt{R} \left(\cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \right) = 1$$

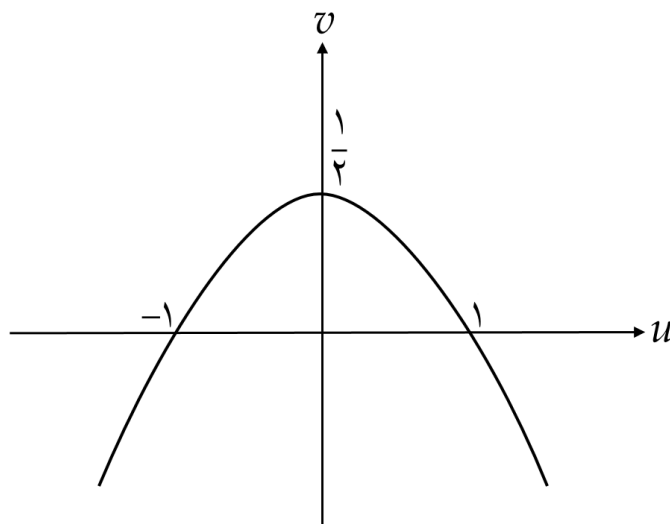
یا

$$R \left(\cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \right)^2 = 1$$

یا

$$R = \frac{1}{1 + \sin \phi} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2}.$$

نمودار این منحنی را به صورت شکل ۳.۵ داریم که یک سهمی است.



شکل ۳.۵

روش دوم: در مختصات دکارتی داریم:

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy, \quad x + y = 1.$$

حال x و y را بین آنها حذف کنیم. از معادله خط داریم $y = 1 - x$. پس:

$$u = x^2 - (1 - x)^2 = x^2 - 1 + 2x - x^2 = -1 + 2x$$

$$v = 2x(1 - x).$$

از معادله اول $x = \frac{u+1}{2}$. آن را در معادله v قرار دهیم.

$$v = (u + 1) \left(1 - \frac{u + 1}{2} \right) = \frac{1}{2}(-u^2 + 1).$$

یا $v = -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}$ که همان سهمی شکل ۳.۵ است.

تذکره. چنانچه در مثال فوق معادله خط تغییر کند مثلاً برای خط $x + y = 1$ دیگر روش به سادگی کار نخواهد کرد. همچنین اگر نگاشت به صورت $w = z^n$ ، $n \neq 2$ باشد نیز حتی برای خط $x + y = 1$ روش دوم مفید نخواهد بود لیکن روش اول حل در تمام حالات برای تابع $w = z^n$ مفید است.

مثال ۵.۵. تصویر سهمی $y^2 = x$ ، $y \geq 0$ را تحت نگاشت $w = z^2$ به دست آورید.

حل. اگر در صفحه z مختصات دکارتی $z = x + iy$ و در صفحه w مختصات قطبی $w = Re^{i\phi}$ را در نظر بگیریم. محاسبه x و y بر حسب R و ϕ به سادگی انجام می‌شود.

$$w = e^z \implies Re^{i\phi} = e^x \cdot e^{iy}.$$

پس سه معادله مطلوب می‌شود:

$$R = e^x, \quad \phi = y, \quad y^2 = x, \quad y \geq 0.$$

پس $x = \ln R$ و $y = \phi$. از قرار دادن آنها در معادله سهمی به دست می‌آوریم.

$$\phi^2 = \ln R \quad \phi \geq 0.$$

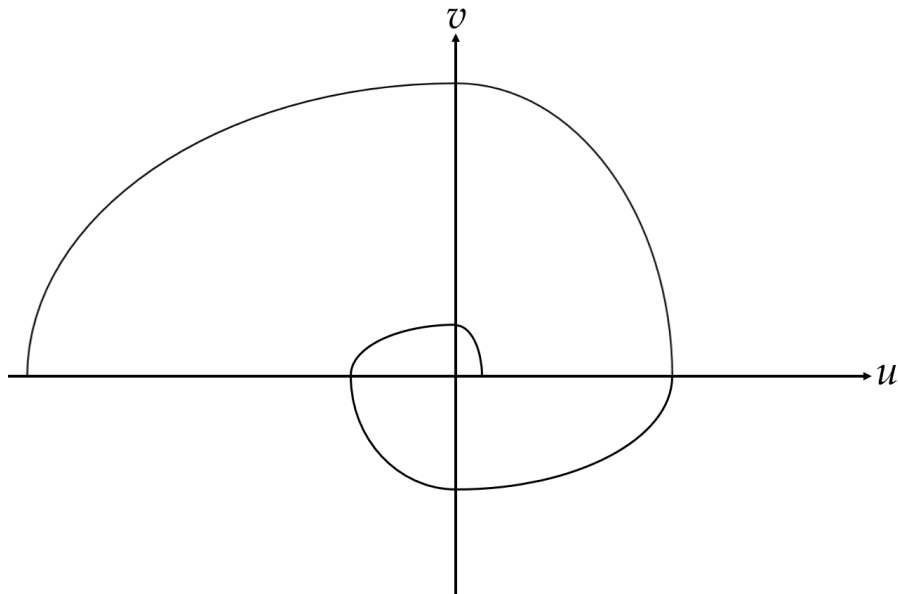
یا $R = e^{\phi^2}$ ، که تصویر آن یک مارپیچ حول مبدأ به شکل ۴.۵ است.

تذکره. معمولاً مرز نواحی در صفحه به وسیله چند منحنی داده می‌شود که با هم یک منحنی جردن تشکیل می‌دهند. برای تعیین تصویر این ناحیه کافیست که تصویر هر یک از منحنی‌ها را به دست آوریم و در این صورت این منحنی از صفحه w را به دست می‌دهند و یکی از این نواحی می‌تواند جواب مطلوب باشد.

مثال ۶.۵. تصویر میدان $D = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ ، شکل ۵.۵، را تحت نگاشت $w = e^z$ بیابید.

حل. ابتدا تصویر خط $x + y = 1$ را می‌یابیم. با توجه به مثال قبل

$$R = e^x, \quad \phi = y, \quad x + y = 1 \implies x = \ln R, \quad y = \phi.$$



شکل ۴.۵

پس تصویر می‌شود $\ln R = 1 - \phi$ یا

$$R = e^{1-\phi} \quad 0 \leq \phi \leq 1.$$

تصویر پاره خط $1 \leq y \leq 0$, $x = 0$ می‌شود $\ln R = 0$ و $0 \leq \phi \leq 0$ یا

$$R = 1, \quad 0 \leq \phi \leq 1.$$

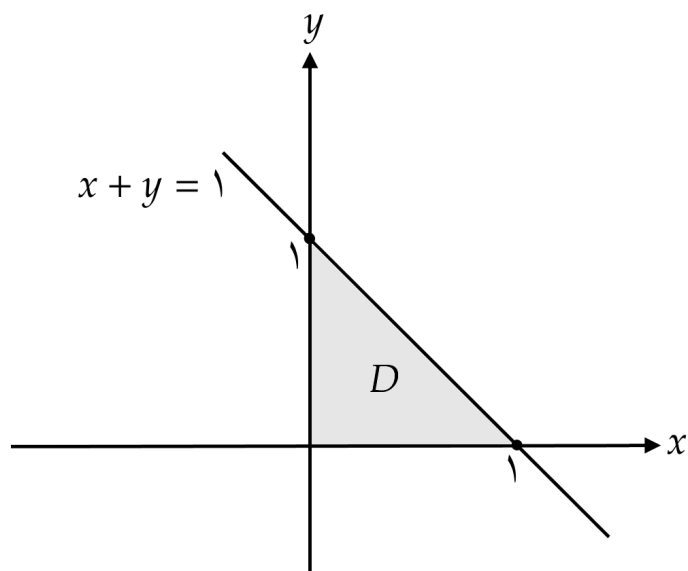
و تصویر پاره خط $1 \leq x \leq 0$, $y = 0$ می‌شود $\phi = 0$ و $0 \leq \ln R \leq 1$ یا

$$\phi = 0, \quad 1 \leq R \leq e.$$

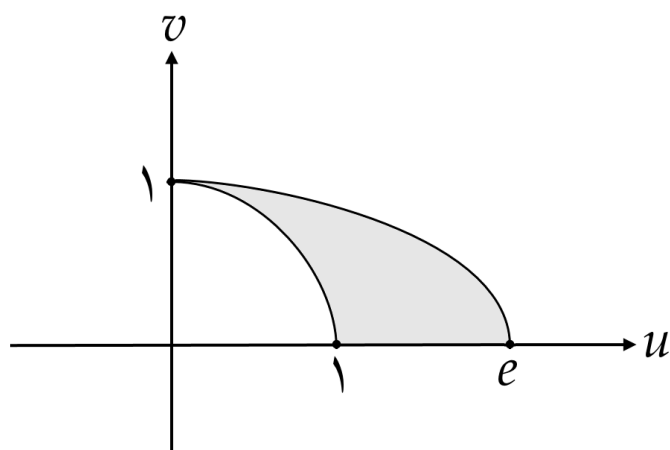
پس تصویر D تحت $w = e^z$ تصویر شکل ۶.۵ است.

برای نگاشت‌ها سه نوع مسئله زیر را داریم.

مسئله نوع اول: ناحیه D در صفحه z و نگاشت $w = f(z)$ داده می‌شود و مطلوب



شکل ۵.۵



شکل ۶.۵

$f(D)$ است. حل این گونه مسائل مشابه با مثال‌های فوق قابل انجام است.

مسئله نوع دوم: نگاشت $w = f(D)$ و ناحیه $D' = f(D)$ در صفحه w داده می‌شود. مطلوب تعیین D است. این نوع مسائل هم شبه مسائل نوع اول است. لیکن حل آن بسیار آسان است چون مرز میدان $D' = f(D)$ به وسیله منحنی‌هایی مانند $G(u, v) = 0$ داده می‌شود و از $w = f(z)$ داریم $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$. از قرار دادن آنها در $G(u, v) = 0$ فوراً به دست می‌آید.

مثال ۷.۵. تصویر معکوس منحنی $v = u^2$ را تحت $w = z^2$ به دست آورید.

حل. داریم:

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy, \quad v = u^2.$$

پس تصویر می‌شود:

$$(x^2 - y^2)^2 = 2xy \quad x > 0, \quad y > 0.$$

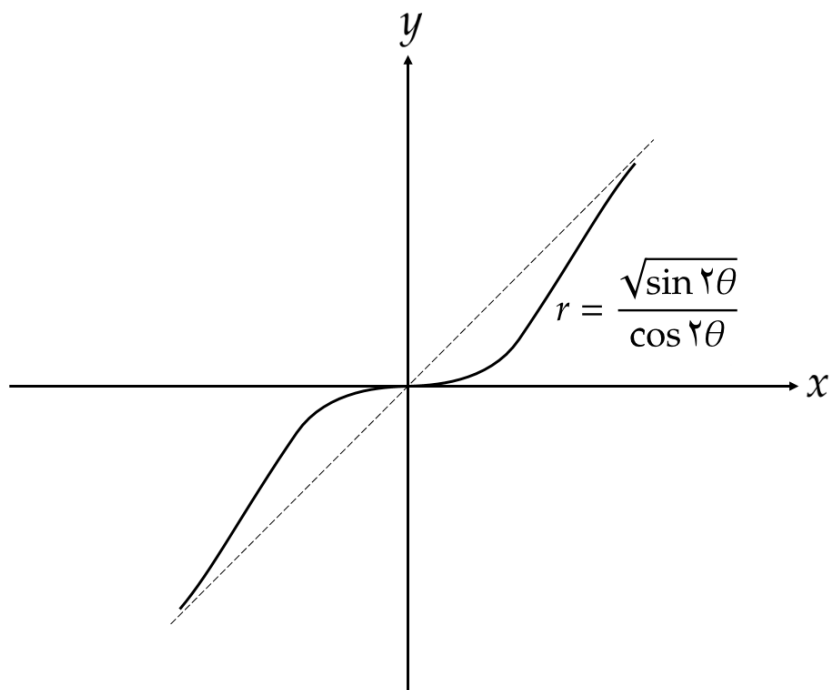
برای مشخص شدن تصویر آن را در مختصات قطبی می‌نویسیم. تصویر در شکل ۷.۵ ترسیم شده است.

$$r^2 = \frac{\sin 2\theta}{\cos^2 2\theta} \implies r = \frac{\sqrt{\sin 2\theta}}{\cos 2\theta}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}.$$

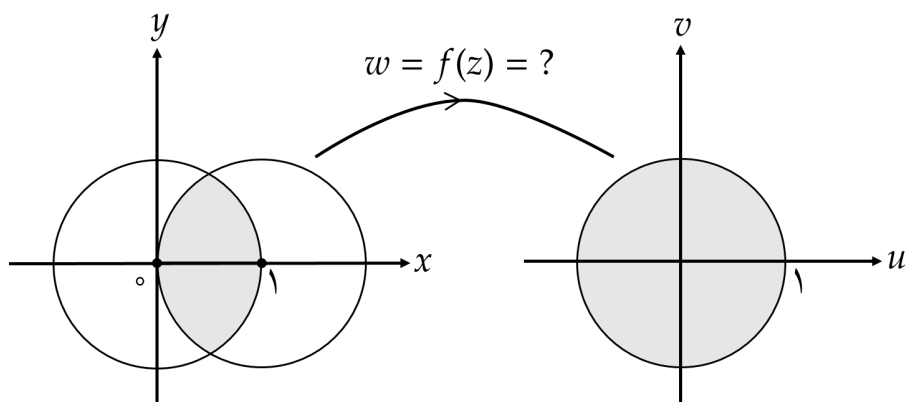
مسئله نوع سوم: میدان D در صفحه z و میدان D' در صفحه w داده می‌شود. مطلوب تعیین $f: D \rightarrow D'$ است به طوری که f تحلیلی و یک به یک و پوشا باشد.

تذکره ۱. تبدیل میدان «بد» به میدان «خوب» از این نوع مسائل است. D را به عنوان میدان «بد» می‌گیریم و D' را به عنوان میدان «خوب».

۲. حل این نوع مسئله با معلومات فعلی نه چندان که ساده نیست بلکه غیرممکن است.



شکل ۷.۵



شکل ۸.۵

مثال ۸.۵. ناحیه بین دو دایره $|z| = ۱$ و $|z - ۱| = ۱$ را با یک تابع تحلیلی به صورت یک‌به‌یک و پوشا بر دیسک واحد بنگارید. (به شکل ۸.۵ توجه کنید.)

برای حل این‌گونه مسائل می‌بایستی شناختی از رفتار هندسی نگاشت‌های شناخته شده داشته باشیم تا با استفاده از آنها مسئله را حل کنید. این شناخت در بخش ۲.۵ داده می‌شود.

تمرین ۱.۵

۱. تعیین کنید هر یک از توابع زیر در کدام نقاط همدیس است.

$$f(z) = z^4 + z^2 \quad (\text{آ}) \quad f(z) = e^{z^2} \quad (\text{ج})$$

$$f(z) = \sin z \quad (\text{ب}) \quad f(z) = \tan z \quad (\text{د})$$

۲. تصویر هر یک از نواحی زیر را تحت نگاشت $w = (۱ - i)z + ۲ - i$ به دست آورید.

$$y = -۱ \quad (\text{آ}) \quad \text{سه‌می } y = ۱ - x^2 \quad (\text{ج})$$

$$|z - ۳| < ۲ \quad (\text{ب}) \quad \{x > ۰, y > ۰, x + ۲y > ۳\} \quad (\text{د})$$

۳. تصویر هر یک از نواحی زیر را تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ به دست آورید.

$$x^2 - y^2 = ۱ \quad (\text{آ}) \quad \{-۲ < x < -۱, |y| < ۱\} \quad (\text{ج})$$

$$x = y^2 \quad (\text{ب}) \quad \{y < ۱ - x^2, x > ۰, y > ۰\} \quad (\text{د})$$

۴. تصویر نواحی زیر را تحت نگاشت $w = z^2$ به دست آورید.

۴. (آ) خط $x = 2$ و $y = 3$. (ج) میدان $|z| > 1$ و $|\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{4}$.
 (ب) خط $2x + 3y = 1$. (د) $\{y > x^2, x > 0, y > 0\}$

۵. تصویر نواحی زیر را تحت $w = z^3$ تعیین کنید.

- (آ) خط $x = 1$ و $y = -1$. (ج) میدان $|z| < 1$ و $|\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{6}$.
 (ب) خط $x + y = 1$. (د) $\{y > x^2, x > 0, y > 0\}$

۶. تصویر نواحی زیر را تحت $w = e^z$ به دست آورید.

- (آ) خط $x + y = 1$. (ج) $\{x > 0, y > 0, x < 1 - y^2\}$.
 (ب) منحنی $x^2 - y^2 = 1$. (د) $\{0 < y < \frac{\pi}{4}, x > 0\}$

۷. تصویر نواحی زیر را تحت شاخه اصلی نگاشت $w = \sqrt{z}$ به دست آورید.

- (آ) خط $x - y = 1$. (ج) $\{x > 0, y > 0, x + y < 1\}$.
 (ب) نیم‌دایره $x^2 + y^2 = 1, y > 0$. (د) $\{y > 0, y < 1 - x^2\}$

۸. تصویر نواحی زیر را تحت شاخه اصلی نگاشت $w = \sqrt[4]{z}$ تعیین کنید.

- (آ) خط $x = 1$ و $y = 1$. (ج) $\{x > 0, y = 1 - x^2\}$.
 (ب) خط $x + y = 1$. (د) $\{x > 0, y > 0, x + y < 1\}$

۹. تصویر هر یک از میدان‌های زیر را تحت $w = \sin z$ بیابید.

- (آ) خط $x = \frac{\pi}{4}$ و $y = 1$. (ج) $\{y > 0, |x| < \frac{\pi}{4}\}$.
 (ب) خط $x = \frac{\pi}{4}$ و $y = 0$. (د) $\{1 < y < 2, |x| < \frac{\pi}{4}\}$

۲.۵ تبدیل مبیوس

هدف از این بخش بررسی خواص هندسی تبدیل مبیوس است که رکن اساسی در حل مسایل نوع سوم نگاشت‌ها، اشاره شده در بخش ۱.۵، می‌باشد.

تبدیل مبیوس: نگاشت زیر را که در آن a و b و c و d اعداد ثابت‌اند. نگاشت مبیوس یا تبدیل مبیوس یا تبدیل دوخطی گویند.

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

توجه کنید اگر $ad - bc = 0$ در این صورت این نگاشت به $w = \frac{a}{c}$ یعنی تابع ثابت تبدیل می‌گردد. برای بررسی هندسی این نگاشت ابتدا دو حالت خاص آن را بررسی می‌کنیم. با استفاده از نتایجی که از این دو حالت به دست می‌آید حالت کلی را بررسی می‌کنیم.

حالت خاص ۱: نگاشت خطی $w = az + b$.

بسته به این که مقادیر a و b چه باشد این نگاشت اعمال هندسی گوناگونی را تشریح می‌کند.

الف: $a = 1$ و $b \neq 0$ یعنی $w = z + b$.

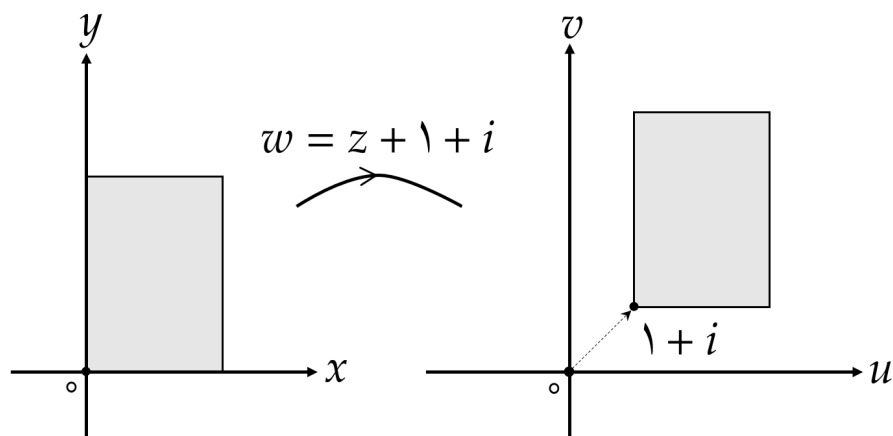
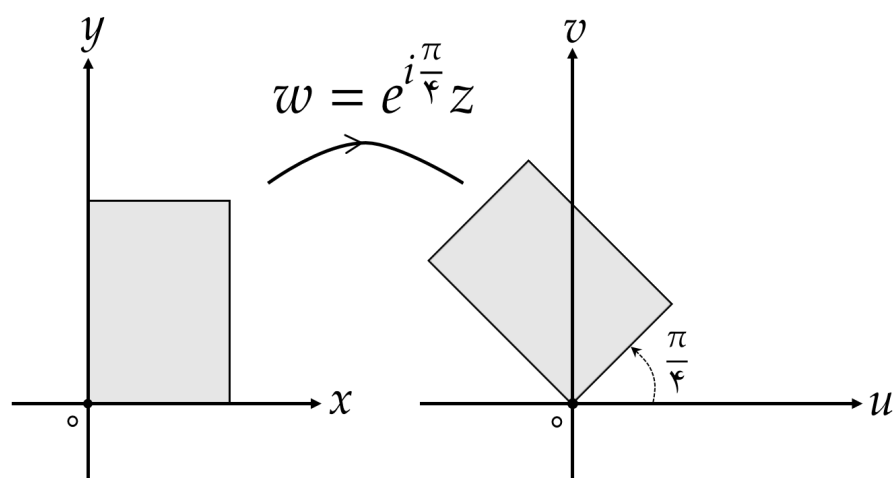
هر نقطه مانند z از صفحه دامن به اندازه بردار b انتقال می‌یابد تا نقطه تصویر را به دست دهد. پس در این حالت یک انتقال داریم. (به شکل ۹.۵ توجه کنید.)

ب: $a = e^{i\theta}$ و $b = 0$ یعنی $w = e^{i\theta}z$.

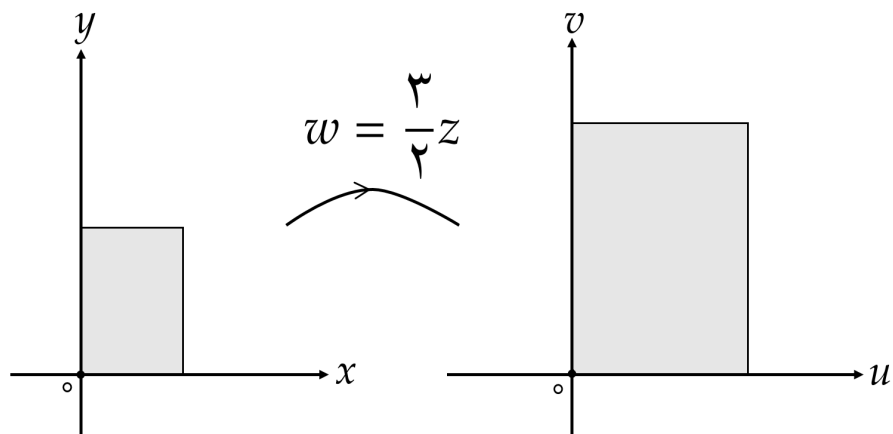
در این حالت $|w| = |z|$ و $\arg w = \arg z + \theta$. یعنی هر نقطه از صفحه z به اندازه زاویه θ حول مبدأ دوران می‌کند تا نقطه تصویر در صفحه w به دست آید. پس در این حالت یک دوران داریم. (به شکل ۱۰.۵ توجه کنید.)

ج: $a = r > 0$ و $b = 0$ یعنی $w = rz$.

در این حالت $\arg w = \arg z$ و $|w| = r|z|$. یعنی فاصله هر نقطه در r ضرب می‌شود و در امتداد شعاع خود جابه‌جا می‌شود تا نقطه تصویر در صفحه w به دست آید.

شکل ۹.۵: نگاشت انتقال $z \rightarrow z + 1 + i$ شکل ۱۰.۵: نگاشت دوران به اندازه زاویه $\frac{\pi}{4}$

اگر $r_0 > 1$ باشد افزایش طول داریم. در این حالت می‌گوییم نگاشت انبساطی است. اگر $0 < r_0 < 1$ باشد کاهش طول داریم. در این حالت می‌گویند نگاشت انقباضی است. (به شکل ۱۱.۵ توجه کنید.)



شکل ۱۱.۵: نگاشت تجانس با ضریب $\frac{3}{2}$

د: $w = az + b$ و $a \neq 0$.

در این حالت $a = r_0 e^{i\theta_0}$ است و $w = r_0 e^{i\theta_0} z + b$. حال بگیرید $w_1 = e^{i\theta_0} z$ که یک دوران به اندازه θ_0 است. $w_2 = r_0 w_1$ که یک انبساط یا انقباض به اندازه r_0 و سرانجام $w = w_2 + b$ که یک انتقال است.

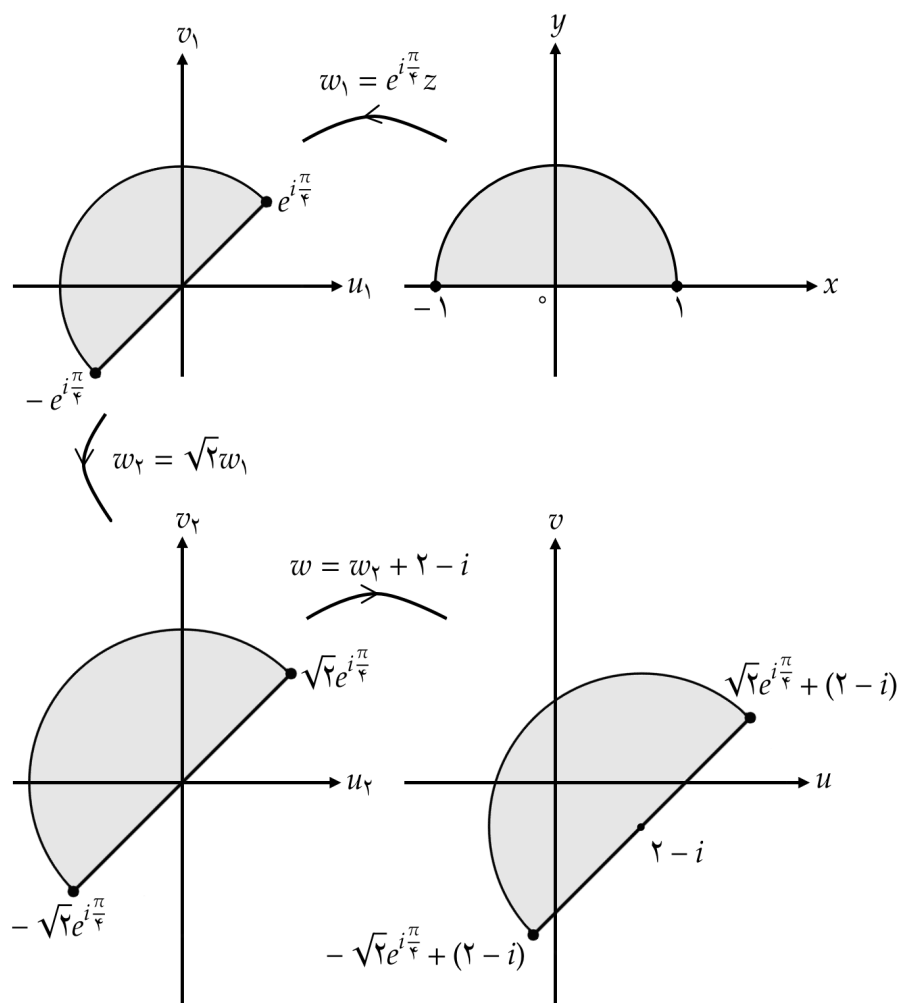
مثال ۹.۵. تصویر نیم‌دایره بالائی دایره واحد را تحت نگاشت $w = (1+i)z + 2-i$ به دست آورید.

حل. روش اول: این نگاشت را به صورت زیر می‌توان نوشت.

$$w = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z + 2 - i.$$

حال آن را متوالیاً روی این نیم‌دایره اعمال می‌کنیم. (به شکل ۱۲.۵ توجه کنید.) پس تصویر نیم‌دایره‌ای به مرکز $2-i$ و شعاع $\sqrt{2}$ است که در سمت چپ خط $v = u - 3$ یا ناحیه $v > u - 3$ قرار دارد. پس تصویر می‌شود:

$$\{w : |w - 2 + i| < \sqrt{2}, v > u - 3\}.$$

شکل ۱۲.۵: نگاشت $z \rightarrow (1+i)z + 2-i$

تذکره. البته تعیین تصویر با روش جبری که در بخش گذشته به کار بردیم امکان‌پذیر است. لیکن آن روش مفاهیم هندسی را در بر ندارد و در نتیجه به حل مسئله نوع سوم نگاشت‌ها کمکی نمی‌کند.

روش جبری: روش دوم به صورت زیر است.

$$w = (1+i)z + 2-i \implies z = \frac{1}{1+i}(w - 2 + i)$$

9

$$u + iv = (1+i)(x + iy) + 2 - i.$$

پس:

$$u = x - y + 2, \quad v = y + x - 1.$$

از این دو معادله به دست می آوریم $y = \frac{1}{4}(v - u - 3)$. پس:

$$|z| < 1 \implies \left| \frac{w - 2 + i}{1 + i} \right| < 1 \implies |w - 2 + i| < \sqrt{2}.$$

9

$$y > 0 \implies \frac{1}{4}(v - u - 3) > 0 \implies v > u - 3.$$

نکته. نگاشت خطی هر شکل هندسی را به شکل هندسی مشابه آن می نگارد. پس خاصیت زیر برقرار است.

خاصیت ۲.۵. نگاشت خطی، خط را به خط و دایره را به دایره می نگارد.

حالت خاص ۲: نگاشت معکوس $w = \frac{1}{z}$.

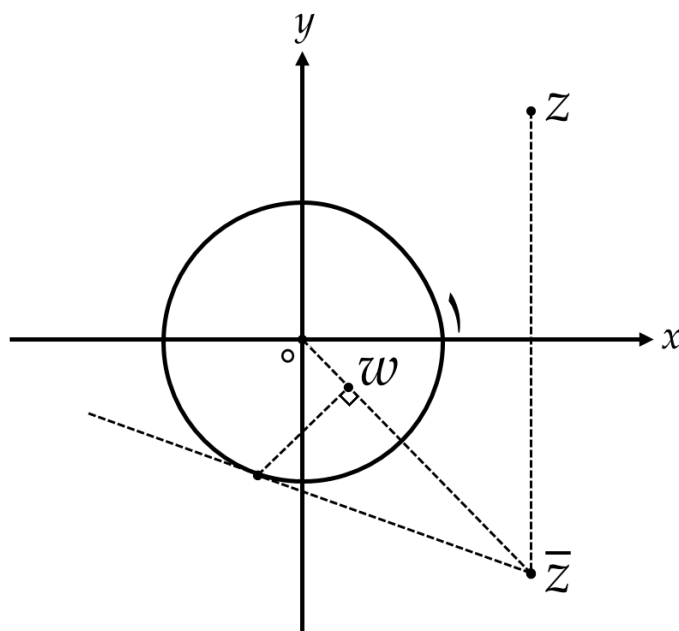
در مختصات قطبی داریم:

$$w = Re^{i\phi} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

پس تحت نگاشت معکوس $R = \frac{1}{r}$ و $\phi = -\theta$. یعنی تصویر نقطه z در امتداد شعاع $\bar{z}$ و به فاصله $\frac{1}{r}$ تا مبدأ قرار دارد. به این ترتیب نقاط خارج دایره واحد به داخل دایره واحد و

نقاط داخل دایره واحد به خارج دایره واحد، نقاط نیم‌صفحه بالائی به نیم‌صفحه پایینی و نیم‌صفحه پایینی به نیم‌صفحه بالائی نگاشته می‌شود.

به صورت هندسی نقاط تصویر به صورت ذیل قابل وصول است. ابتدا از روی نقطه z داده شده $\bar{z}$ را در صفحه z مشخص و از این نقطه بر دایره واحد خط مماس را رسم کنید. از نقطه تماس خط عمود بر امتداد شعاعی که از $\bar{z}$ می‌گذرد را رسم کنید. نقطه تلاقی این دو خط همان $w = \frac{1}{z}$ است. (به شکل ۱۳.۵ توجه کنید.)



شکل ۱۳.۵: نگاشت $z \rightarrow w = \frac{1}{z}$

یک خاصیت با ارزش این نگاشت، خاصیت زیر است.

خاصیت ۳.۵. نگاشت معکوس $w = \frac{1}{z}$ خط و دایره را به خط یا دایره می‌نگارد.

علت. صورت کلی معادله خط و دایره به شکل زیر است.

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0.$$

که در آن A, B, C و D اعدادی حقیقی و ثابت هستند. برای $A \neq 0$ دایره داریم و برای $A = 0$ خط داریم. این معادله بر حسب z و $\bar{z}$ به صورت زیر در می آید.

$$Az\bar{z} + B\frac{z + \bar{z}}{2} + C\frac{z - \bar{z}}{2i} + D = 0.$$

برای به دست آوردن تصویر کافیسست در این معادله z را با $\frac{1}{w}$ و $\bar{z}$ را با $\frac{1}{\bar{w}}$ جایگزین کنیم تا به دست آوریم.

$$A\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\bar{w}} + B\frac{\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}}}{2} + C\frac{\frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}}}{2i} + D = 0.$$

یا

$$A + B\frac{w + \bar{w}}{2} - C\frac{w - \bar{w}}{2i} + Dw\bar{w} = 0.$$

یا

$$D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0.$$

که معادله خط یا دایره در صفحه w است.

تذکره ۱) اگر $D = 0$ و $A \neq 0$ در صفحه z یک دایره داریم که از مبدأ می گذرد و در صفحه w تصویر یک خط است که از مبدأ نمی گذرد.

۲) $D = 0$ و $A = 0$. در این حالت در صفحه z یک خط داریم که از مبدأ می گذرد. در صفحه w تصویر نیز یک خط است که از مبدأ می گذرد.

۳) $D \neq 0$ و $A = 0$. در این حالت در صفحه z یک خط داریم که از مبدأ نمی گذرد لیکن تصویر یک دایره است که از مبدأ می گذرد.

۴) $D \neq 0$ و $A \neq 0$. در این حالت در صفحه z یک دایره داریم که از مبدأ نمی گذرد. در صفحه w تصویر نیز یک دایره است که از مبدأ نمی گذرد.

حالت کلی نگاشت مبیوس: صورت کلی تبدیل مبیوس عبارتست از

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

۱. اگر $c \neq 0$ در این صورت $ad \neq 0$ و $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ که همان نگاشت خطی است.

۲. اگر $c \neq 0$ آن را به صورت زیر می‌توان نوشت.

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}.$$

حال بگیرد $w_1 = cz + d$ و $w_2 = \frac{1}{w_1}$ و $w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} w_2$. پس برای $c \neq 0$ یک تبدیل مبیوس ترکیبی از دو نگاشت خطی و یک نگاشت معکوس است. پس خاصیت زیر را داریم.

خاصیت ۴.۵. یک تبدیل مبیوس خط و دایره را بر خط یا دایره می‌نگارد.

۳. مشتق آن را به صورت زیر داریم.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

پس این نگاشت برای $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ همدیس است.

۴. برای $cz + d \neq 0$ نگاشت مبیوس را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$Azw + Bz + cw + D = 0.$$

که هم نسبت به z و هم نسبت به w خطی است. به این دلیل آن را دوخطی نیز گویند.

۵. نگاشت معکوس یک نگاشت مبیوس خود یک نگاشت مبیوس است.

۶. نگاشت مبیوس را از دامنه $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ به صورت زیر می‌توان به دامنه $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ گسترش داد.

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$$

$$T(-\frac{d}{c}) = \infty$$

$$T(\infty) = \frac{a}{c}.$$

توجه کنید $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ، یک به یک و پوشا است. برای بیان خاصیت دیگری از نگاشت مبیوس مفهوم زیر را داریم.

نقطه ثابت: نقطه z_0 را یک نقطه ثابت تابع $f(z)$ گوییم هرگاه $f(z_0) = z_0$.

خاصیت ۵.۵. هر نگاشت مبیوس حداکثر دو نقطه ثابت دارد. مگر این که نگاشت یکسان $w = z$ باشد.

علت. اگر نگاشت $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ دارای نقطه ثابت z_0 باشد در این صورت

$$\frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = z_0.$$

یا

$$cz_0^2 - (a-d)z_0 - b = 0.$$

اگر $c \neq 0$ در این حالت دو نقطه ثابت داریم. اگر $c = 0$ و $a-d \neq 0$ یک نقطه ثابت داریم. اگر $c = 0$ و $a-d = 0$ باشد در این حالت نگاشت یک انتقال است و نقطه ثابت ندارد. اگر $c = 0$ ، $a-d = 0$ و $b = 0$ باشد در این حالت $w = z$ یا نگاشت یکسان داریم. در این حالت تمام نقاط $\mathbb{C}$ ثابت اند.

مثال ۵.۱۰. نقاط ثابت نگاشت مبیوس $w = \frac{z+i}{z-1}$ را بیابید.

حل. باید معادله $\frac{z+i}{z-1} = z$ را برای z حل کنیم.

$$\frac{z+i}{z-1} = z \implies z^2 - 2z - i = 0 \implies z = 1 \pm \sqrt{1+i}.$$

پس $z = 1 \pm \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$ دو نقطه ثابت است.

خاصیت ۶.۵ (قضیه سه نقطه و سه تصویر). فرض کنید سه نقطه متمایز z_1 ، z_2 و z_3 در صفحه مختلط توسعه یافته z ، یعنی $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ و سه نقطه متمایز w_1 ، w_2 و w_3 در صفحه مختلط توسعه یافته w داده شده باشد. در این صورت نگاشت مبیوس یگانه

مانند $w = T(z)$ موجود است به طوری که $T(z_k) = w_k$ برای $k = 1, 2, 3$. این نگاشت با استفاده از فرمول زیر قابل تعیین است.

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

که در آن اگر یکی از داده‌ها ∞ باشد کسر مربوط به آن حذف می‌گردد.

نکته. فرمول فوق را نسبت صلیبی گویند.

علت. دو نگاشت مبیوس زیر را در نظر بگیرید.

$$F(w) = \frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}, \quad G(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

برای آنها داریم.

$$F(w_1) = G(z_1) = 0.$$

$$F(w_2) = G(z_2) = 0.$$

$$F(w_3) = G(z_3) = \infty.$$

حال بگیریم $T = F^{-1}G$. در این صورت طبق ویژگی ۵ فوق $T(z)$ یک نگاشت مبیوس است. $T(z)$ سه نقطه ثابت z_1, z_2, z_3 دارد که به ترتیب آنها را بر سه نقطه w_1, w_2, w_3 می‌نگارد. یعنی $T(z_k) = w_k$ برای $k = 1, 2, 3$.

برای یگانگی این نگاشت فرض کنید دو نگاشت $T_1(z)$ و $T_2(z)$ با مشخصات فوق موجود باشد. در این صورت $T(z) = T_1^{-1}T_2(z)$ یک نگاشت مبیوس با سه نقطه ثابت متمایز z_1, z_2, z_3 است. پس طبق خاصیت ۵.۵ تابع یکسان است. یعنی $T_1(z) = T_2(z)$ یا $T_1T_2^{-1}(z) = z$.

مثال ۱۱.۵. نگاشت مبیوسی را بیابید که $0, 1$ و i را بر سه نقطه $i, -2$ و ∞ بنگارد.

حل. چون $w_3 = \infty$ است پس کسر مربوط به آن حذف می‌گردد. پس نسبت صلیبی

می‌شود:

$$\frac{w - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

یا

$$\frac{w-i}{-2-i} = \frac{z-i}{z-i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \implies w = -(1-i)(2-i) \frac{z}{z-i} + i$$

یا

$$w = \frac{(4i-1)z+1}{z-i}.$$

تذکره. ممکن است به نظر برسد در نگاشت مبیوس $w = \frac{az+b}{cz+d}$ چهار ثابت اختیاری داریم. از قرار دادن نقاط (z_1, w_1) ، (z_2, w_2) و (z_3, w_3) در آن، سه معادله با چهار مجهول به دست می آید و از حل آنها a, b, c و d به دست می آید. باید گفتن اولاً در تابع فوق فقط سه ثابت انتخابی داریم چون اگر $d \neq 0$ باشد از تقسیم صورت و مخرج بر d سه ثابت اختیاری ظاهر می شود. ثانیاً حل آن دستگاه سه معادله و سه مجهول در کلیت آسان نیست به خصوص وقتی که یکی از داده ها ∞ باشد.

دو نگاشت زیر در حل مسائل نوع سوم، یعنی D و D' داده شده و مطلوب $f: D \rightarrow D'$ تحلیلی، یک به یک و پوشا، زیاد استفاده می گردد.

نگاشت نیم صفحه بالائی به دیسک واحد: اگر $z_0 > 0$ باشد آن گاه نگاشت زیر نیم صفحه بالائی را به صورت یک به یک و پوشا و همدیس بر دیسک واحد می نگارد و z_0 را به مبدأ می برد.

$$w = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

علت. اگر z در نیم صفحه بالائی باشد، $|z - \bar{z}_0| < |z - z_0|$. پس برای z در نیم صفحه بالائی داریم $|w| < 1$. اگر z روی محور حقیقی باشد در این صورت $|z - \bar{z}_0| = |z - z_0|$. پس $|w| = 1$. اگر z در نیم صفحه پایینی باشد در این صورت $|z - \bar{z}_0| > |z - z_0|$ پس $|w| > 1$. به این ترتیب هر نقطه از نیم صفحه بالائی به داخل دیسک واحد و هر نقطه از محور حقیقی بر محور حقیقی و هر نقطه از نیم صفحه پایینی بر یک نقطه از نیم صفحه پایینی نگاشته می شود. چون نگاشت مبیوس یک به یک و پوشا است پس تصویر نیم صفحه بالائی داخل دیسک واحد است.

نکته. در استفاده از نگاشت فوق انتخاب z_0 بر عهده استفاده کننده است. بهترین انتخاب برای z_0 ، $z_0 = i$ است چون محاسبه‌های بعدی ساده‌تر انجام می‌شود. یعنی نگاشت مطلوب $w = \frac{z-i}{z+i}$ است.

نگاشت دوم را به صورت زیر داریم.

دیسک واحد بر دیسک واحد: اگر z_0 در داخل دیسک واحد باشد آن گاه نگاشت

$$w = \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1}$$

به صورت یک به یک و پوشا دیسک واحد را بر دیسک واحد و نقطه z_0 را بر 0 می‌نگارد.

علت. اگر z یک نقطه بر روی دایره واحد باشد آن گاه $z\bar{z} = 1$. پس برای این نقطه داریم:

$$|w| = \left| \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1} \right| = \left| \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - z\bar{z}} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z| \cdot |\bar{z}_0 - \bar{z}|} = \frac{1}{|z|} = 1.$$

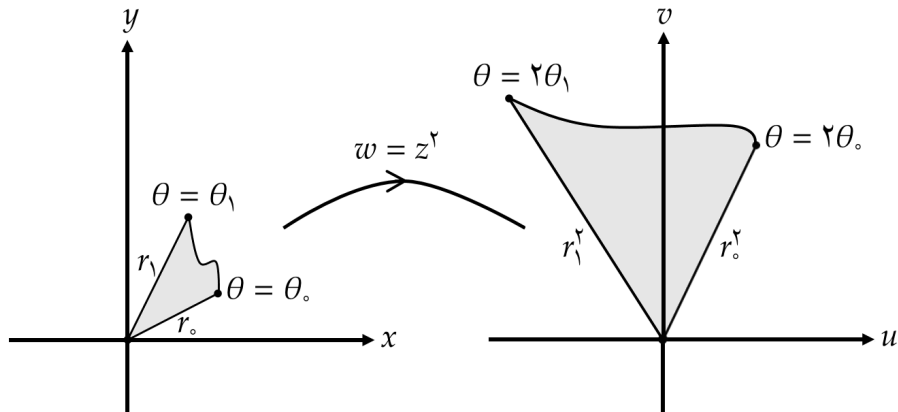
پس تصویر هر نقطه از دایره واحد، یک نقطه از دایره واحد در صفحه w است. چون معکوس این نگاشت به شکل خود آن است پس تصویر معکوس هر نقطه از دایره واحد یک نقطه از دایره واحد است. به این ترتیب دایره واحد به صورت یک به یک و پوشا نگاشته می‌شود. پس داخل دایره واحد می‌بایستی بر داخل دایره واحد یا خارج آن نگاشته شود. چون z_0 بر 0 نگاشته می‌شود پس داخل دایره واحد به صورت یک به یک و پوشا بر داخل دایره واحد نگاشته می‌شود.

از سایر نگاشت‌ها دو نگاشت زیر در حل مسئله نوع سوم مفیدتراند.

نگاشت $w = z^n$: برای ارتباط بین نقاط و تصویر آنها از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. برای $z = re^{i\theta}$ و $w = Re^{i\phi}$ ، که در آن $r, R \geq 0$ و $-\pi < \theta, \phi \leq \pi$ ، داریم.

$$w = z^n \implies Re^{i\phi} = r^n e^{in\theta} \implies R = r^n, \phi = n\theta.$$

یعنی آوند تصویر هر نقطه n برابر و طول آن به توان n می‌رسد. پس تصویر شعاع $\theta = \theta_0$ در صفحه z شعاع $\phi = n\theta$ در صفحه w است. در نتیجه میدان $\theta_0 < \theta < \theta_1$ بر میدان $n\theta_0 < \theta < n\theta_1$ نگاشته می‌شود. (به شکل ۱۴.۵ توجه کنید).



شکل ۱۴.۵: نگاشت $z \rightarrow z^2$

نکته. مطالب فوق برای شاخه اصلی $w = z^{\frac{1}{n}}$ نیز درست است.

نگاشت $w = e^z$: برای بررسی این نگاشت می‌گیریم:

$$z = x + iy, \quad w = Re^{i\phi}$$

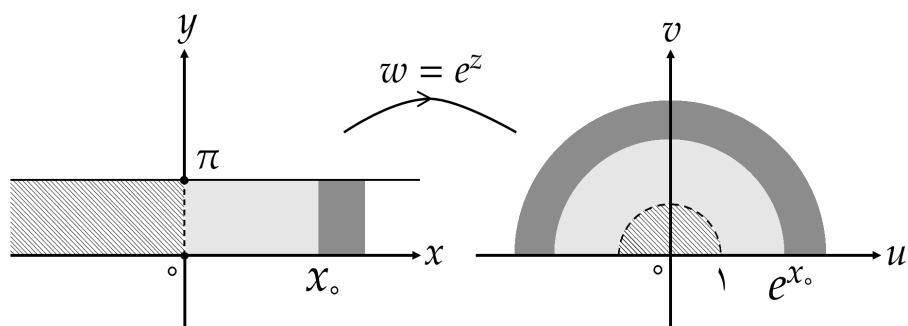
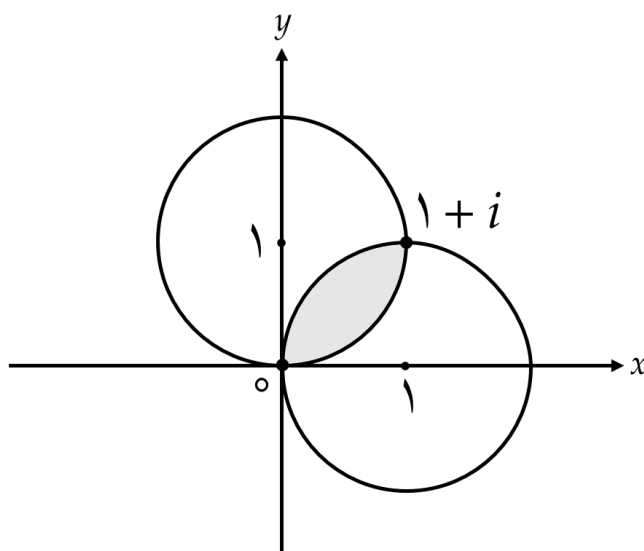
$$w = e^z \implies Re^{i\phi} = e^x \cdot e^{iy} \implies R = e^x, \quad \phi = y.$$

پس تحت این نگاشت میدان $-\infty < x < \infty$ و $0 < y < \pi$ به صورت یک به یک و پوشا بر نیم صفحه بالائی $0 < \phi < \pi$ و $R > 0$ نگاشته می‌شود. (به شکل ۱۵.۵ توجه کنید).

مثال ۱۲.۵. میدان بین دو دایره $|z - 1| = 1$ و $|z - i| = 1$ را به صورت یک به یک و پوشا بر دیسک واحد بنگارید.

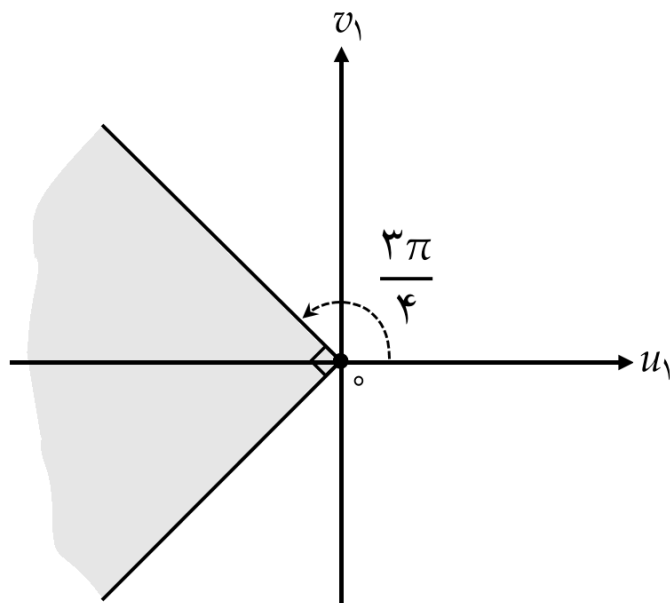
حل. راه حل را با استفاده از شکل بررسی می‌کنیم. میدان بین دو دایره $|z - 1| = 1$ و $|z - i| = 1$ به صورت شکل ۱۶.۵ می‌باشد.

می‌دانیم تبدیل مبیوس دایره را به خط یا دایره تبدیل می‌کند. اگر $\infty \mapsto 1$ و $0 \mapsto i + 1$ ببریم تصویر میدان شکل ۱۶.۵ یک زاویه خواهد شد. پس $w_1 = \frac{z-1-i}{z}$ میدان داده شده را به تصویر شکل ۱۷.۵ می‌نگارد.

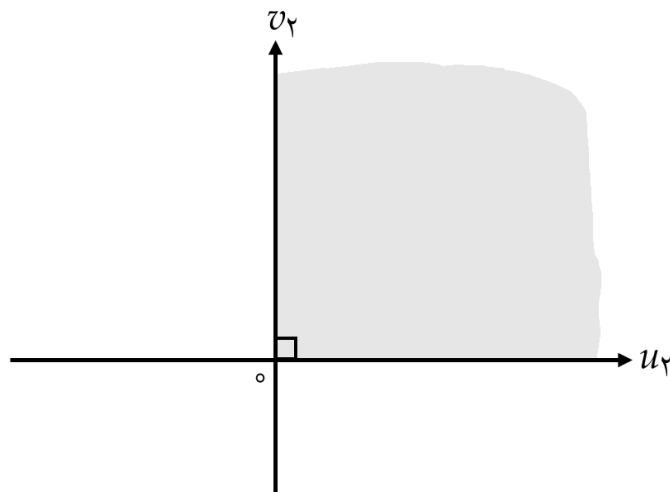
شکل ۱۵.۵: نگاشت $z \rightarrow e^z$.شکل ۱۶.۵: میدان بین دو دایره $|z - 1| = 1$ و $|z - i| = 1$.

اگر این زاویه یک ضلع آن قسمت مثبت محور حقیقی باشد نگاشت توانی آن را به نیم صفحه تبدیل می کند. با دوران $\frac{3\pi}{4}$ در خلاف جهت مثلثاتی توسط نگاشت $w_2 = e^{-\frac{3}{4}\pi i} w_1$ ، تصویر شکل ۱۸.۵ به دست می آید.

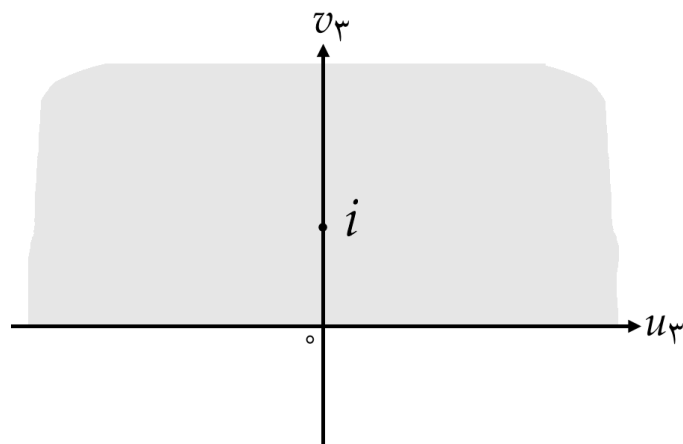
حال با $w_3 = w_2$ نیم صفحه بالائی، یعنی تصویر شکل ۱۹.۵ حاصل می شود.



شکل ۱۷.۵

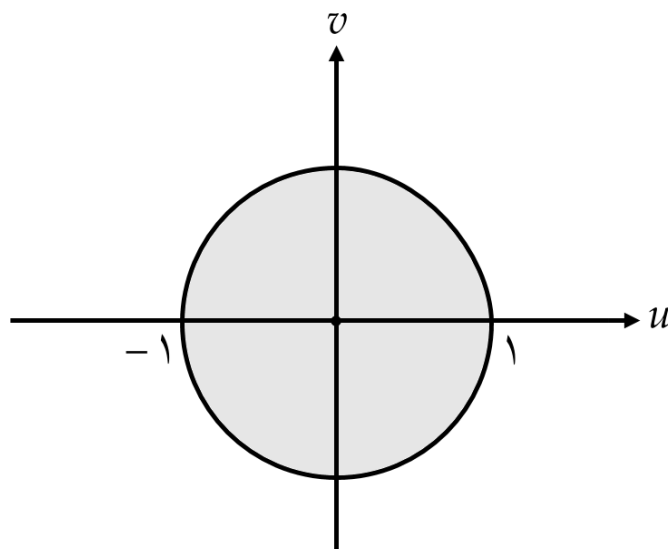


شکل ۱۸.۵



شکل ۱۹.۵

بالاخره با نگاشت $w = \frac{w_3 - i}{w_3 + i}$ نیم صفحه بالائی را بر دیسک واحد، یعنی تصویر شکل ۲۰.۵ می‌نگاریم.



شکل ۲۰.۵

ترکیب این نگاشت‌ها نگاشت مطلوب است که به صورت زیر است.

$$w = \frac{(z-1-i)^2 - z^2}{(z-1-i)^2 + z^2}.$$

نکته. توجه کنید حل مسئله معادله لاپلاس روی دیسک واحد با شرط مرزی صفر با استفاده از صورت قطبی معادله لاپلاس و روش‌های فصل ۱ قابل انجام است. لیکن روی میدان بین دو دایره مثال قبل توسط مطالب فصل ۱ قابل حل نیست.

مثال ۱۳.۵. تمام صفحه z غیر از قسمت بالائی نیم‌دایره واحد را به صورت یک به یک و پوشا بر دیسک واحد بنگارید.

تذکره. برای حل این گونه مسائل می‌بایستی میدان اولیه را به نیم‌صفحه بالائی بنگاریم و برای نیم‌صفحه بالائی می‌بایستی یک زاویه به راس مبدأ داشته باشیم و برای تشکیل زاویه می‌بایستی از تبدیل مبیوس استفاده کرد و پاره خط یا قوسی از دایره را به شعاع تبدیل کرد.

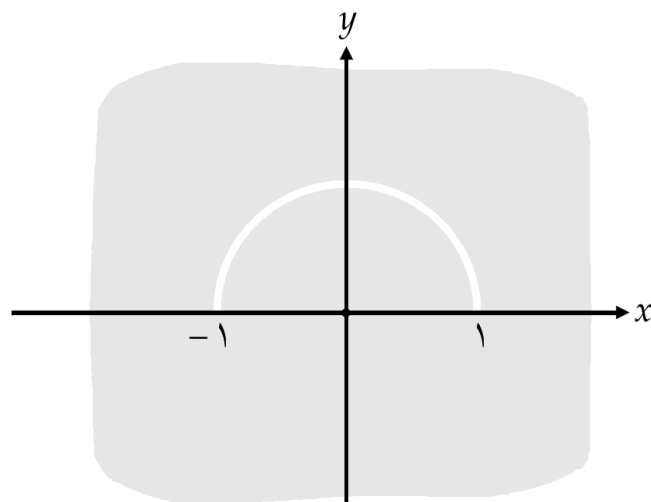
حل. مجموعه دامنه را به صورت شکل ۲۱.۵ داریم.

ابتدا این قوس را به یک شعاع تبدیل می‌کنیم. با نگاشت مبیوس

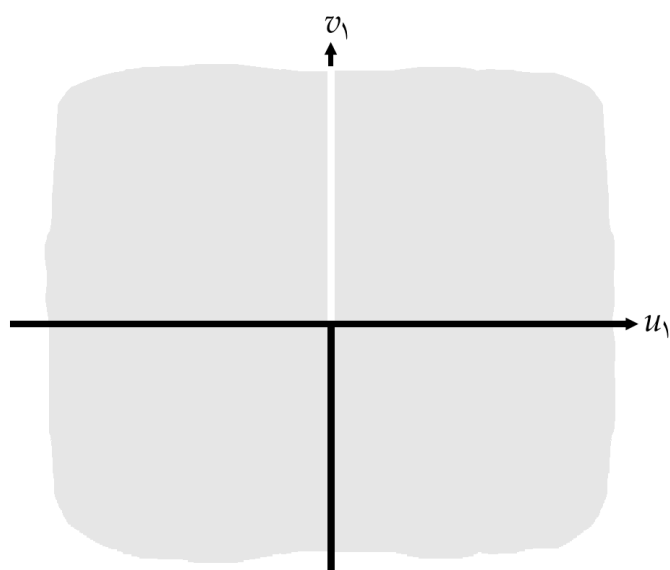
$$w_1 = \frac{z-1}{z+1}$$

تصویر قوس، قسمت مثبت محور موهومی می‌شود و تصویر به صورت شکل ۲۲.۵ حاصل می‌گردد. تحت دوران $w_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} w_1$ تصویر شکل ۲۳.۵ به دست می‌آید. با استفاده از شاخه اصلی رادیکال آن را به نیم‌صفحه سمت چپ، یعنی شکل ۲۴.۵ تبدیل می‌کنیم. تحت دوران $w_4 = e^{i\frac{\pi}{2}} w_3$ نیم‌صفحه بالایی به دست می‌آید. حال نگاشت $w = \frac{w_4 - i}{w_4 + i}$ دیسک واحد ۲۰.۵ را نتیجه می‌دهد. پس جواب نگاشت زیر است.

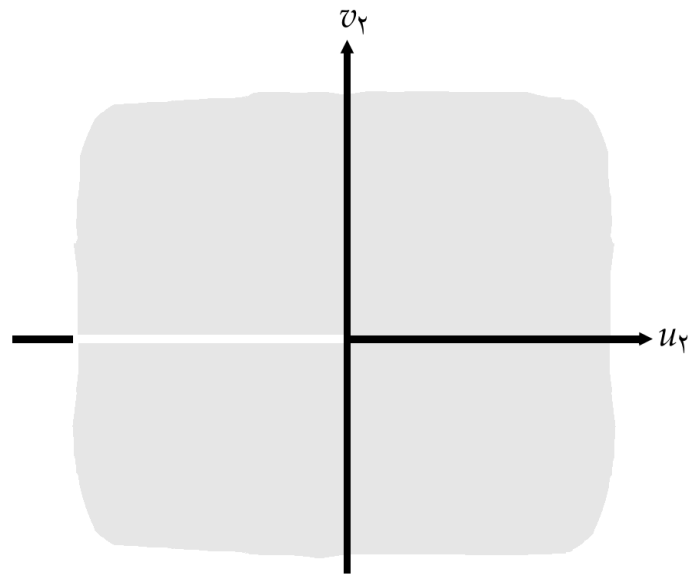
$$w = \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} - i}{e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} + i}.$$



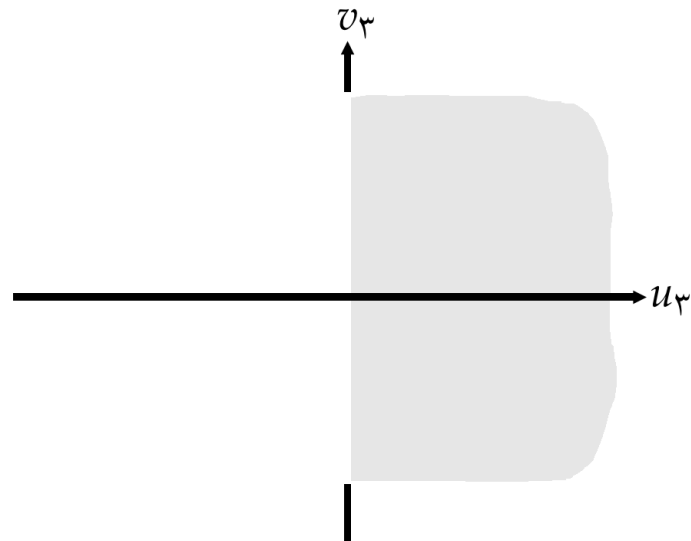
شکل ۲۱.۵



شکل ۲۲.۵



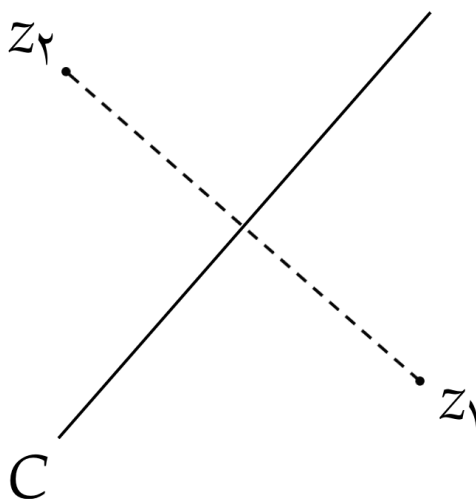
شکل ۲۳.۵



شکل ۲۴.۵

تذکره. در فصل ۱ دیدیم که مسائل معادله پوآسن روی میدان بین دو دایره هم‌مرکز با استفاده از صورت قطبی قابل حل است. لیکن اگر این میدان یک میدان بین دو دایره غیر هم‌مرکز غیرمتقاطع یا میدان بین یک خط و یک دایره غیرمتقاطع باشد، دیگر با روش‌های فصل ۱ قابل حل نیست. حل اینگونه مسائل با استفاده از مطالب زیر میسر می‌گردد. در ابتدا به بیان مفهوم دو نقطه معکوس نسبت به خط و دایره می‌پردازیم.

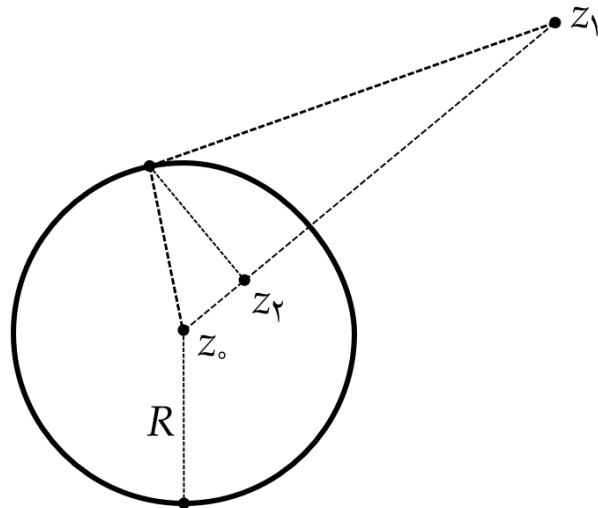
تعریف ۱.۵. دو نقطه z_1 و z_2 را که نسبت به خط C قرینه یکدیگر هستند، معکوس یکدیگر نسبت به خط C می‌گویند. شکل ۲۵.۵ را ببینید.



شکل ۲۵.۵

تعریف ۲.۵. دو نقطه z_1 و z_2 را نسبت به دایره $C : |z - z_0| = R$ معکوس می‌گوییم اگر هر دو نقطه در امتداد یک شعاع این دایره باشند، بعلاوه $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R^2$. شکل ۲۶.۵ را ببینید.

تذکره. چنانچه z_2 به z_0 نزدیک شود، z_1 به ∞ نزدیک می‌شود. به این دلیل ∞ را معکوس z_0 ، یعنی مرکز دایره، می‌شناسیم.



شکل ۲۶.۵

در ارتباط با نگاشت مبیوس و نقاط معکوس خاصیت زیر را داریم:

خاصیت ۷.۵. اگر دایره C تحت نگاشت مبیوس $w = T(z)$ به دایره (یا خط) C' نگاشته شود و z_1 و z_2 معکوس یکدیگر نسبت به C باشند، آنگاه $T(z_1)$ و $T(z_2)$ معکوس یکدیگر نسبت به C' هستند.

علت. برای دیدن علت خاصیت به [۲] مراجعه کنید.

مثال ۱۴.۵. میدان بین دو دایره $|z| = 2$ و $|z - 5| = 2$ را به صورت $1 - 1$ و پوشا و همدیس به میدان بین دو دایره هم‌مرکز $|z| = 1$ و $|z| = R > 1$ بنگارید.

حل. برای حل اینگونه مسائل از دو نکته اساسی زیر و خاصیت فوق استفاده می‌کنیم.

تذکر. دو نقطه یگانه مانند z_1 و z_2 موجود است که نسبت به هر دو دایره معکوس یکدیگر باشند.

تذکر. مرکز دایره و ∞ معکوس یکدیگراند.

حل. ابتدا دو نقطه z_1 و z_2 را به دست می‌آوریم تا نسبت به هر دو دایره معکوس یکدیگر باشند. مرکز هر دو دایره روی محور اعداد حقیقی است. پس z_1 و z_2 نیز اعداد حقیقی و مثبت هستند. این نقاط را x_1 و x_2 بگیرید.

برای معکوس بودن نسبت به $|z| = 1$ باید داشته باشیم:

$$x_1 x_2 = 4$$

برای معکوس بودن نسبت به $|z - 3| = 1$ باید داشته باشیم:

$$(5 - x_1)(5 - x_2) = 4$$

پس $x_1 x_2 = 4$ و $x_1 + x_2 = 5$. یعنی x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 - 5x + 4 = 0$ هستند. در نتیجه $x_1 = 1$ و $x_2 = 4$. حال اگر نگاشت مبیوسی را بنویسیم که 1 را به 0 و 4 را به ∞ ببرد، تصویر دو دایره مذکور دو دایره به مرکز مبدأ می‌شود. برای برقراری شعاع دایره کوچک‌تر برابر با 1 می‌توانیم 2 را هم بر 1 تصویر کنیم. بنابراین تبدیل مطلوب نگاشت مبیوسی است که

$$1 \rightarrow 0, \quad 2 \rightarrow 1, \quad 4 \rightarrow \infty$$

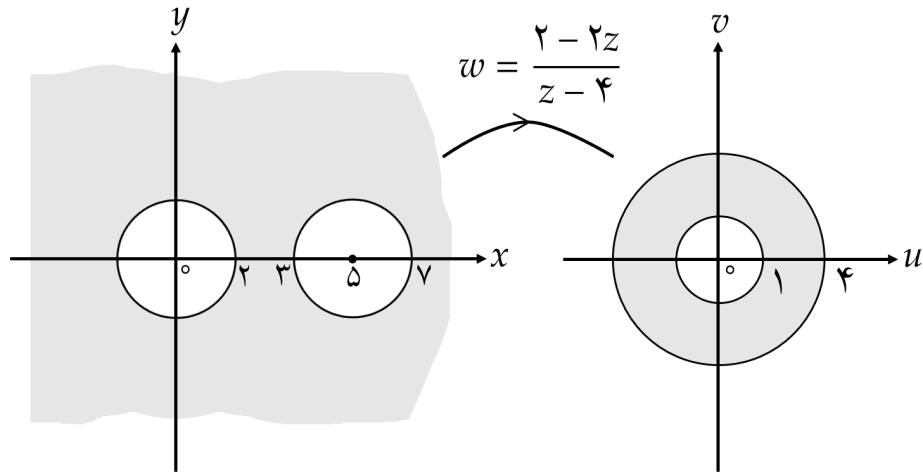
پس

$$\frac{w - 0}{1 - 0} = \frac{z - 1}{z - 4} \cdot \frac{2 - 4}{2 - 1} \Rightarrow w = \frac{2 - 2z}{z - 4}.$$

توجه کنید تصویر نقطه 3 نقطه 4 است. پس میدان تصویر، طوقه بین دو دایره $|z| = 1$ و $|z| = 4$ است. به شکل ۲۷.۵ توجه کنید.

تمرین ۲.۵

۱. تصویر هر یک از میدان‌های زیر را تحت نگاشت خطی $w = (1 - \sqrt{3}i)z + 3 - 2i$ با روش هندسی بیابید.



شکل ۲۷.۵

۱. $\{0 < r < 1, \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{4}\}$ (آ) $\{1 < x^2 + y^2 < 2, y > 0\}$ (ج)

۲. $\{x > 0, y > 0, x + y < \pi\}$ (ب) $\{x < 0, 0 < y < \pi\}$ (د)

۲. تصویر میدان $\{x > 0, 2 < y < 1 + x\}$ را با هر یک از نگاشت‌های زیر بیابید.

۱. $w = \frac{1}{z}$ (آ) $w = \frac{z-1}{z+1}$ (ج)

۲. $w = (1+i)z + 2 + 2i$ (ب) $w = (z-2i)^3 + 2 - i$ (د)

۳. نقاط ثابت نگاشت‌های زیر را بیابید.

۱. $w = \frac{2z-i}{z+2i}$ (آ) $w = z^3$ (ج)

۲. $w = (z-i)^2 + 1 - i$ (ب) $w = (z+i)^3 - i$ (د)

۴. تمام نگاشتهای مبیوسی را بیابید که

- (آ) فاقد نقطه ثابت‌اند. (ج) دو نقطه ثابت دارند.
 (ب) یک نقطه ثابت دارند. (د) دو نقطه ثابت متمایز دارند.

۵. با روش هندسی تصویر میدان $|z - ۱| < ۱$ را تحت هر یک از نگاشت‌های زیر بیابید.

(آ) $w = (۱ - i)z + ۲ - i$ (ج) $w = \frac{z-۲}{z}$
 (ب) $w = \frac{۱}{z}$ (د) $w = \frac{z-i}{z+۱}$

۶. نگاشت مبیوسی را بیابید که نقاط داده شده را بر نقاط داده شده بنگارد.

- (آ) $i, ۰$ و i را بر $۱, ۰$ و i و i, ∞ و $-i$ را بر $i, ۰$ و ۲ .
 (ب) $i, ۰$ و i را بر $-i, ۰$ و $i + ۱$.
 (ج) i, ∞ و $-i$ را بر $i, ۰$ و ۲ .
 (د) $-i, i$ و ۳ را بر $i, ۰$ و ۲ .

۷. نگاشت مبیوسی را بیابید که $|z| < ۱$ را بر $|w| < ۱$ و نقطه $\frac{۱}{۲}$ را به ۰ و نقطه i را بر i بنگارد.

۸. میدان $\{z \in \mathbb{C} : x > ۰, ۱ < y < x\}$ را به صورت یک به یک و پوشا و همدیس بر دایره واحد بنگارید.

۹. میدان $\{z \in \mathbb{C} : x < ۱, \frac{\pi}{۳} < y < \frac{\pi}{۲}\}$ را به صورت یک به یک و پوشا و همدیس بر دیسک واحد بنگارید.

۱۰. تصویر $\{z \in \mathbb{C} : x > ۰, y > ۰, xy < \frac{\pi}{۲}\}$ را تحت نگاشت $w = e^{z^2}$ بیابید.

۱۱. میدان $\{z \in \mathbb{C} : x > ۰, y > ۰, r < ۱\}$ را به صورت یک به یک و پوشا و همدیس بر نیم صفحه بالائی بنگارید.

۱۲. میدان $\{z : y > ۰\} \setminus \{x = ۰, ۰ < y < ۱\}$ را به صورت یک به یک و پوشا بر دیسک واحد بنگارید.

۱۳. میدان بین دو دایره $|z - ۱| = ۱$ و $|z| = ۱$ را به صورت یک به یک و پوشا و همدیس بر نیم صفحه بالائی بنگارید.

۱۴. میدان $\{z \in \mathbb{C} : y > ۰, r < ۱\}$ را به صورت یک به یک و پوشا و همدیس بر ربع اول بنگارید.

۱۵. میدان $\{z \in \mathbb{C} : |z| < ۲, y > -۱\}$ را به صورت یک به یک و پوشا بر دیسک واحد بنگارید.

۱۶. میدان بین دایره $|z| = ۳$ و خط $x + y = ۵\sqrt{۲}$ را به صورت $۱ - ۱$ و پوشا بر میدان بین دو دایره $|z| = ۱$ و $|z| = R > ۱$ بنگارید.

۱۷. میدان بین دو دایره $|z| = ۲$ و $|z - ۵| = ۲$ را به صورت $۱ - ۱$ و پوشا بر میدان بین دو دایره $|z| = ۱$ و $|z| = R > ۱$ بنگارید.

۱۸. نگاشت مبیوسی را بیاید که میدان بین دو دایره $|z| = ۱$ و $|z - \frac{۱}{۴}| = \frac{۱}{۴}$ را بر میدان بین دو دایره $|z| = ۱$ و $|z| = R > ۱$ بنگارد.

۳.۵ کاربرد نگاشت‌های همدیس در حل معادلات

پاره‌ای

صورت معادله موج و حرارت دو بعدی عبارتند از:

$$u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + g(x, y, t)$$

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + g(x, y, t).$$

در حالت ماندگار یعنی وقتی که تغییر زمان اثری در مقدار u ندارد این معادلات به صورت زیر ساده می‌گردند.

$$c^2(u_{xx} + u_{yy}) + g(x, y) = ۰.$$

این معادله را معادله پواسن و در حالتی که $g(x, y) = 0$ باشد آن را معادله لاپلاس گویند.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

قبلاً هر جواب این معادله را یک تابع همساز نامیدیم. همچنین ارتباطی بین این معادله و تابع تحلیلی به صورت زیر داشتیم.

۱. قسمت حقیقی و قسمت موهومی هر تابع تحلیلی یک تابع همساز یا جواب معادله لاپلاس است.

۲. ترکیب یک تابع همساز و یک تابع تحلیلی یک تابع همساز است.

در این بخش به دنبال این هستیم که با استفاده از این دو خاصیت، مسئله معادله لاپلاس را همراه با شرایط مرزی روی میدان‌های «بد» حل کنیم. همچنین مسائلی از معادله لاپلاس با شرایط مرزی روی میدان‌های «خوب» ممکن است با روش‌های قبلی حل نشود ولی با روش‌های این بخش قابل حل باشد.

نظر به این که از حرف u برای قسمت حقیقی تابع تحلیلی استفاده می‌کنیم از این به بعد جواب معادله لاپلاس را با T نشان می‌دهیم.

مثال ۱۵.۵. معادله لاپلاس همراه با شرایط مرزی زیر را حل کنید.

$$T_{xx} + T_{yy} = 0, \quad y > 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$T(x, 0) = \begin{cases} T_1 & x < 0 \\ T_2 & x > 0 \end{cases}$$

حل. می‌دانیم قسمت حقیقی یا موهومی هر تابع تحلیلی یک جواب معادله فوق است. تابع $\text{Log } z$ را به صورت زیر داریم.

$$\text{Log } z = \ln r + i\theta, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

پس θ یک جواب معادله فوق است. در نتیجه با توجه به خاصیت خطی این معادله $T(x, y) = A + B\theta$ نیز یک جواب این معادله است. پس کفایت اعداد A و B را

طوری انتخاب کنیم تا شرایط مرزی برقرار شود.

$$\begin{aligned} T(x, y) &= A = T_0, & \theta &= 0 \\ T(x, y) &= A + B\pi = T_1, & \theta &= \pi. \end{aligned}$$

به این ترتیب به دست می‌آوریم.

$$T(x, y) = \frac{T_1 - T_0}{\pi} \theta + T_0.$$

یا

$$T(x, y) = \frac{T_1 - T_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x} + T_0, \quad y > 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

که در آن $\tan^{-1} t$ به شاخه‌ای اشاره دارد که $0 \leq \tan^{-1} t \leq \pi$ باشد.

تذکره. با روش‌های فصل ۲ حل این مسئله آسان نیست. مضافاً به این که این جواب یک جواب فیزیکی است. یعنی کرانه‌دار است.

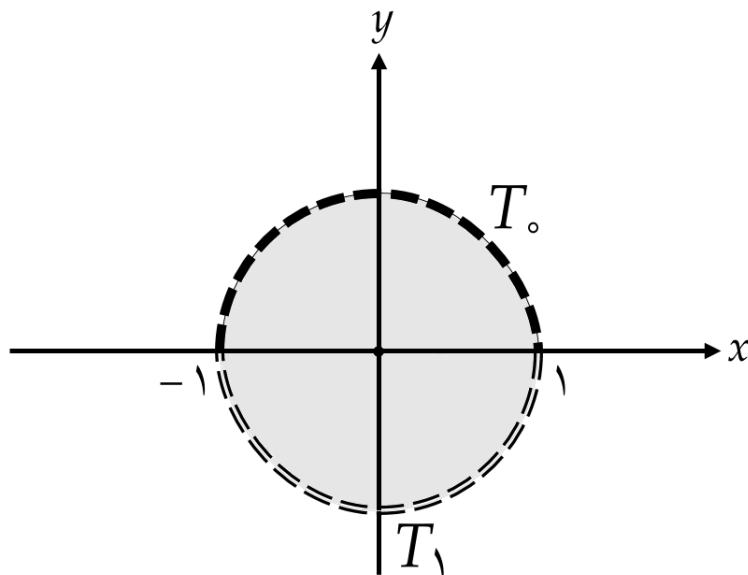
مثال ۱۶.۵. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{aligned} T_{xx} + T_{yy} &= 0, & x^2 + y^2 &\leq 1 \\ T(x, y) &= \begin{cases} T_1 & x^2 + y^2 = 1, \quad y < 0 \\ T_0 & x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

حل. این مسئله را روی میدان دیسک واحد داریم. شرایط مرزی در شکل ۲۸.۵ روی مرز دیسک مشخص شده است.

برای حل این مسئله از خاصیت دوم فوق و حل مثال ۱۵.۵ استفاده می‌کنیم. برای این کار میدان فوق را به صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر نیم‌صفحه بالائی می‌نگاریم. (به شکل ۲۹.۵ توجه کنید.) پس نگاشت

$$w = -i \frac{z-1}{z+1}$$



شکل ۲۸.۵

دیسک واحد را به صورت یک به یک و پوشا بر نیم صفحه بالائی می نگارد. لبه بالائی دایره واحد بر محور حقیقی و $u > 0$ و لبه پایینی بر قسمت منفی محور حقیقی یعنی $u < 0$ تصویر می شود. با توجه به مثال ۱۵.۵ جواب مسئله

$$T_{uu} + T_{vv} = 0$$

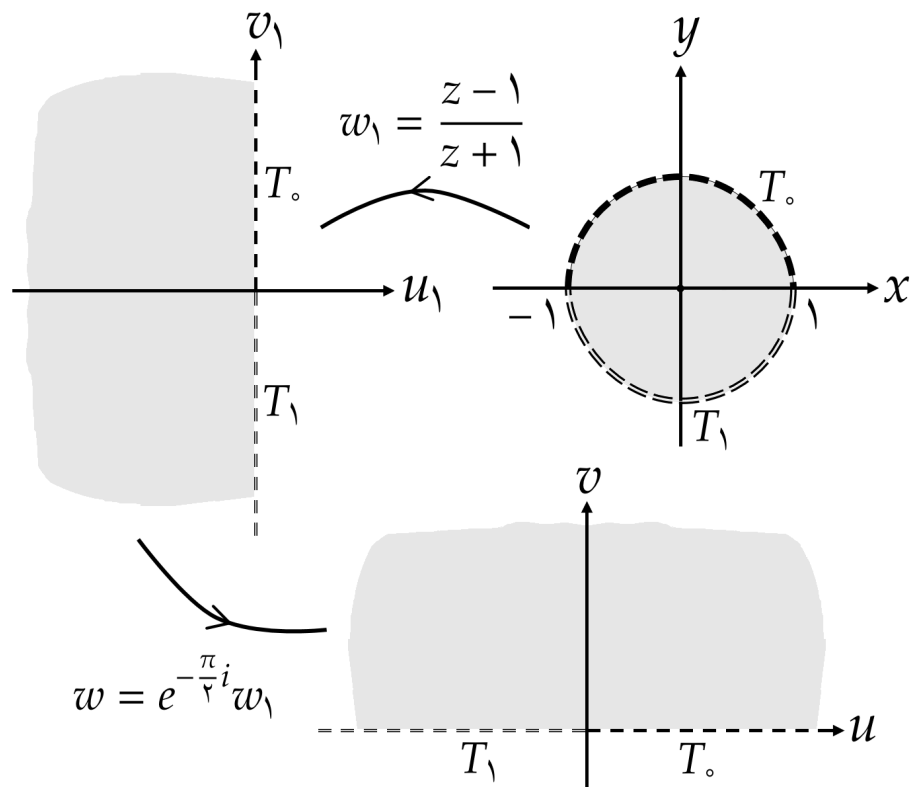
$$T(u, 0) = \begin{cases} T_0 & u > 0 \\ T_1 & u < 0 \end{cases}$$

را به صورت زیر داریم:

$$T(u, v) = \frac{T_1 - T_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{v}{u} + T_0.$$

همچنین طبق خاصیت دوم فوق

$$T(u(x, y), v(x, y)) = H(x, y)$$



شکل ۲۹.۵

جواب مسئله زیر است که در آن $u(x, y)$ و $v(x, y)$ قسمت حقیقی و موهومی نگاشت $w = -i \frac{z-1}{z+1}$ می‌باشد.

$$H_{xx} + H_{yy} = (u_x^2 + v_x^2)(T_{uu} + T_{vv}) = 0$$

$$H(x, y) = \begin{cases} T_1 & x^2 + y^2 = 1, y < 0 \\ T_0 & x^2 + y^2 = 1, y > 0 \end{cases}$$

به این ترتیب جواب مسئله فوق به دست می‌آید.

حال به محاسبه $u(x, y)$ و $v(x, y)$ می‌پردازیم.

$$w = \frac{i - iz}{1 + z} = i \frac{[(1 - x) - iy] \cdot [(1 + x) - iy]}{(1 + x)^2 + y^2}$$

$$w = \frac{2y}{(1 + x)^2 + y^2} + i \frac{1 - x^2 - y^2}{(1 + x)^2 + y^2} = u + iv.$$

به این ترتیب جواب نهایی را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$T(x, y) = \frac{T_1 - T_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{1 - x^2 - y^2}{2y} + T_0.$$

تذکره. مسئله فوق با استفاده از سری فوریه و در مختصات قطبی قابل حل است لیکن جواب به این شفافیت نخواهد بود.

مثال ۱۷.۵. مطلوبست حل مسئله زیر

$$T_{xx} + T_{yy} = 0, \quad y > 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$T(x, 0) = \frac{x}{1 + x^2}$$

حل. این مسئله را به کمک نگاشت $w = \frac{z-i}{z+i}$ از نیم صفحه به دیسک واحد منتقل می‌کنیم. (به شکل ۳۰.۵ توجه کنید.)
در این صورت

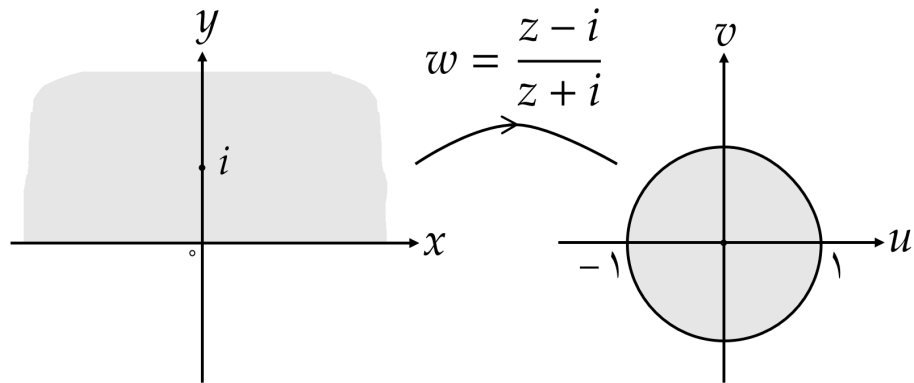
$$u(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y + 1)^2}, \quad v(x, y) = \frac{-2x}{x^2 + (y + 1)^2}.$$

با این تغییر متغیرها مسئله فوق به مسئله زیر تبدیل می‌گردد.

$$(u_x^2 + v_x^2)(T_{uu} + T_{vv}) = 0$$

یا

$$T_{uu} + T_{vv} = 0.$$



شکل ۳۰.۵

برای تبدیل شرایط مرزی از صفحه z به صفحه w لازم است که x را بر حسب u و v محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned}
 w = \frac{z-i}{z+i} &\implies wz + iw = z - i \implies z = i \frac{1+w}{1-w} \\
 \implies x + iy &= i \frac{1+u+iv}{1-u-iv} = \frac{(1+u+iv)(1-u+iv)}{(1-u)^2 + v^2} \\
 &= i \frac{1-u^2-v^2 + 2iv}{(1-u)^2 + v^2} \\
 \implies x &= \frac{-2v}{(1-u)^2 + v^2} = \frac{-2v}{1-2u+u^2+v^2} = \frac{-v}{1-u} \\
 \implies \frac{x}{1+x^2} &= \frac{\frac{-v}{1-u}}{1 + \frac{v^2}{(1-u)^2}} = \frac{\frac{v}{u-1}}{\frac{v^2(1-u)}{(1-u)^2}} = -\frac{v}{2}.
 \end{aligned}$$

پس مسئله در صفحه u و v به صورت زیر در می آید.

$$\begin{aligned}
 T_{uu} + T_{vv} &= 0, & u^2 + v^2 &\leq 1, \\
 T \Big|_{u^2+v^2=1} &= -\frac{v}{2}.
 \end{aligned}$$

در مختصات قطبی اگر بگیریم $w = \rho e^{i\phi}$ ، مسئله را به صورت زیر داریم.

$$T_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}T_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}T_{\phi\phi} = 0, \quad \rho < 1, \quad -\pi \leq \phi \leq \pi$$

یا

$$\begin{aligned} \rho^2 T_{\rho\rho} + \rho T_{\rho} + T_{\phi\phi} &= 0, \quad \rho < 1, \quad -\pi \leq \phi \leq \pi \\ T|_{\rho=1} &= -\frac{1}{2} \sin \phi. \end{aligned}$$

پایه مناسب حل نمائی است یعنی $\{e^{in\phi}\}_{n=-\infty}^{\infty}$. از قرار دادن

$$T(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(\rho) e^{in\phi}$$

در مسئله داریم.

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - n^2 R(\rho) = 0.$$

که جواب عمومی آن به صورت زیر است.

$$R(\rho) = A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}.$$

در نتیجه

$$T(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) e^{in\phi}.$$

چون در $\rho = 0$ جواب کرانه‌دار است پس $A_n = 0$ برای $n < 0$ و $B_n = 0$ برای $n > 0$. در

نتیجه

$$T(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \rho^n e^{in\phi} + \sum_{n=-\infty}^{-1} B_n \rho^{-n} e^{in\phi}$$

$$T(1, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{in\phi} + \sum_{n=-\infty}^{-1} B_n e^{in\phi} = -\frac{1}{2} \sin \phi = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \right).$$

پس $A_1 = -\frac{1}{4i}$ و $B_{-1} = \frac{1}{4i}$ و سایر A_n ها و B_n ها برابر صفراند. به این ترتیب

$$T(\rho, \phi) = \left(-\frac{1}{4i} e^{i\phi} + \frac{1}{4i} e^{-i\phi} \right) \rho = -\frac{1}{4} \rho \sin \phi.$$

یا

$$T(\rho, \phi) = -\frac{1}{4} v.$$

پس جواب مسئله در صفحه x و y می‌شود.

$$T(x, y) = \frac{x}{x^2 + (y+1)^2}.$$

حل مسائل غیرهمگن هم با استفاده از ابزار نگاشت همدیس مقدور است. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۸.۵. مطلوبست حل مسئله زیر

$$T_{xx} + T_{yy} = xy, \quad (x, y) \in D,$$

$$D = \{z : |z-i| < 1, |z-1| < 1\},$$

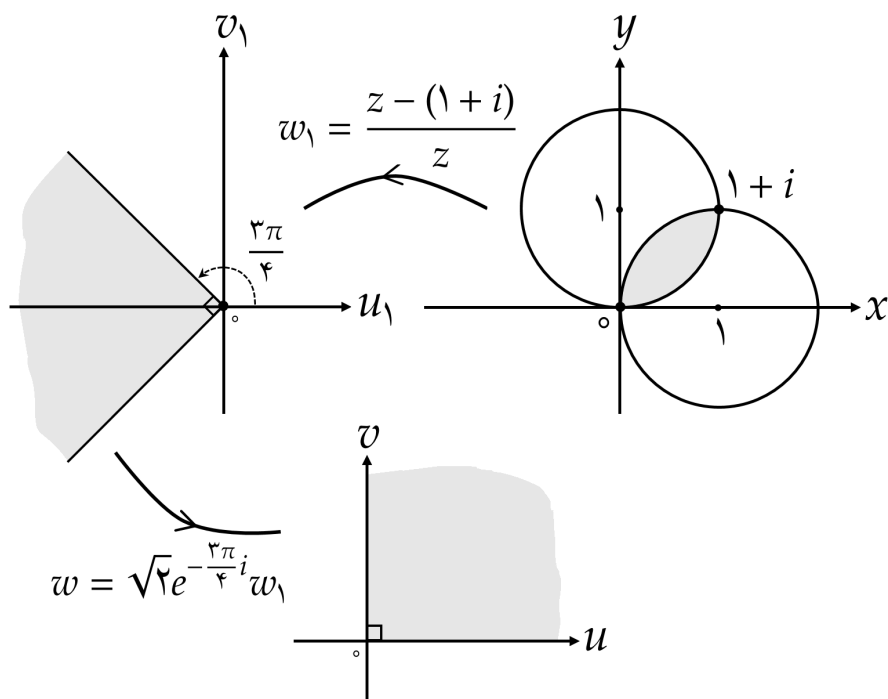
$$T \Big|_{\partial D} = \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

حل. ابتدا با نگاشت میبوس

$$w = f(z) = \sqrt{2} e^{-\frac{3\pi}{4}i} \cdot \frac{z - (1+i)}{z}$$

میدان D را به ربع اول تبدیل می‌کنیم. (به شکل ۳۱.۵ توجه کنید.) در این صورت تغییر متغیرهای مستقل را به صورت زیر داریم.

$$u(x, y) = \frac{2x - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 2y}{x^2 + y^2}.$$



شکل ۳۱.۵

مسئله فوق به صورت زیر در می آید.

$$T_{xx} + T_{yy} = |f'(z)|^2 (T_{uu} + T_{vv}) = \frac{x+y}{x^2+y^2}, \quad (u, v) \in D' = f(D),$$

$$T \Big|_{\partial D'} = xy \Big|_{x=x(u,v), y=y(u,v)}.$$

بعد از ساده کردن می شود:

$$T_{uu} + T_{vv} = xy = -\frac{v(u+v)}{(u-1)^2 + (v+1)^2}, \quad u > 0, \quad v > 0,$$

$$T \Big|_{\partial D'} = \frac{v(u-1)(v+1)}{(u-1)^2 + (v+1)^2} = \begin{cases} \frac{-v(v+1)}{(v+1)^2 + 1} & u = 0 \\ \frac{v(u+1)}{(u-1)^2 + 1} & v = 0 \end{cases}$$

در حقیقت از مقادیر زیر استفاده شده است.

$$|f'(z)|^2 = \frac{4}{x^2 + y^2}, \quad x = \frac{2(1-u)}{(u-1)^2 + (v-1)^2}, \quad y = \frac{2(1-v)}{(u-1)^2 + (v-1)^2}.$$

این مسئله با تبدیل فوریه سینوسی قابل حل است. ابتدا نسبت به متغیر u تبدیل فوریه سینوسی می‌گیریم. تبدیل فوریه سینوسی تابع $g(u)$ را با $\mathcal{F}_{su}(g)$ یا برای سادگی با $\hat{g}$ نمایش می‌دهیم و تابعی از ω در نظر می‌گیریم.

$$-\omega^2 \hat{T} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega \cdot \frac{-4(v+1)}{(v+1)^2 + 1} + \hat{T}_{vv} = -2 \mathcal{F}_{su} \left(\frac{u+v}{(u-1)^2 + (v+1)^2} \right)$$

$$\hat{T} \Big|_{v=0} = \mathcal{F}_{su} \left(\frac{4(u-1)}{(u-1)^2 + 1} \right).$$

حال نسبت به v تبدیل فوریه سینوسی می‌گیریم. تبدیل فوریه سینوسی تابع $g(v)$ را نیز با $\mathcal{F}_{sv}(g)$ یا برای سادگی با $\hat{g}$ نمایش می‌دهیم و تابعی از α در نظر می‌گیریم.

$$(\alpha^2 - \omega^2) \hat{T} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha \cdot \mathcal{F}_{su} \left(\frac{4(u-1)}{(u-1)^2 + 1} \right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega \cdot \mathcal{F}_{sv} \left(\frac{-4(v+1)}{(v+1)^2 + 1} \right)$$

$$= -2 \mathcal{F}_{sv} \left(\mathcal{F}_{su} \left(\frac{u+v}{(u-1)^2 + (v+1)^2} \right) \right).$$

بعد از محاسبه این تبدیلات به دست می‌آوریم.

$$(-\omega^2 - \alpha^2) \hat{T} = g(\omega, \alpha).$$

پس

$$T(u, v) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{g(\omega, \alpha)}{-\omega^2 - \alpha^2} \sin \omega u \sin \alpha v d\omega d\alpha$$

در نتیجه

$$T(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{g(\omega, \alpha)}{-\omega^2 - \alpha^2} \cdot \sin \left(\omega \frac{x^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \sin \left(\alpha \frac{x^2 + y^2 + 2y}{x^2 + y^2} \right) d\omega d\alpha.$$

با توجه به مثال ۱۵.۵ و خاصیت خطی معادله لاپلاس خاصیت زیر را داریم.

خاصیت ۸.۵. جواب مسئله

$$T_{uu} + T_{vv} = 0, \quad -\infty < u < +\infty, \quad v > 0,$$

$$T|_{v=0} = \begin{cases} T_i & a_{i+1} < u < a_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ T_0 & u > a_0 \\ T_{n+1} & u < a_n. \end{cases}$$

را به صورت زیر داریم.

$$T(u, v) = T_0 + \sum_{i=0}^n \frac{T_{i+1} - T_i}{\pi} \tan^{-1} \frac{v}{u - a_i}.$$

مثال ۱۹.۵. معادله لاپلاس را برای دیسک واحد با شرایط مرزی داده شده حل کنید.

$$T_{xx} + T_{yy} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0,$$

$$T|_{x^2+y^2=1} = \begin{cases} 1 & x > 0, \quad y > 0, \\ 2 & x < 0, \quad y > 0, \\ 3 & x < 0, \quad y < 0, \\ 4 & x > 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

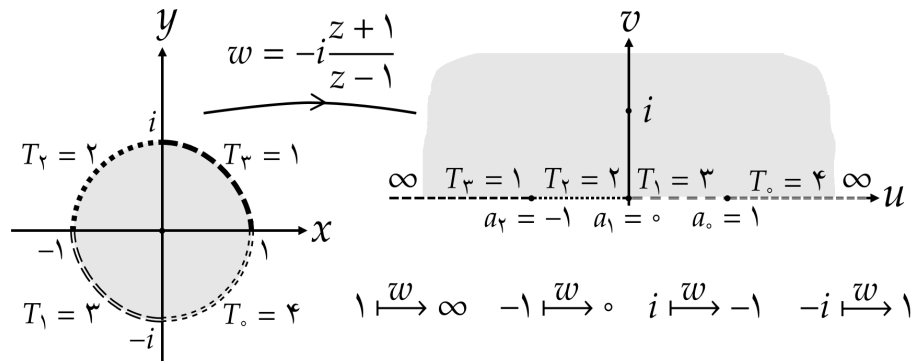
حل. دیسک واحد را با نگاشت $w = -i \frac{z+1}{z-1}$ به صورت یک به یک و پوشا و همدیس بر نیم صفحه بالائی می نگاریم. (به شکل ۳۲.۵ توجه کنید).

پس اگر بگیریم $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = 1$ و $T_3 = 1, T_2 = 2, T_1 = 3, T_0 = 4$ طبق خاصیت ۸.۵ به دست می آوریم.

$$T(u, v) = 4 - \frac{1}{\pi} \left(\tan^{-1} \frac{v}{u-1} + \tan^{-1} \frac{v}{u} + \tan^{-1} \frac{v}{u+1} \right).$$

حال کافیه از

$$w = -i \frac{z+1}{z-1} = u(x, y) + iv(x, y)$$



شکل ۳۲.۵

$u(x, y)$ و $v(x, y)$ را بیابیم و در فرمول $T(u, v)$ فوق قرار دهیم تا جواب مسئله معادله لاپلاس برای دیسک واحد با شرایط مرزی داده شده حاصل شود.

تذکره. در مثال ۱۵.۵ جواب مسئله

$$T_{xx} + T_{yy} = 0, \quad y > 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$T(x, 0) = \begin{cases} T_1 & x < 0 \\ T_0 & x > 0 \end{cases}$$

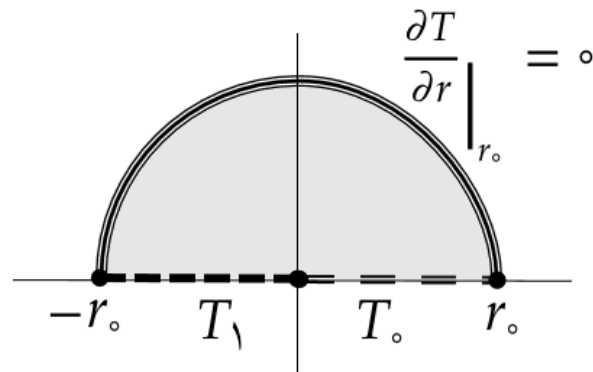
با استفاده از $T(x, y) = A + B\theta$ به صورت زیر به دست آمد.

$$T(x, y) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x}.$$

چون این جواب در مختصات قطبی فاقد r است پس روی هر نقطه از نیم‌دایره $x^2 + y^2 = r_0^2$ داریم $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$. به این ترتیب این جواب معادله لاپلاس جواب مسئله زیر روی نیم‌دیسک $x^2 + y^2 < r_0^2$ و $y > 0$ نیز است. (به شکل ۳۳.۵ توجه کنید).

$$T_{xx} + T_{yy} = 0, \quad x^2 + y^2 < r_0^2, \quad y > 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r_0} = 0, \quad T(x, 0) = \begin{cases} T_1 & x < 0 \\ T_0 & x > 0 \end{cases}$$



شکل ۳۳.۵

تذکره. روش‌های این بخش برای معادلات حرارت یا موج مفید نیست. چون حضور ضریب $|f'(z)|^2$ در جمله لاپلاسیان معادله را در صفحه u و v با ضریب متغیر می‌کند که با روش‌های این کتاب قابل حل نیست لیکن با روش‌های عددی قابل حل است.

مثال ۲۰.۵. میدان D را میدان بین دو دایره $|z| = 2$ و $|z - 5| = 2$ در نظر بگیرید. مطبوست حل مسئله زیر روی D :

$$T_{xx} + T_{yy} = 36[(x-4)^2 + y^2]^{-1}, \quad u|_{\partial D} = 0$$

حل. در مثال ۱۴.۵ بخش قبلی مشاهده کردیم که تحت نگاشت $w = \frac{2-2z}{z-4}$ میدان w فوق به میدان D' بین دو دایره $|w| = 1$ و $|w| = 4$ نگاشته می‌شود. همچنین مسئله فوق به مسئله زیر روی این میدان تبدیل می‌گردد:

$$|w'|^2(T_{uu} + T_{vv}) = 36[(x-4)^2 + y^2]^{-1}, \quad T|_{\partial D'} = 0.$$

لیکن

$$w' = \frac{6}{(z-4)^2} \Rightarrow |w'|^2 = \frac{36}{(x-4)^2 + y^2}.$$

پس مسئله در صفحه w تبدیل به مسئله زیر می‌شود:

$$T_{uu} + T_{vv} = 1,$$

$$T|_{D'} = 0.$$

با در نظر گرفتن مسئله در مختصات قطبی به طوری که $w = Re^{i\phi}$ ، خواهیم داشت

$$T_{RR} + \frac{1}{R}T_R + \frac{1}{R^2}T_{\phi\phi} = 1, \quad 1 < R < 4, \quad -\pi \leq \phi \leq \pi,$$

$$iT(R, -\pi) = T(R, \pi), \quad T_\phi(R, -\pi) = T_\phi(R, \pi)$$

$$T(\phi, 1) = 0, \quad T(\phi, 4) = 0.$$

پایه مناسب بر حسب ϕ پایه نمایی (مختلط) با $p = \pi$ است، یعنی

$$\{e^{in\phi}\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

پس می‌گیریم

$$T(R, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(R)e^{in\phi}.$$

در نتیجه باید باید داشته باشیم

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [R^2 P_n''(R) + RP_n' - n^2 P_n(R)] e^{in\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R^2 c_n e^{in\phi},$$

که در آن $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\phi} d\phi$ به این ترتیب به دست می‌آوریم

$$c_0 = 1, \quad c_n = 0, \quad n \neq 0.$$

جواب عمومی معادله

$$R^2 P_n''(R) + RP_n'(R) - n^2 P_n(R) = c_n R^2$$

را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\lambda^2 - n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm n$$

$$P_n(R) = A_n R^n + B_n R^{-n} \quad n \neq 0$$

$$P_0(R) = A_0 \ln R + B_0 + \frac{1}{4} R^2$$

همچنین از شرایط مرزی $T(1, \phi) = T(4, \phi) = 0$ به دست می‌آوریم
 $P_n(4) = P_n(1) = 0$. با اعمال این شرایط بر $P_n(R)$ به دست می‌آوریم

$$P_n(1) = A_n + B_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_n = B_n = 0, \quad n \neq 0$$

$$P_n(4) = A_n 4^n + B_n 4^{-n} = 0$$

$$P_0(1) = B_0 + \frac{1}{4} = 0$$

$$P_0(4) = A_0 \ln 4 + B_0 + 4 = 0$$

به این ترتیب به دست می‌آوریم

$$A_0 = -\frac{15}{16 \ln 4}, \quad B_0 = -\frac{1}{4}.$$

در نتیجه

$$T(R, \phi) = -\frac{15}{16 \ln 4} \ln R - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} R^2.$$

از طرفی از $w = \frac{2-2z}{z-4}$ به دست می‌آوریم

$$u + iv = \frac{2 - 2(x + iy)}{x + iy - 4} = \frac{[(2 - 2x) - 2iy][(x - 4) - iy]}{(x - 4)^2 + y^2}$$

$$\frac{(2 - 2x)(x - 4) - 2y^2}{(x - 4)^2 + y^2} + i \frac{-y(2 - 2x + 2x - 8)}{(x - 4)^2 + y^2}$$

پس

$$u = \frac{-2(x^2 + y^2) + 10x - 8}{(x - 4)^2 + y^2}, \quad v = \frac{6y}{(x - 4)^2 + y^2}.$$

بنابراین جواب مسئله زیر به صورت زیر است:

$$T(x, y) = -\frac{15}{32 \ln 4} \ln \frac{(-2(x^2 + y^2) + 10x - 8)^2 + 36y^2}{((x-4)^2 + y^2)^2} - \frac{1}{4} \\ + \frac{1}{4} \frac{(-2(x^2 + y^2) + 10x - 8)^2 + 36y^2}{((x-4)^2 + y^2)^2}$$

تمرین ۳.۵

معادلات لاپلاس زیر را با شرایط مرزی روی میدان D داده شده حل کنید.

$$۱. D = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$$

$$T|_{\{y=0, x>5\}} = 1, \quad T|_{\{y=0, x<5\}} = 2.$$

$$۲. D = \{z \in \mathbb{C} : y > 0\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : x = 0, 0 < y < 2\}$$

$$T|_{\{y=0, x>0\}} = 1, \quad T|_{\{y=0, x<0\}} = 2, \quad T|_{\{x=0, 0<y<2\}} = 4.$$

$$۳. D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < y < \pi, x < 0\}$$

$$T|_{\{y=0, x<0\}} = 5, \quad T|_{\{y=\pi, x<0\}} = 8, \quad T|_{\{x=0, 0<y<\pi\}} = 4.$$

$$۴. D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱, |z - ۱| < ۱\}$$

$$T \Big|_{|z|=۱} = ۲, \quad T \Big|_{|z-۱|=۱} = ۴.$$

در هر یک از مسائل زیر ابتدا نگاشت $w = f(z)$ را طوری بیابید تا به‌طور همدیس آن مسئله را به نیم‌دیسک بالائی واحد بنگارد. سپس با استفاده از جواب مسئله روی این نیم‌دیسک جواب مسئله اولیه را به‌دست آورید.

$$۵. D = \{z \in \mathbb{C} : y > ۰, |z| > ۱\}$$

$$T \Big|_{\{y=۰, x>۰\}} = ۲, \quad T \Big|_{\{y=۰, x<۰\}} = ۴, \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{|z|=۱} = ۰.$$

$$۶. D = \{z \in \mathbb{C} : ۰ < y < \pi, x < ۰\}$$

$$T \Big|_{\{y=۰, x<۰\}} = ۲, \quad T \Big|_{\{۰<y<\pi, x=۰\}} = ۴, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{\{y=\pi, x<۰\}} = ۰.$$

$$۷. D = \{z \in \mathbb{C} : y > ۰\}$$

$$T \Big|_{\{y=۰, x>۱\}} = ۲, \quad T \Big|_{\{y=۰, |x|<۱\}} = ۴, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{\{y=۰, x<-۱\}} = ۰.$$

$$۸. D = \{z \in \mathbb{C} : ۱ < y < x, x > ۰\}$$

$$T \Big|_{\{y=x, x>۰\}} = ۱, \quad T \Big|_{\{y=۱, ۰<x<۱\}} = ۲, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{\{y=۱, x>۱\}} = ۰.$$

با استفاده از قسمت حقیقی یا موهومی یک تابع تحلیلی مسائل زیر را حل کنید.

$$۹. D = \{z \in \mathbb{C} : ۰ < \theta < \frac{\pi}{۴}, ۱ < r < ۲\}$$

$$T \Big|_{r=۱} = ۴, \quad T \Big|_{r=۲} = ۶, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=۰} = ۰, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=۰} = ۰.$$

$$.۱۰ \quad D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < y < 1, x > 0\}$$

$$T|_{y=0} = 0, \quad T|_{y=1} = x, \quad \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} = y.$$

$$.۱۱ \quad D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

$$T|_{x=0} = 0, \quad T|_{x=1} = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial y}|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y}|_{y=1} = 0.$$

$$.۱۲ \quad D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < y < \pi, x < 0\}$$

$$T|_{y=0} = x^2, \quad T|_{y=\pi} = x^2 - \pi^2, \quad \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} = 0.$$

مسائل پواسن همراه با شرایط مرزی داده شده را حل کنید.

.۱۳

$$T_{xx} + T_{yy} = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

$$T|_{y=0} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad T|_{x=0} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

.۱۴

$$T_{xx} + T_{yy} = xy,$$

$$D = \{z : 1 - \frac{1}{4}y^2 < x < 4 - \frac{1}{16}y^2, \frac{1}{16}y^2 - 4 < x < \frac{1}{4}y^2 - 1\},$$

$$T|_{\partial D} = xy.$$

.۱۵

$$T_{xx} + T_{yy} = \frac{x+y}{x^2 + y^2},$$

$$D = \{z : |z| < 1, x > 0, y > 0\},$$

$$T|_{x=0} = y, \quad T|_{y=0} = x, \quad \frac{\partial T}{\partial r}|_{r=1} = 0.$$

۱۶.

$$T_{xx} + T_{yy} = x + y,$$

$$D = \{z : |z - 1| < 1, |z - i| < 1\},$$

$$T|_{\partial D} = xy.$$

۱۷. میدان D را میدان بین خط $x + y = 5\sqrt{2}$ و دایره $|z| = 4$ در نظر بگیرید. مسئله پوآسن زیر را روی D حل کنید:

$$T_{xx} + T_{yy} = xy, \quad (x, y) \in D$$

$$T|_{\partial D} = xy.$$

۱۸. مسئله پوآسن زیر را روی میدان $D = \{z : |z - 5| > 2, |z| > 2\}$ حل کنید:

$$T_{xx} + T_{yy} = xy,$$

$$T|_{\partial D} = x + y.$$

۱۹. مسئله پوآسن زیر را روی میدان $D = \{z : |z| < 1, |z - \frac{1}{4}| > \frac{1}{4}\}$ حل کنید:

$$T_{xx} + T_{yy} = x + y,$$

$$T|_{\partial D} = x^2 - y^2.$$

۴.۵ فرمول‌های انتگرال پوآسن

در این بخش به بررسی مطالبی می‌پردازیم که به ما امکان می‌دهد برای معادله پوآسن دو بعدی در میدان‌های معروف با شرایط مرزی گوناگون فرمول‌هایی بر حسب انتگرال‌های معین و ناسره ارائه دهیم. بسیاری از این انتگرال‌ها به سهولت قابل محاسبه دقیق یا حل

تقریبی هستند.

فرمول انتگرال پوآسن برای دیسک

حالت ۱) شرط مرزی دیریکله: فرض کنید C منحنی $|z| = r$ و تابع f درون و روی C تحلیلی باشد. فرمول انتگرال کشی

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{s-z} ds$$

مقدار f در هر نقطه z در داخل C را بر حسب مقدار f در نقاط s روی C بیان می‌کند. در این بخش به کمک فرمول بالا، فرمول متناظری برای قسمت حقیقی f به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از آن مسئله دیریکله برای دیسک $|z| \leq r$ را با ارایه یک فرمول انتگرالی صریح حل می‌کنیم. در نهایت چون می‌دانیم طبق قضیه نگاشت ریمان^۱، درون و مرز میدان‌های بدون حفره با مرز جردن که کل صفحه مختلط نباشند را به صورت یک‌به‌یک و پوشا می‌توان توسط یک نگاشت منحصر به فرد هم‌دیس به ترتیب به درون و روی C نگاشت، پس مسئله پوآسن با شرط مرزی دیریکله برای این میدان‌ها تحت نگاشت مذکور به مسئله پوآسن دیریکله بر روی دیسک تبدیل می‌گردد. بنابراین مسئله به صورت نظری حل می‌گردد و در صورت داشتن ضابطه نگاشت هم‌دیس فوق نیز جواب مسئله توسط یک انتگرال معین و ناسره داده می‌شود.

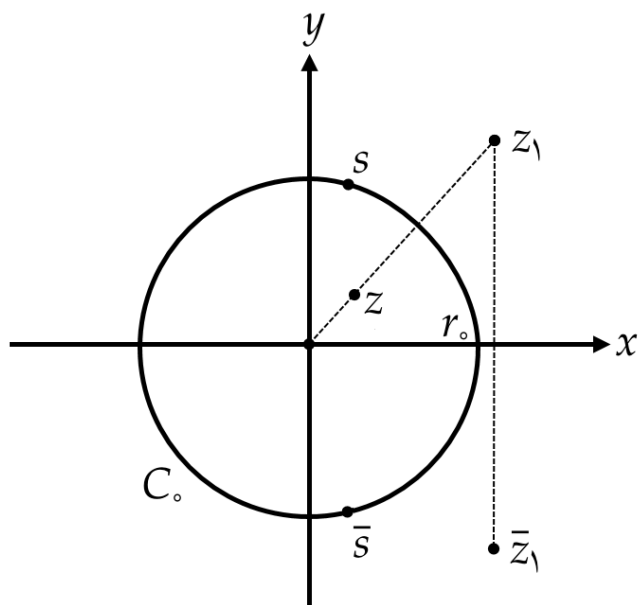
قرار دهید $z = re^{i\theta}$ ، که در آن $0 < r < r_0$. انعکاس نقطه ناصفر z نسبت به دایره C عبارت است از نقطه z_1 که با z روی یک پرتو از مبدأ واقع است و در شرط $|z_1| \cdot |z| = r_0^2$ صدق می‌کند. (به شکل ۳۴.۵ توجه کنید.)

پس اگر $s = r_0 e^{i\phi}$ نقطه‌ای روی C باشد:

$$z_1 = \frac{r_0^2}{r} e^{i\theta} = \frac{r_0^2}{\bar{z}} = \frac{s\bar{s}}{\bar{z}}.$$

چون z_1 در خارج دایره C است، از قضیه کشی-گورسا نتیجه می‌شود که وقتی در

^۱فصل هفتم مرجع [۲] را ببینید.



شکل ۳۴.۵

انتگرال به جای z ، z_1 قرار دهیم، داریم:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_1} dz = 0.$$

بنابراین

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \left(\frac{1}{s - z} - \frac{1}{s - z_1} \right) f(s) ds = 0.$$

و با استفاده از نمایش پارامتری $s = r_0 e^{i\phi}$ ، $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ، برای منحنی C_0 می‌توان نوشت:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r_0 e^{i\phi}}{r_0 e^{i\phi} - z} - \frac{r_0 e^{i\phi}}{r_0 e^{i\phi} - z_1} \right) f(r_0 e^{i\phi}) d\phi.$$

حال چون دیدیم که $z_1 = \frac{\bar{s}\bar{s}}{z}$ ، پس ضریب داخل پارانتهز در انتگرال را می‌شود به صورت زیر

نوشت:

$$\frac{s}{s-z} - \frac{s}{s-z_1} = \frac{s}{s-z} - \frac{1}{1 - \frac{z_1}{s}} = \frac{s}{s-z} - \frac{1}{1 - \frac{\bar{s}}{s}} = \frac{s}{s-z} + \frac{\bar{z}}{\bar{s}-\bar{z}} = \frac{r_0^2 - r^2}{|s-z|^2}.$$

پس صورت دیگری از فرمول انتگرال کشی به صورت زیر در می‌آید:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{r_0^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r_0 e^{i\phi})}{|s-z|^2} d\phi, \quad r < r_0.$$

عبارت $|s-z|$ فاصله بین نقاط s و z است و می‌توان آن را به صورت زیر نیز نوشت:

$$|s-z|^2 = r_0^2 - 2r_0 r \cos(\phi - \theta) + r^2.$$

پس اگر u قسمت حقیقی تابع f باشد طبق صورت جدید فرمول انتگرال کشی نتیجه می‌شود که

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)u(r_0, \phi)}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\phi - \theta) + r^2} d\phi, \quad r < r_0.$$

فرمول بالا یک عملگر خطی انتگرالی از $u(r_0, \theta)$ به $u(r, \theta)$ تعریف می‌کند. هسته تبدیل به جز ضریب $\frac{1}{2\pi}$ عبارت است از تابع حقیقی مقدار

$$P(r_0, r, \phi - \theta) = \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\phi - \theta) + r^2}$$

که به هسته پواسن مشهور است. چون $r < r_0$ ، پس به وضوح P تابعی مثبت است. به علاوه چون $\Re\left(\frac{\bar{z}}{\bar{s}-\bar{z}}\right) = \Re\left(\frac{z}{s-z}\right)$ ، از

$$\frac{s}{s-z} + \frac{\bar{z}}{\bar{s}-\bar{z}} = \frac{r_0^2 - r^2}{|s-z|^2}$$

در می‌یابیم که

$$P(r_0, r, \phi - \theta) = \Re\left(\frac{s}{s-z} + \frac{z}{s-z}\right) = \Re\left(\frac{s+z}{s-z}\right).$$

بنابراین برای هر s مشخص بر روی دایره C ، تابع $P(r_0, r, \phi - \theta)$ داخل C تابعی همساز از (r, θ) است. به علاوه $P(r_0, r, \phi - \theta)$ یک تابع متناوب زوج از $\phi - \theta$ با دوره تناوب 2π است و وقتی $r = 0$ مقدارش ۱ است. حال می‌توان فرمول انتگرال پواسن را چنین نوشت:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) u(r_0, \theta) d\phi, \quad r < r_0. \quad (1.5)$$

که در آن فرض کرده‌ایم $u = \Re f$ و f درون و روی C تحلیلی است. بنابراین u در یک مجموعه باز شامل دیسک واحد همساز است. به خصوص u درون و روی C پیوسته است. در ادامه خواهیم دید که (۱.۵) تحت شرایط ضعیف‌تری نیز برقرار است.

تعریف ۳.۵. فرض کنید g تابعی قطعه‌به‌قطعه پیوسته از θ روی بازه $[0, 2\pi]$ باشد. تبدیل انتگرال پواسن g که با U نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) g(\phi) d\phi, \quad r < r_0. \quad (2.5)$$

خاصیت ۹.۵. فرض کنید D دیسک $|z| \leq r_0$ ، g مثل فوق و $U = U(r, \theta)$ تبدیل پواسن g ، یعنی (۲.۵) باشد. در این صورت $U(r, \theta)$ در درون دیسک D همساز است و به ازای هر θ مشخص که g در آن پیوسته باشد، داریم:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow r_0 \\ r < r_0}} U(r, \theta) = g(\theta).$$

یعنی U یک جواب مسئله دیریکله پواسن در قرص D است به این معنی که وقتی (r, θ) در امتداد یک شعاع به سمت (r_0, θ_0) میل کند، به جز در تعدادی متناهی نقطه (r_0, θ) روی مرز دیسک که g در آنها ناپیوسته است، $U(r, \theta)$ به مقدار مرزی $g(\theta)$ میل می‌کند.

علت. چون هسته پواسن P به عنوان تابعی از r و θ در درون دیسک D همساز است در نتیجه تابع U نیز در درون دیسک همساز خواهد بود. به عبارت دقیق‌تر چون g قطعه‌قطعه پیوسته است، انتگرال (۲.۵) را می‌توان به صورت تعدادی متنهایی از

انتگرال‌های معین نوشت که در هرکدام از آنها تابع زیر انتگرال نسبت به متغیرهای r ، ϕ و θ مشتق‌پذیر با مشتقات پیوسته می‌باشد. چون ترتیب مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را می‌توان عوض کرد و به‌علاوه چون در مختصات قطبی (r, θ) برای P داریم:

$$r^2 P_{rr} + r P_r + P_{\theta\theta} = 0$$

پس نتیجه می‌شود که U نیز در معادله فوق صدق می‌کند. برای قسمت دوم، اثبات درستی حد، کافی است نشان دهیم اگر g در θ پیوسته باشد آن‌گاه برای هر $\epsilon > 0$ داده شده یک $\delta > 0$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $\delta > 0$ ، $r_0 - r < \delta$ داریم:

$$|U(r, \theta) - g(\theta)| < \epsilon.$$

با توجه به این که $\int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) d\phi = 2\pi$ ، می‌توان نوشت:

$$U(r, \theta) - g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) [g(\phi) - g(\theta)] d\phi.$$

برای راحتی در ادامه فرض می‌کنیم که g به‌صورت متناوب با دوره تناوب 2π توسعه یافته است و در نتیجه عبارت زیر انتگرال در (۲.۵) تابعی متناوب با دوره تناوب 2π از متغیر ϕ خواهد بود.

چون g در θ پیوسته است عدد $\alpha > 0$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $\alpha > 0$ ، $|\phi - \theta| \leq \alpha$ داریم:

$$|g(\phi) - g(\theta)| < \frac{\epsilon}{4}. \quad (۳.۵)$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$U(r, \theta) - g(\theta) = I_1(r, \theta) + I_2(r, \theta)$$

که در آن

$$I_1(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\alpha}^{\theta+\alpha} P(r_0, r, \phi - \theta) [g(\phi) - g(\theta)] d\phi$$

۹

$$I_1(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta+\alpha}^{\theta-\alpha+2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) [g(\phi) - g(\theta)] d\phi.$$

با توجه به مثبت بودن هسته پواسن $P(r_0, r, \phi - \theta)$ و رابطه (۳.۵) داریم:

$$\begin{aligned} |I_1(r, \theta)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\alpha}^{\theta+\alpha} P(r_0, r, \phi - \theta) |g(\phi) - g(\theta)| d\phi \\ &< \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) d\phi = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

از شکل ۲۴.۵ واضح است که عبارت $|s - z|^\alpha$ در مخرج کسر هسته پواسن وقتی متغیر ϕ به عنوان تابعی از s ، روی بازه بسته $[\theta + \alpha, \theta - \alpha + 2\pi]$ تغییر می‌کند، مقدار مینیمم مثبت m را اختیار می‌کند. پس اگر M یک کران بالا برای عبارت $|g(\phi) - g(\theta)|$ روی بازه $0 \leq \phi \leq 2\pi$ باشد، می‌توان نوشت:

$$|I_2(r, \theta)| \leq 2\pi \cdot \frac{(r_0^\alpha - r^\alpha)M}{2\pi m} < \frac{2Mr_0}{m}(r_0 - r) < \frac{2Mr_0}{m} \cdot \delta = \frac{\epsilon}{2}$$

برای هر $0 < r_0 - r < \delta$ ، که در آن

$$\delta = \frac{m\epsilon}{2Mr_0}.$$

نهایتاً از نامساوی مثلث نتیجه می‌شود:

$$|U(r, \theta) - g(\theta)| \leq |I_1(r, \theta)| + |I_2(r, \theta)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

برای هر $0 < r_0 - r < \delta$ ، که در آن δ به صورت داده شده فوق باشد. به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

مثال ۲۱.۵. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{aligned} T_{xx} + T_{yy} &= 0, & x^2 + y^2 &\leq 1 \\ T(x, y) &= \begin{cases} 1 & x^2 + y^2 = 1, \quad y < 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

حل. شرایط مرزی مسئله را در مختصات قطبی به صورت زیر داریم:

$$T(\lambda, \theta) = \begin{cases} 0 & 0 < \theta < \pi \\ 1 & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

طبق خاصیت اخیر جواب مسئله در مختصات قطبی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} T(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\phi - \theta)} T(\lambda, \theta) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} P(\lambda, r, \phi - \theta) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\phi - \theta)} d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{1+r}{1-r} \tan \frac{\phi - \theta}{2} \right) \Bigg|_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\tan^{-1} \left(\frac{1+r}{1-r} \tan \left(\pi - \frac{\theta}{2} \right) \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1+r}{1-r} \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

اگر از طرفین رابطه اخیر $\tan$ بگیریم و ساده‌سازی‌های لازم را انجام دهیم، خواهیم داشت:

$$T(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \frac{1 - r^2}{2r \sin \theta}$$

یا در مختصات دکارتی

$$T(x, y) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \frac{1 - x^2 - y^2}{2y}.$$

که در فوق $\tan^{-1} t$ به شاخه‌ای اشاره دارد که $0 \leq \tan^{-1} t \leq \pi$ باشد.

نکته. مثال فوق که حالت خاصی از مثال (۱۶.۵)، با $T_0 = 0$ و $T_1 = 1$ ، است به کمک فرمول انتگرال پواسن (۱.۵) حل شده است. راه حل فوق کوتاه‌تر از روش حل قبلی است.

تذکره. چون هسته پواسن برای $r < r_0$ تعریف می‌شود، به کمک سری هندسی می‌توان نشان داد:

$$P(r_0, r, \psi) = \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\psi) + r^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos(n\psi).$$

پس:

$$\begin{aligned} U(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) g(\phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos(n(\phi - \theta)) \right) g(\phi) d\phi \quad (4.5) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)). \end{aligned}$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi) \cos(n\phi) d\phi$$

و

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi) \sin(n\phi) d\phi.$$

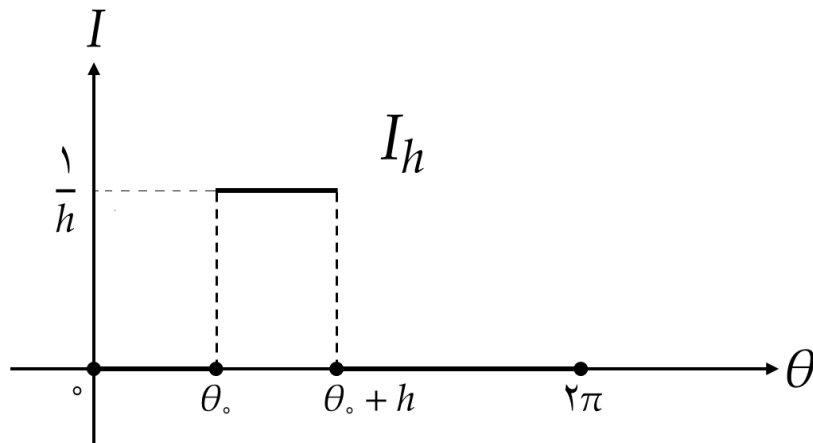
رابطه (۴.۵) یادآور نمایش جواب مسئله پواسن به صورت سری فوریه می‌باشد که قبلاً در فصل ۱ مطالعه شده است.

تذکره. فرض کنید I_h معرف تابع ضربه یک متناهی زیر باشد:

$$I(h, \theta - \theta_0) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + h \\ 0 & 0 \leq \theta < \theta_0 \text{ یا } \theta_0 + h < \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

که در آن h یک عدد ثابت است و $0 \leq \theta_0 < \theta_0 + h < 2\pi$ توجه کنید که

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+h} I(h, \theta - \theta_0) d\theta = 1.$$



شکل ۳۵.۵

به شکل ۳۵.۵ توجه کنید. به کمک قضیه مقدار میانگینی برای انتگرال معین می‌توان نشان داد که عدد $\xi \in [\theta_0, \theta_0 + h]$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) I(h, \phi - \theta_0) d\phi \\ &= P(r_0, r, \xi - \theta) \int_{\theta_0}^{\theta_0 + h} I(h, \phi - \theta_0) d\phi \\ &= P(r_0, r, \theta - \xi). \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) I(h, \phi - \theta_0) d\phi = P(r_0, r, \theta - \theta_0).$$

پس هسته پواسن $P(r_0, r, \theta - \theta_0)$ را می‌توان به‌صورت حد دنباله‌ای از توابع مانند $G_h(r, \theta)$ که درون دایره $r = r_0$ همساز هستند و مقدار مرزی آن‌ها نیز برابر با تابع ضربه متناهی $I(h, \theta - \theta_0)$ می‌باشند، داشت. یعنی:

$$P(r_0, r, \theta - \theta_0) = \lim_{h \rightarrow 0} G_h(r, \theta)$$

که در آن $G_h(r, \theta)$ جواب مسئله دیریکله زیر است:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & D = \{(r, \theta) : r < r_0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \\ u = I(h, \theta - \theta_0), & \partial D. \end{cases}$$

چون تابع ضربه متناهی $I(h, \theta - \theta_0)$ به تابع دلتای دیراک δ_{θ_0} میل می‌کند، می‌گویند هسته پواسن $P(r, r_0, \theta - \theta_0)$ جواب صوری مسئله دیریکله زیر است:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & D = \{(r, \theta) : r < r_0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \\ u = \delta_{\theta_0}, & \partial D. \end{cases}$$

به عبارت دیگر به کمک خاصیت ۹.۵ داریم:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \theta)} u(r_0, \phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \theta)} \delta_{\theta_0} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \theta)} \delta(\phi - \theta_0) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos(\theta_0 - \theta)} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos(\theta_0 - \theta)} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= P(r, r_0, \theta - \theta_0). \end{aligned}$$

حالت ۲) شرط مرزی نیومن: شکل ۳۴.۵ را در نظر بگیرید و قرار دهید $s = r_0 e^{i\phi}$ و $z = r e^{i\theta}$ که در آن $r < r_0$. برای s ثابت تعریف کنید:

$$\begin{aligned} Q(r_0, r, \phi - \theta) &= -2r_0 \ln |s - z| \\ &= -r_0 \ln [r_0^2 - rr_0 \cos(\phi - \theta) + r^2]. \end{aligned}$$

تابع فوق در داخل دایره $|z| = r_0$ همساز است زیرا مولفه حقیقی تابع تحلیلی $-2r_0 \log(z-s)$ است که در آن منظور از $\log(\cdot)$ شاخه لگاریتمی $\text{Log}_\phi(\cdot)$ است. اگر به علاوه $r \neq 0$ ، داریم:

$$\begin{aligned} Q_r(r_0, r, \phi - \theta) &= -\frac{r_0}{r} \left[\frac{2r^2 - 2r_0 \cos(\phi - \theta)}{r_0^2 - rr_0 \cos(\phi - \theta) + r^2} \right] \\ &= \frac{r_0}{r} [P(r_0, r, \phi - \theta) - 1]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

که در آن P همان هسته پواسن است. خواهیم دید برای نوشتن نمایش انتگرالی تابع همساز u که مشتق نرمال u_r آن بر دایره $r = r_0$ مقادیر از قبل تعیین شده $g(\theta)$ را بگیرد، می‌توان از تابع Q استفاده کرد.

اگر g قطعه به قطعه پیوسته و u_0 ثابتی دلخواه باشد، تابع

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(r_0, r, \phi - \theta) g(\phi) d\phi + u_0, \quad r < r_0. \quad (6.5)$$

را که همساز است، در نظر بگیرید. اگر مقدار میانگین g بر دایره $|z| = r_0$ صفر باشد، یعنی:

$$\int_0^{2\pi} g(\phi) d\phi = 0$$

آن گاه با توجه به رابطه (5.5) داریم:

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0}{r} [P(r_0, r, \phi - \theta) - 1] g(\phi) d\phi \\ &= \frac{r_0}{2\pi r} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) g(\phi) d\phi. \end{aligned}$$

اما طبق خاصیت ۹.۵ برای θ مشخصی که g در آن پیوسته باشد، داریم:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow r_0 \\ r < r_0}} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) g(\phi) d\phi = 2\pi g(\theta).$$

پس:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow r_0 \\ r < r_0}} u_r(r, \theta) = g(\theta).$$

در نتیجه خاصیت زیر را به دست آورده ایم:

خاصیت ۱۰.۵. فرض کنید D دیسک $|z| \leq r_0$ ، g مثل فوق قطعه به قطعه پیوسته و به علاوه مقدار میانگین g بر دایره $|z| = r_0$ صفر باشد. همچنین $u = u(r, \theta)$ برای $r < r_0$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$u(r, \theta) = -\frac{r_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln[r_0^2 - rr_0 \cos(\phi - \theta) + r^2] g(\phi) d\phi + u_0.$$

در این صورت $u(r, \theta)$ در درون دیسک D همساز است و به ازای هر θ مشخص که g در آن پیوسته باشد، داریم:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow r_0 \\ r < r_0}} u_r(r, \theta) = g(\theta).$$

یعنی u یک جواب مسئله نیومن پواسن در قرص D است به این معنی که وقتی (r, θ) در امتداد یک شعاع به سمت (r_0, θ_0) میل کند، به جز در تعدادی متناهی نقطه (r_0, θ) روی مرز دیسک که g در آنها ناپیوسته است، $U_r(r, \theta)$ به مقدار مرزی $g(\theta)$ میل می کند. به علاوه ضابطه $u(r, \theta)$ و شرط صفر بودن میانگین g بر دایره $|z| = r_0$ نتیجه می دهد که $u_0 = u(0, \theta)$.

فرمول انتگرال پواسن برای نیم دیسک بالایی

فرض کنید تابع شرط مرزی g که روی دایره $r = r_0$ به صورت پارامتری $g(\theta)$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$ تعریف می شود قطعه به قطعه پیوسته باشد.

حالت ۱) شرط مرزی دیریکله: اگر $g(2\pi - \theta) = -g(\theta)$ باشد در این صورت فرمول انتگرال پواسن (۱.۵) به صورت زیر در می آید:

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [P(r_0, r, \phi - \theta) - P(r_0, r, \phi + \theta)] g(\phi) d\phi.$$

مقدار تابع U فوق بر شعاع های افقی $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ از دیسک $|z| \leq r_0$ همان طور که در صورت تغییر U به عنوان دمای حالت ماندگار انتظار می رود، صفر است. پس فرمول

بالا مسئله دیریکله برای نیم‌دیسک بالایی

$$\{(r, \theta) : 0 < \theta < \pi, r < r_0\}$$

را حل می‌کند که بر قطر منطبق بر محور x ها شرط مرزی دیریکله صفر داریم و برای هر $\theta \in (0, \pi)$ مشخص که g در آن پیوسته باشد:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow r_0 \\ r < r_0}} U(r, \theta) = g(\theta).$$

حالت ۲) شرط مرزی دیریکله-نیومن: اگر $g(\theta) = g(2\pi - \theta)$ باشد در این صورت فرمول انتگرال پواسن (۱.۵) به صورت زیر در می‌آید:

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [P(r_0, r, \phi - \theta) + P(r_0, r, \phi + \theta)] g(\phi) d\phi.$$

برای تابع U فوق بر شعاع‌های افقی $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ از دیسک $|z| \leq r_0$ مشتق نرمال یعنی U_θ صفر است. پس فرمول بالا مسئله دیریکله برای نیم‌دیسک بالایی را حل می‌کند که بر قطر منطبق بر محور x ها شرط مرزی نیومن صفر داریم و برای هر $\theta \in (0, \pi)$ مشخص که g در آن پیوسته باشد:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow r_0 \\ r < r_0}} U(r, \theta) = g(\theta).$$

فرمول انتگرال پواسن برای بیرون دیسک

تابع تحلیلی $Z = \frac{r_0^2}{z}$ ، دایره $|Z| = r_0$ و درون آن در صفحه $Z = X + iY$ را به ترتیب به دایره $|z| = r_0$ و خارج آن در صفحه $z = x + iy$ می‌نگارد. با قرار دادن $z = re^{i\theta}$ و $Z = Re^{i\psi}$ داریم $r = \frac{r_0^2}{R}$ و $\theta = 2\pi - \psi$. پس تابع همساز $U(r, \theta)$ که با فرمول (۱.۵) تعریف می‌شود به تابع همساز زیر که در میدان $|z| > r_0$ همساز است، تبدیل می‌شود:

$$U\left(\frac{r_0^2}{R}, 2\pi - \psi\right) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 - R^2}{r_0^2 - 2r_0 R \cos(\phi + \psi) + R^2} g(\phi) d\phi.$$

حال به این دلیل که اگر $u(r, +\theta)$ همساز باشد آن گاه $u(r, -\theta)$ نیز همساز است، بنابراین تابع

$$H(R, \psi) = U\left(\frac{r_0}{R}, \psi - 2\pi\right)$$

یا

$$H(R, \psi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, R, \phi - \psi) g(\phi) d\phi \quad (۷.۵)$$

با شرط $R > r_0$ نیز همساز است. همچنین به ازای هر ψ که در آن $g(\psi)$ پیوسته باشد داریم:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow r_0 \\ R > r_0}} H(R, \psi) = g(\psi). \quad (۸.۵)$$

پس فرمول (۷.۵) مسئله دیریکله را برای بیرون دیسک، یعنی $|z| > r_0$ ، با شرط مرزی (۸.۵) حل می‌کند. یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که حد این جواب در بینهایت به صورت زیر است:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} H(R, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi) d\phi.$$

فرمول انتگرال پوآسن برای نیم صفحه بالایی

حالت ۱) شرط مرزی دیریکله: فرض کنید f در نیم صفحه بالایی، یعنی $\Im z \geq 0$ ، تابعی تحلیلی از z باشد و برای a و M مثبتی شرط رشد زیر را نیز دارا باشد:

$$|z^a f(z)| < M, \quad \Im z \geq 0.$$

برای z مشخص با $\Im z > 0$ به کمک فرمول انتگرال کشی می‌توان نوشت:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(s)}{s - z} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{f(t)}{t - z} dt \quad (۹.۵)$$

که در آن C_R نیم‌دایره بالایی صفحه به مرکز مبدأ و شعاع R است به‌طوری‌که $R > |z|$. به‌وضوح تخمین زیر برقرار است:

$$\left| \int_{C_R} \frac{f(s)}{s-z} ds \right| \leq \frac{M\pi}{R^a \left(1 - \frac{|z|}{R}\right)}.$$

در نتیجه برای $\Im z > 0$ ، با میل دادن $R \rightarrow \infty$ ، از تساوی‌های فوق به‌دست می‌آوریم:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt. \quad (10.5)$$

طبق شرط رشد فوق برای f انتگرال فوق همگرا است.

در صورتی که z در زیر محور حقیقی واقع باشد، سمت راست رابطه (۹.۵) و در نتیجه انتگرال (۱۰.۵) برای آن صفر خواهد بود. پس برای z در نیم‌صفحه بالایی و برای هر عدد ثابت C می‌توان نوشت:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} + \frac{C}{t-\bar{z}} \right) f(t) dt.$$

برای $C = 1$ و $C = -1$ به‌ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(t)}{|t-z|^2} dt, \quad y > 0$$

9

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-x)f(t)}{|t-z|^2} dt, \quad y > 0.$$

اگر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، آن‌گاه از فرمول‌های بالا نتیجه می‌شود که توابع همساز u و v در نیم‌صفحه بالایی بر حسب مقادیر مرزی u و v به‌وسیله فرمول‌های زیر نمایش داده می‌شوند. یعنی برای $y > 0$ داریم:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y u(t, 0)}{|t-z|^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y u(t, 0)}{(t-x)^2 + y^2} dt \quad (11.5)$$

9

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-t)v(t, 0)}{(t-x)^2 + y^2} dt.$$

فرمول (۱۱.۵) به فرمول انتگرال پواسن برای نیم‌صفحه بالایی یا فرمول انتگرال شوارتس معروف است.

تعریف ۴.۵. فرض کنید g تابعی حقیقی مقدار کراندار و قطعه‌به‌قطعه پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشد. $u = u(x, y)$ را که به صورت

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yg(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt \quad (۱۲.۵)$$

تعریف می‌شود، تبدیل شوارتس g گویند.

خاصیت زیر بیان می‌کند که تبدیل شوارتس حل مسئله پواسن در نیم‌صفحه بالایی را ممکن می‌سازد.

خاصیت ۱۱.۵. فرض کنید g مثل فوق و $u(x, y)$ تبدیل شوارتس آن، یعنی (۱۲.۵) باشد. آن گاه $u(x, y)$ در نیم‌صفحه بالایی همساز است و به ازای هر x مشخص که g در آن پیوسته باشد، داریم:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} u(x, y) = g(x). \quad (۱۳.۵)$$

یعنی u یک جواب مسئله دیریکله پواسن در نیم‌صفحه بالایی است به این معنی که وقتی (x, y) در امتداد موازی محور y ‌ها به (x, y) میل کند، به جز در تعدادی متناهی نقطه x روی محور حقیقی که g در آنها ناپیوسته است، $u(x, y)$ به مقدار مرزی $g(x)$ میل می‌کند.

علت. چون هسته تبدیل (۱۲.۵) به عنوان تابعی از (x, y) در نیم‌صفحه بالایی همساز است در نتیجه تابع $u(x, y)$ نیز در نیم‌صفحه بالایی همساز خواهد بود. زیرا انتگرال (۱۲.۵) را می‌توان به صورت تعدادی متناهی از انتگرال‌های معین نوشت و ترتیب مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را عوض کرد و به نتیجه مطلوب رسید.

برای اثبات درستی رابطه (۱۳.۵)، برای هر نقطه x که g در آن پیوسته باشد، تغییر متغیر $t = x + y \tan \tau$ را در (۱۲.۵) اعمال می‌کنیم تا به دست آوریم:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x + y \tan \tau) d\tau, \quad y > 0.$$

حال اگر α یک مقدار مثبت کوچک باشد و همچنین قرار دهیم:

$$G(x, y, \tau) = g(x, y, \tau) - g(x)$$

می‌توان نوشت:

$$\pi [u(x, y) - g(x)] = \int_{-\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} G(x, y, \tau) d\tau = I_1(x, y) + I_2(x, y) + I_3(x, y)$$

که در آن

$$\begin{aligned} I_1(x, y) &= \int_{-\frac{\pi}{\gamma}}^{-\frac{\pi}{\gamma} + \alpha} G(x, y, \tau) d\tau \\ I_2(x, y) &= \int_{-\frac{\pi}{\gamma} + \alpha}^{\frac{\pi}{\gamma} - \alpha} G(x, y, \tau) d\tau \\ I_3(x, y) &= \int_{\frac{\pi}{\gamma} - \alpha}^{\frac{\pi}{\gamma}} G(x, y, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

اگر M یک کران بالایی برای $g(x)$ باشد، $|G(x, y, \tau)| \leq 2M$ خواهد بود. برای $\epsilon > 0$ داده شده، $\alpha > 0$ را طوری اتخاذ کنید تا $\epsilon > 6M\alpha$ باشد. یعنی خواهیم داشت:

$$|I_1(x, y)| \leq 2M\alpha < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{و} \quad |I_3(x, y)| \leq 2M\alpha < \frac{\epsilon}{3}.$$

حال برای این که اثبات کامل شود، کافی است نشان دهیم برای ϵ داده شده یک $\delta > 0$ موجود است به طوری که برای هر $0 < y < \delta$ ، داریم:

$$|I_2(x, y)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

چون g در x پیوسته است در نتیجه یک $\gamma > 0$ موجود است به طوری که برای هر $|\tan \tau| < \gamma$ ، $0 < y < \gamma$ داریم:

$$|G(x, y, \tau)| < \frac{\epsilon}{3\pi}.$$

از طرفی ماگزیمم مقدار $|\tan \tau|$ وقتی τ در بازه $[-\frac{\pi}{4} + \alpha, \frac{\pi}{4} + \alpha]$ تغییر می‌کند برابر $\cot \alpha$ است. در نتیجه اگر قرار دهیم $\delta = \gamma \tan \tau$ ، در این صورت برای هر $y \in (0, \delta)$ خواهیم داشت:

$$|I_2(x, y)| < \frac{\epsilon}{3\pi}(\pi - 2\alpha) < \frac{\epsilon}{3}.$$

و نهایتاً چون

$$\pi|u(x, y) - g(x)| \leq |I_1(x, y)| + |I_2(x, y)| + |I_3(x, y)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

اثبات کامل می‌گردد.

مثال ۲۲.۵. مثال ۱۷.۵ را این بار به کمک خاصیت فوق حل کنید.

حل. طبق خاصیت ۱۱.۵ برای حل مثال ۱۷.۵ یعنی:

$$T_{xx} + T_{yy} = 0, \quad y > 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$T(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}$$

داریم:

$$T(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yT(t, 0)}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

$$= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-x)^2 + y^2} \cdot \frac{t}{1+t^2} dt, \quad y > 0.$$

یافتن یک تابع اولیه برای محاسبه انتگرال ناسره فوق ممکن ولی دشوار است. هر چند که به کمک قضیه مانده‌ها می‌توان آن را محاسبه کرد و داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-x)^2 + y^2} \cdot \frac{t}{1+t^2} dt = 2\pi i(c_1 + c_2)$$

که در آن

$$c_1 = \text{Res} \left(\frac{1}{(\xi-x)^2 + y^2} \cdot \frac{\xi}{1+\xi^2}, \xi = i \right)$$

9

$$c_1 = \text{Res} \left(\frac{1}{(\xi - x)^2 + y^2} \cdot \frac{\xi}{1 + \xi^2}, \xi = x + iy \right).$$

هر دو قطب $\xi_1 = i$ و $\xi_2 = x + iy$ از مرتبه اول هستند و داریم:

$$\begin{aligned} c_1 &= \lim_{\xi \rightarrow i} (\xi - i) \cdot \frac{\xi}{(\xi^2 - 2x\xi + x^2 + y^2)(1 + \xi^2)} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow i} \frac{\xi}{(\xi + i)(\xi^2 - 2x\xi + x^2 + y^2)} = \frac{1}{2(-1 - 2ix + x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} c_2 &= \lim_{\xi \rightarrow x+iy} (\xi - x + iy) \cdot \frac{\xi}{(\xi^2 + 1)(\xi^2 - 2x\xi + x^2 + y^2)} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow x+iy} \frac{\xi}{(\xi^2 + 1)(\xi - x + iy)} = \frac{x + iy}{2iy(x^2 - y^2 + 2ixy + 1)}. \end{aligned}$$

محاسبه‌ای ساده نتیجه می‌دهد:

$$2\pi i(c_1 + c_2) = \frac{\pi x}{y(x^2 + (y+1)^2)}$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-x)^2 + y^2} \cdot \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{y}{\pi} \cdot \frac{\pi x}{y(x^2 + (y+1)^2)} \\ &= \frac{x}{x^2 + (y+1)^2}. \end{aligned}$$

حالت ۲) شرط مرزی نیومن: فرض کنید $g(x)$ تابعی حقیقی مقدار کراندار و

قطعه به قطعه پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشد. همچنین فرض کنید برای اعداد $a > 1$ و $M > 0$

شرط رشد زیر نیز برقرار باشد:

$$|x^a g(x)| < M, \quad -\infty < x < \infty.$$

برای هر t ، تابع $\text{Log}|z - t|$ در نیم‌صفحه $\Im z > 0$ همساز است. چون ترتیب مشتق و انتگرال را می‌توان عوض کرد، تابع

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|z - t| g(t) dt + u_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[(t-x)^2 + y^2] g(t) dt + u_0, \quad y > 0. \end{aligned} \quad (14.5)$$

که در آن u_0 یک عدد ثابت حقیقی است در نیم‌صفحه بالایی همساز خواهد بود. با مشتق‌گیری از فرمول بالا داریم:

$$u_y(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yg(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt, \quad y > 0.$$

پس طبق خاصیت ۱۱.۵ برای هر x که g در آن نقطه پیوسته باشد، داریم:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} u_y(x, y) = g(x).$$

پس خاصیت زیر به دست می‌آید:

خاصیت ۱۲.۵. فرض کنید g مثل فوق و $u(x, y)$ توسط (۱۴.۵) داده شده باشد. آن‌گاه $u(x, y)$ در نیم‌صفحه بالایی همساز است و به ازای هر x مشخص که g در آن پیوسته باشد، داریم:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} u_y(x, y) = g(x).$$

یعنی u یک جواب مسئله نیومن پوآسن در نیم‌صفحه بالایی است به این معنی که وقتی (x, y) در امتداد موازی محور y ‌ها به (x, y) میل کند، به جز در تعدادی متناهی نقطه x روی محور حقیقی که g در آنها ناپیوسته است، $u_y(x, y)$ به مقدار مرزی $g(x)$ میل می‌کند.

تذکره. اگر g تابعی فرد باشد، فرمول (۱۴.۵) به صورت زیر در می‌آید:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \ln \left[\frac{(t-x)^2 + y^2}{(t+x)^2 + y^2} \right] g(t) dt + u_0, \quad x > 0, y > 0.$$

این فرمول نمایش دهنده تابعی همساز در ربع اول، یعنی $x > 0$ و $y > 0$ می‌باشد و به‌علاوه در شرایط مرزی زیر نیز صدق می‌کند:

$$u(0, y) = 0, \quad y > 0,$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} u_y(x, y) = g(x), \quad x > 0.$$

تمرین ۴.۵

۱. درستی عبارت زیر را برای $r < r_0$ به‌کمک سری هندسی تحقیق کنید.

$$P(r_0, r, \psi) = \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\psi) + r^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos(n\psi).$$

۲. فرمول‌های انتگرالی زیر را که حالت خاصی از فرمول (۷.۵) هستند، در نظر بگیرید:

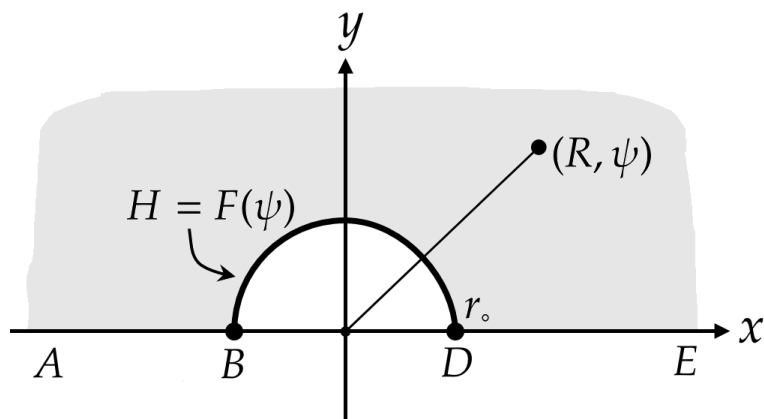
$$H(R, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [P(r_0, R, \phi + \psi) - P(r_0, R, \phi - \psi)] g(\phi) d\phi$$

$$H(R, \psi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [P(r_0, R, \phi + \psi) + P(r_0, R, \phi - \psi)] g(\phi) d\phi.$$

نشان دهید آنها در میدان بی‌کران $R > r_0$ و $0 < \psi < \pi$ ، که در شکل ۳۶.۵ نشان داده شده است همساز هستند و در شرط مرزی

$$\lim_{\substack{R \rightarrow r_0 \\ R > r_0}} H(R, \psi) = g(\psi), \quad 0 < \psi < \pi$$

صدق می‌کنند و به‌علاوه مقدار تابع اولی بر پرتوهای BA و DE صفر و مقدار مشتق نرمال دومی بر پرتوهای BA و DE صفر هستند.



شکل ۳۶.۵

۳. به عنوان حالی خاصی از (۱۲.۵) نشان دهید

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(t-x)^2 + y^2} - \frac{1}{(t+x)^2 + y^2} \right] g(t) dt, \quad x > 0, y > 0$$

تابعی کراندار و همساز در ربع اول است و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند:

$$u(0, y) = 0, \quad y > 0,$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} u(x, y) = g(x), \quad x > 0, x \neq x_j$$

که در آن g به ازای همه x ‌های مثبت کراندار و به جز حداکثر تعدادی متناهی نقطه x_j که در آن g ناپیوسته است ولی حد چپ و راست متناهی دارد، پیوسته است.

۴. به عنوان حالی خاصی از (۱۲.۵) نشان دهید

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(t-x)^2 + y^2} + \frac{1}{(t+x)^2 + y^2} \right] g(t) dt, \quad x > 0, y > 0$$

تابعی کراندار و همساز در ربع اول است و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند:

$$u_x(0, y) = 0, \quad y > 0,$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} u(x, y) = g(x), \quad x > 0, x \neq x_j$$

که در آن g به ازای همه x ‌های مثبت کران دار و به جز حداکثر تعدادی متناهی نقطه x_j که در آن g ناپیوسته است ولی حد چپ و راست متناهی دارد، پیوسته است.

۵. به عنوان حالت خاصی از فرمول (۶.۵) تابع

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [Q(r_0, r, \phi - \theta) - Q(r_0, r, \phi + \theta)] g(\phi) d\phi$$

را برای g قطعه به قطعه پیوسته در نظر بگیرید. نشان دهید u فوق در میدان $r < r_0$ و $0 < \theta < \pi$ همساز و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند:

$$u(r, 0) = u(r, \pi) = 0, \quad r < r_0.$$

و به علاوه به ازای هر $0 < \theta < \pi$ که g در آن پیوسته باشد داریم:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow r_0 \\ r < r_0}} u_r(r, \theta) = g(\theta).$$

۶. به عنوان حالت خاصی از فرمول (۶.۵) تابع

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [Q(r_0, r, \phi - \theta) + Q(r_0, r, \phi + \theta)] g(\phi) d\phi$$

را برای g قطعه به قطعه پیوسته‌ای که مقدار میانگین آن بر دایره $|z| = r_0$ صفر است، در نظر بگیرید. نشان دهید u فوق در میدان $r < r_0$ و $0 < \theta < \pi$ همساز و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند:

$$u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0, \quad r < r_0.$$

و به علاوه به ازای هر $0 < \theta < \pi$ که g در آن پیوسته باشد داریم:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow r_0 \\ r < r_0}} u_r(r, \theta) = g(\theta).$$

۵.۵ مروری بر نگاشت‌های همدیس و کاربرد آن‌ها

هدف اصلی از این بخش تبدیل‌های میدان‌های "بد" از صفحه x و y به میدان خوب در صفحه u و v است. به این ترتیب که مسئله‌ای که در میدان‌های "بد" قابل حل نیست را تبدیل به مسئله‌ای کنیم که در میدان‌های خوب با روش‌های متداول قابل حل است. سپس آن را در میدان دوم حل و جواب را به میدان قبل انتقال می‌دهیم.

مثال ۲۳.۵. مطلوبست حل مسئله زیر

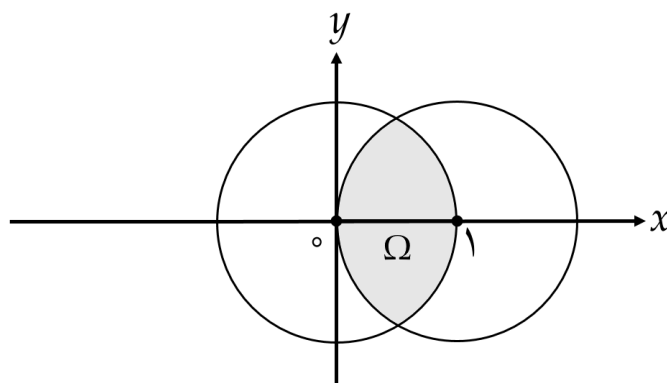
$$T_{xx} + T_{yy} = xy, \quad (x, y) \in \Omega$$

$$T|_{\partial\Omega} = x + y$$

که در اینجا میدان Ω میدان مشترک دو دیسک به صورت زیر است:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, (x-1)^2 + y^2 < 1\}.$$

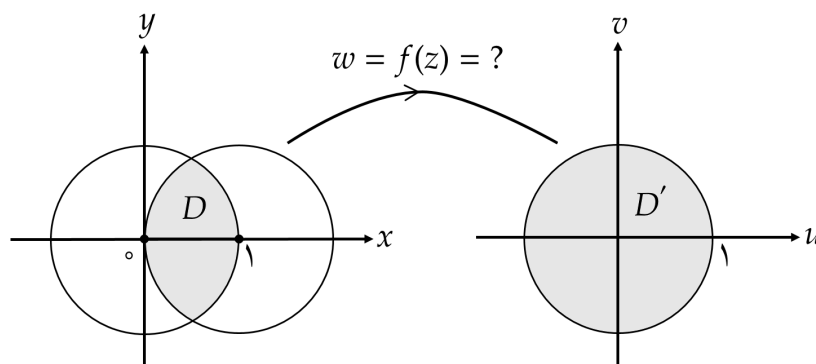
به شکل ۳۷.۵ توجه کنید.



شکل ۳۷.۵

مسئله فوق یک مسئله پواسن است. روی این میدان این مسئله با روش‌های فصل ۱ قابل حل نیست، چون پایه مناسب این میدان را نداریم. لیکن اگر این میدان را به نیم‌صفحه یا دیسک تبدیل کنیم قابل حل است. برای این منظور این میدان "بد" را با استفاده از یک نگاشت همدیس تبدیل به میدان "خوب" می‌کنیم. به این ترتیب به مسئله زیر خواهیم رسید:

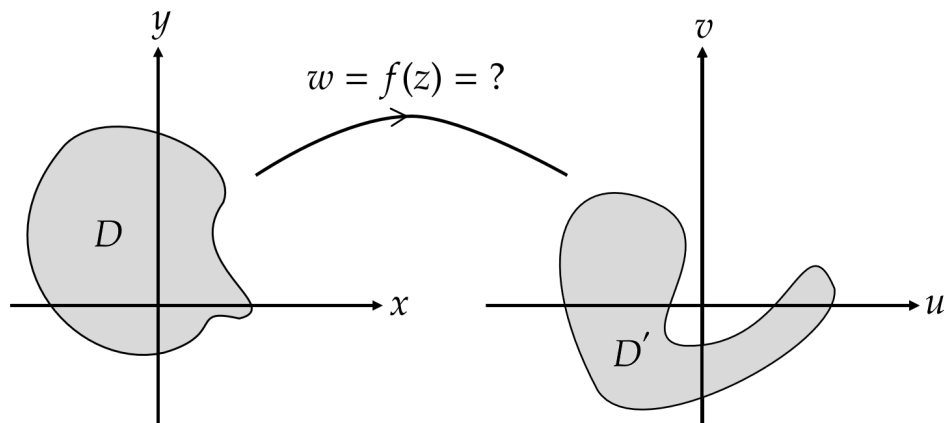
مسئله نوع ۱: میدان D در صفحه (x, y) یا همان z داده شده و میدان D' در صفحه (u, v) یا همان w داده شده است. تابع تحلیلی $w = f(z)$ را طوری تعیین می‌کنیم تا میدان D را به صورت $1-1$ و پوشا و همدیس بر میدان D' بنگارد. مثلاً به شکل ۳۸.۵ توجه کنید.



شکل ۳۸.۵

برای حل این مسئله ما می‌بایستی اطلاعاتی در مورد رفتار هندسی توابع ساده کسب کنیم و بدانیم این توابع یک میدان داده شده را به چه میدانی تبدیل می‌کنند. البته میدان داده شده از نظر هندسی یک میدان قابل بیان به وسیله اشکال هندسی مقدماتی است. پس مسئله زیر را برای مسئله فوق نیز بایستی بررسی کنیم.

مسئله نوع ۲: میدان D در صفحه z و تابع تحلیلی $w = f(z)$ داده شده است. مطلوب تعیین $D' = f(D)$ است. مثلاً به شکل ۳۹.۵ توجه کنید.



شکل ۳۹.۵

در این بخش ما فقط چند تابع ساده زیر را در مورد مسئله نوع ۲ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱. نگاشت خطی یا تبدیل خطی $w = az + b$ ، به طوری که $a, b \in \mathbb{C}$.

۲. نگاشت معکوس یا تبدیل معکوس $w = \frac{1}{z}$.

۳. نگاشت نمایی $w = e^z$ و معکوس آن.

۴. نگاشت توانی $w = z^n$ ، به طوری که n یک عدد طبیعی و حول مبدأ.

۵. نگاشت مبیوس یا تبدیل مبیوس $w = \frac{az+b}{cz+d}$ ، به طوری که $ad - bc \neq 0$.

تعریف ۵.۵. تابعی که دامنه و برد آن اشکال هندسی باشد را نگاشت می‌گویند. واژه تبدیل هم به صورت مشابه وقتی که کار جبری و هندسی انجام می‌گردد، به کار برده می‌شود.

نگاشت‌های فوق معمولاً در کتاب‌های ریاضی مهندسی و همچنین در این کتاب مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه فقط از این نگاشت‌ها بهره خواهیم گرفت.

برای حل مسئله نوع ۲ دو روش زیر متداول است:

روش اول هندسی: در این روش نگاشت داده شده را به چند نگاشت ساده تجزیه می‌کنیم و تصویر میدان داده شده را با اعمال متوالی این نگاشت‌ها به دست می‌آوریم.

روش دوم جبری: در این روش میدان D به وسیله نامعادلاتی به صورت

$$D : g_k(x, y) \leq 0 \quad k = 1, 2, \dots$$

و نگاشت $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ که ممکن است در مختصات قطبی باشد، داده می‌شود. پس داریم

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

از این دو معادله x و y را بر حسب u و v محاسبه و در نامعادلات D قرار می‌دهیم. به این ترتیب D' تصویر D به دست می‌آید.

مثال ۲۴.۵. تصویر میدان $|z - 1| < 1$ را تحت نگاشت $w = \frac{z-2}{z}$ به دست آورید.

حل. (۱) روش هندسی: ابتدا نگاشت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$w = -2 \cdot \frac{1}{z} + 1, \quad w_1 = \frac{1}{z}, \quad w_2 = -2w_1, \quad w = w_2 + 1.$$

حال با دنبال کردن تصاویر شکل ۴۰.۵ نتیجه می‌شود که $u < 0$ ، یعنی نیم صفحه چپ، جواب است.

(۲) روش جبری: از حل $w = \frac{z-2}{z}$ برای z بر حسب w به دست می‌آوریم:

$$w = -\frac{2}{z} + 1 \Rightarrow w - 1 = -\frac{2}{z} \Rightarrow z = \frac{2}{1-w}.$$

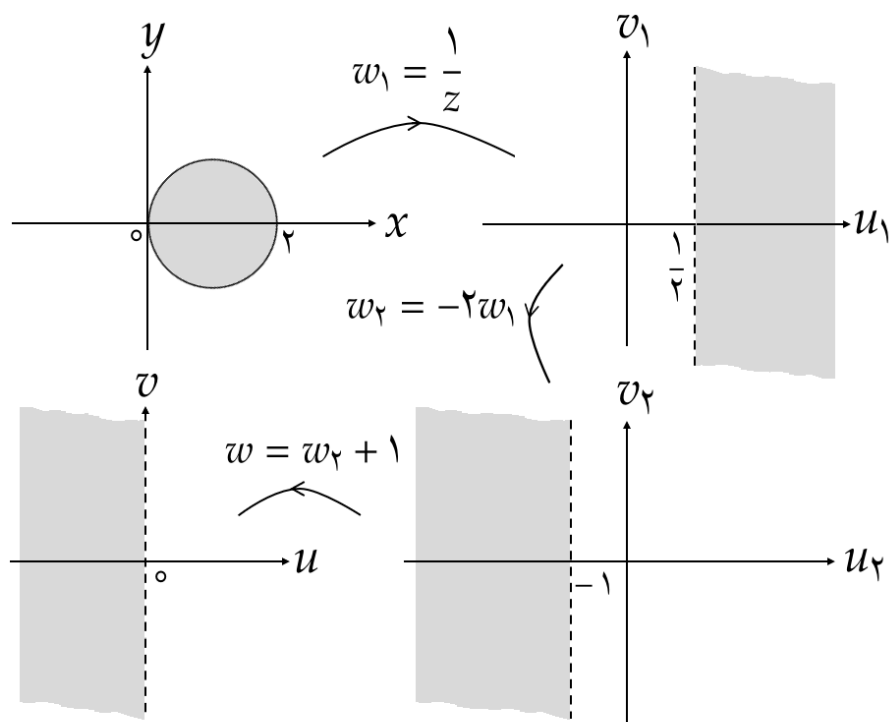
حال در فرمول میدان قرار دهید

$$|z - 1| < 1 \Rightarrow \left| \frac{2}{1-w} - 1 \right| < 1 \Rightarrow |2 - 1 + w| < |w - 1|$$

$$\Rightarrow |1 + w| < |1 - w| \Rightarrow |1 + w|^2 < |1 - w|^2$$

$$\Rightarrow (u + 1)^2 + v^2 < (u - 1)^2 + v^2 \Rightarrow 2u < -2u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4u < 0 \Rightarrow u < 0.$$



شکل ۴۰.۵

در بعضی مسائل نوشتن مطالب در مختصات قطبی حل را ساده‌تر می‌کند.

مثال ۲۵.۵. تصویر خط $x + y = 1$ را تحت نگاشت $w = z^2$ به دست آورید.

حل. (۱) روش جبری: برای محاسبه z بر حسب w تابع را در مختصات قطبی در نظر می‌گیریم.

$$z = re^{i\theta}, \quad w = Re^{i\phi},$$

$$w = z^2 \Rightarrow Re^{i\phi} = r^2 e^{2i\theta} \Rightarrow R = r^2, \phi = 2\theta$$

$$\Rightarrow r = R^{\frac{1}{2}}, \theta = \frac{1}{2}\phi.$$

حال معادله خط را در مختصات قطبی می‌نویسیم.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

$$x + y = 1 \Rightarrow r(\cos \theta + \sin \theta) = 1.$$

پس تصویر خط مذکور $R^1\left(\cos \frac{\phi}{4} + \sin \frac{\phi}{4}\right) = 1$ می‌شود. با به توان دو رساندن خواهیم داشت

$$R(1 + \sin \phi) = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1 + \sin \phi}.$$

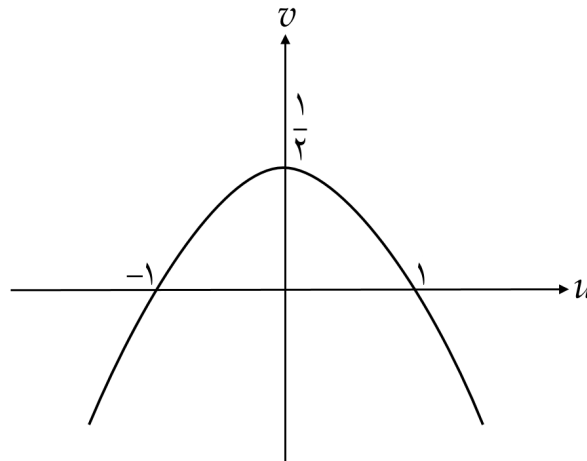
اگر رابطه فوق را در مختصات دکارتی بنویسیم

$$\sqrt{u^2 + v^2} + v = 1 \Rightarrow u^2 + v^2 = (1 - v)^2 = v^2 - 2v + 1$$

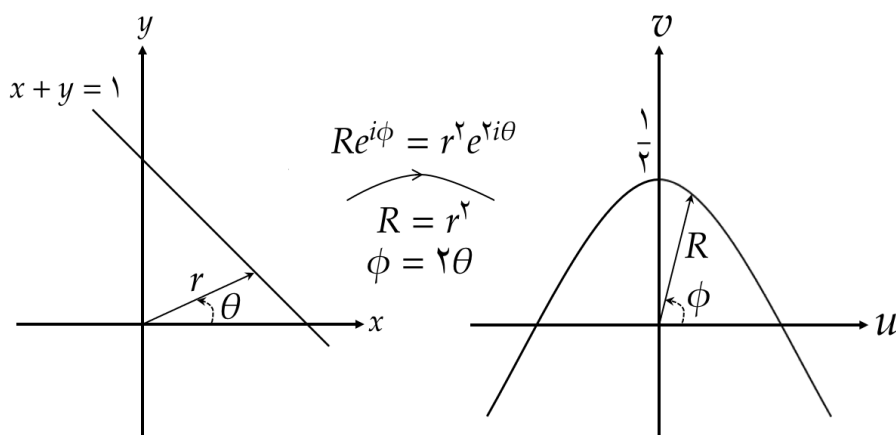
یا

$$v = \frac{1}{2}(1 - u^2)$$

یعنی تصویر یک سهمی است. به شکل ۴۱.۵ توجه کنید.



شکل ۴۱.۵



شکل ۴۲.۵

(۲) روش هندسی: کافی است تصاویر شکل ۴۲.۵ را دنبال کنید.

مثال ۲۶.۵. تصویر هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ ، به طوری که $x > 0$ را تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ بیابید.

حل. (۱) روش جبری: برای نگاشت معکوس داریم $z = \frac{1}{w}$. در نتیجه

$$R = \frac{1}{r}, \quad \phi = -\theta, \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}, \quad x = \frac{u}{u^2 + v^2}.$$

و هر یک از این مقادیر z بر حسب w مسئله را حل می‌کند. در اینجا از مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2} - \frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2} = 1$$

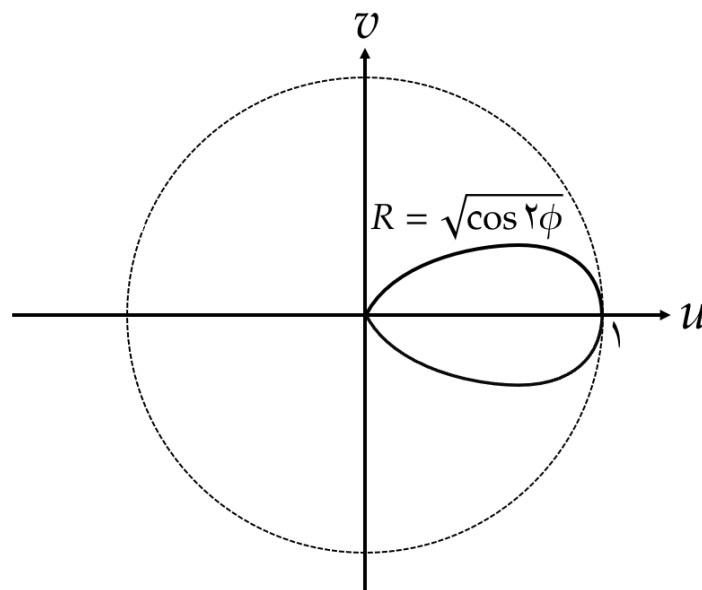
یا

$$u^2 - v^2 = (u^2 + v^2)^2.$$

برای تشخیص منحنی جواب آن را در مختصات قطبی می‌نویسیم. یعنی

$$R^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = R^4 \Rightarrow R = \sqrt{\cos 2\phi}.$$

توجه کنید $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ پس $-\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{4}$. با رسم نمودار در مختصات قطبی، منحنی تصویر به صورت شکل ۴۳.۵ است.

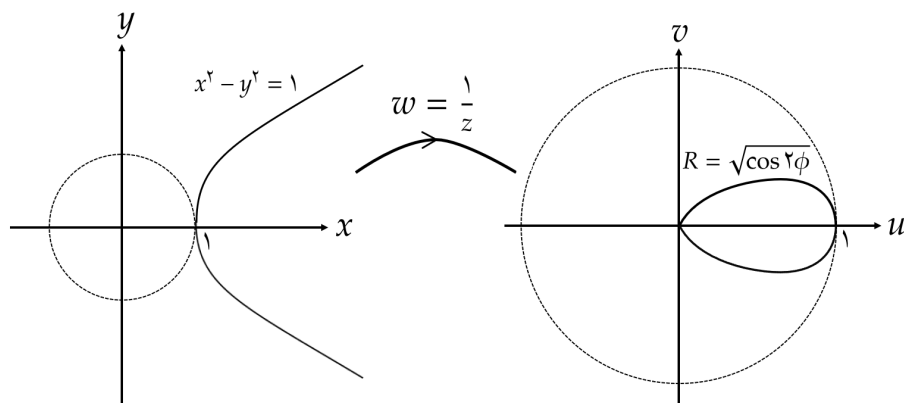


شکل ۴۳.۵

(۲) روش هندسی: تصویر در داخل دایره واحد قرار می‌گیرد. تصاویر شکل ۴۴.۵ را ببینید.

مثال ۲۷.۵. تصویر میدان $|x-1| < 1$ و $|y| < \pi$ را تحت نگاشت $w = e^z$ بیابید.

حل. (۱) روش جبری: برای تعیین z بر حسب w در نگاشت نمایی، z را در مختصات



شکل ۴۴.۵

دکارتی و w را در مختصات قطبی در نظر می‌گیریم.

$$w = Re^{i\phi}, \quad z = x + iy,$$

$$w = e^z \Rightarrow Re^{i\phi} = e^x e^{iy} \Rightarrow R = e^x, \phi = y.$$

$$|x - 1| < 1 \Rightarrow -1 < x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2 \Rightarrow$$

$$1 < e^x < e^2 \Rightarrow 1 < R < e^2,$$

$$|y| < \pi \Rightarrow |\phi| < \pi \Rightarrow -\pi < \phi < \pi.$$

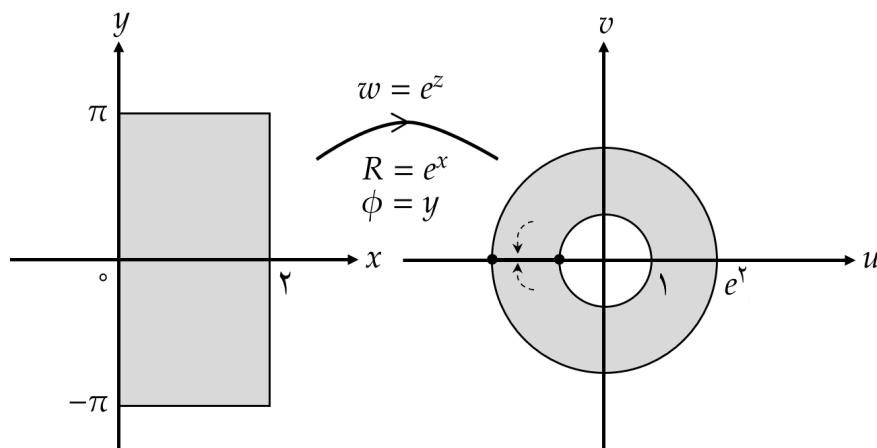
به شکل ۴۵.۵ توجه کنید.

(۲) روش هندسی: با استفاده از تساوی‌های زیر

$$0 < x < 2, \quad \phi = y, \quad R = e^x$$

و $-\pi < y < \pi$ تصویر هندسی شکل ۴۵.۵ قابل حصول است.

مثال ۲۸.۵. تصویر ناحیه $x > 0$ و $y > 0$ را تحت $w = \text{Log } z$ بیابید.



شکل ۴۵.۵

حل. (۱) روش جبری: برای این نگاشت z را در مختصات قطبی و w را در مختصات دکارتی در نظر می‌گیریم.

$$w = u + iv, \quad z = re^{i\theta}$$

$$w = \text{Log } z = \ln r + i\theta, \quad r > 0, -\pi < \theta < \pi.$$

پس

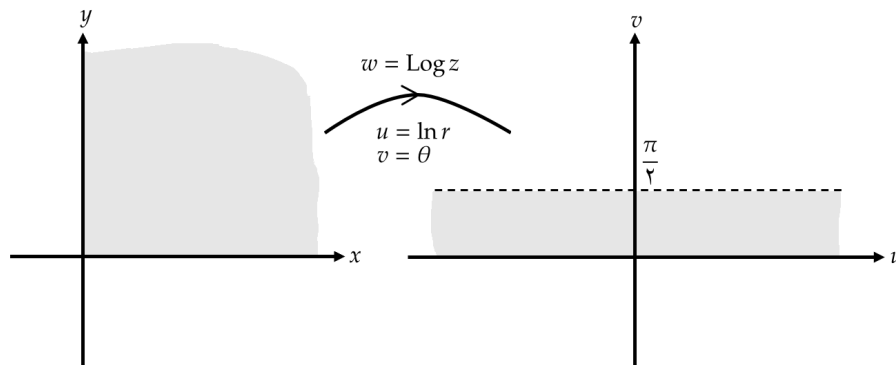
$$u + iv = \ln r + i\theta \Rightarrow u = \ln r, \quad v = \theta$$

$$x > 0, \quad y > 0 \Rightarrow r > 0, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -\infty < u < \infty, \quad 0 < v < \frac{\pi}{2}.$$

به شکل ۴۶.۵ توجه کنید.

(۲) روش هندسی: با استفاده از $u = \ln r$ و $v = \theta$ و با توجه به اینکه $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $r > 0$ ، تصویر هندسی شکل ۴۶.۵ به دست می‌آید.



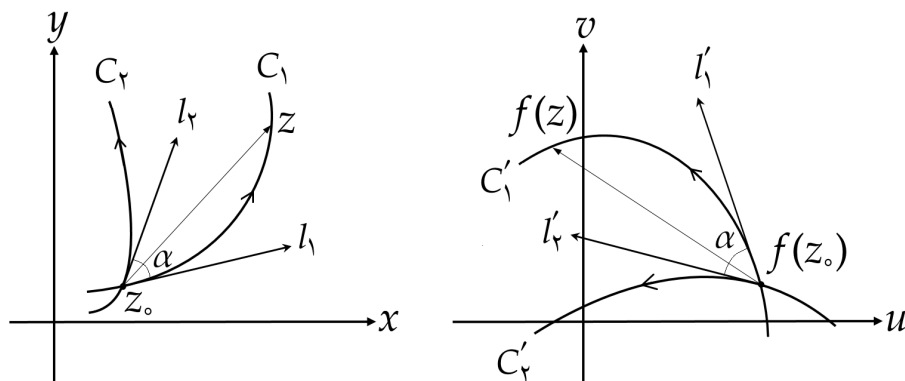
شکل ۴۶.۵

اکنون می‌توانیم به بررسی مسئله نوع اول نگاشت‌ها بپردازیم. در ابتدا یک بار دیگر این مسئله را بیان می‌کنیم.

مسئله نوع اول: میدان D در صفحه z و میدان D' در صفحه w داده شده است. تابع تحلیلی f را طوری بیابید تا میدان D را به صورت $1-1$ و پوشا بر میدان D' بنگارد. یک چنین تابع تحلیلی را یک نگاشت همدیس (یا کانفرمال) می‌گویند.

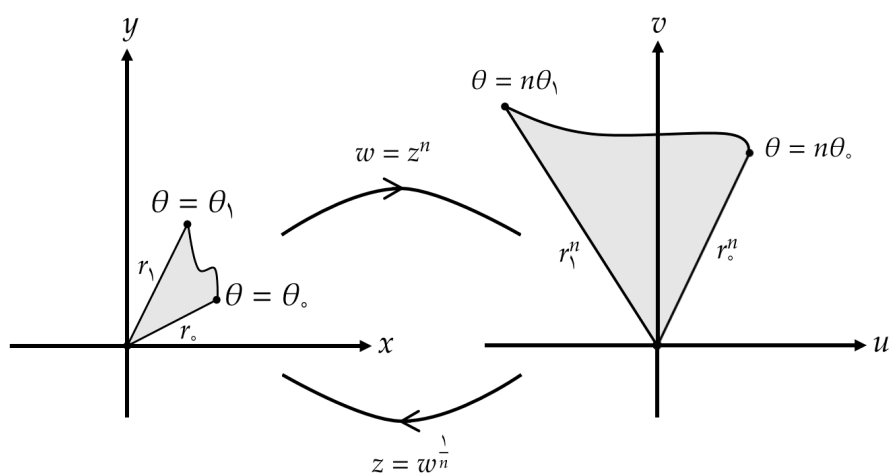
تعریف ۶.۵. نگاشتی که زاویه بین دو منحنی در صفحه z را بعد از تصویر در صفحه w هم از نظر مقدار و هم از نظر جهت حفظ کند، نگاشت همدیس می‌گویند. به این معنی که اگر دو منحنی C_1 و C_2 از نقطه z_0 بگذرند و l_1 و l_2 به ترتیب بردارهای مماس آن‌ها در نقطه z_0 باشند و C'_1 و C'_2 هم به ترتیب تصویر C_1 و C_2 تحت اثر f و l'_1 و l'_2 بردارهای مماس بر آن‌ها در نقطه $f(z_0)$ باشند، آنگاه زاویه بین بردارهای مماس l'_1 و l'_2 برابر با زاویه بین بردارهای مماس l_1 و l_2 است. همچنین اگر l_1 با دوران در جهت مثلثاتی به اندازه α بر l_2 منطبق شود، l'_1 نیز با دوران به اندازه α در جهت مثلثاتی بر l'_2 منطبق گردد. به شکل ۴۷.۵ توجه کنید.

نگاشت‌هایی که برای حل مسائل نوع اول بیشتر مفیداند:



شکل ۴۷.۵

۱. نگاشت توانی $w = z^n$ حول مبدأ. شکل ۴۸.۵ را ببینید.

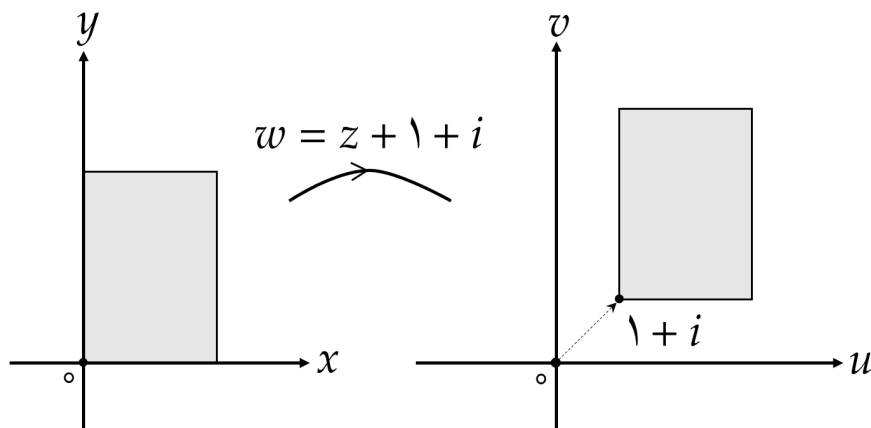


شکل ۴۸.۵

نگاشت معکوس آن عمل عکس انجام می‌دهد. نگاشت $w = z^n$ همه جا غیر از مبدأ همدیس است.

۲. صورت‌های گوناگون از نگاشت‌های مبیوس $w = \frac{az+b}{cz+d}$ به طوری که $ad - bc \neq 0$ ، در حل مسائل نوع اول بسیار مفیداند.

الف) انتقال $w = z + b$. شکل ۴۹.۵ را ببینید.



شکل ۴۹.۵

ب) دوران $w = e^{i\theta_0} z$. شکل ۵۰.۵ را ببینید.

ج) انقباض یا انقباض $w = r_0 z$ به طوری که $r_0 > 0$. شکل ۵۱.۵ را ببینید.

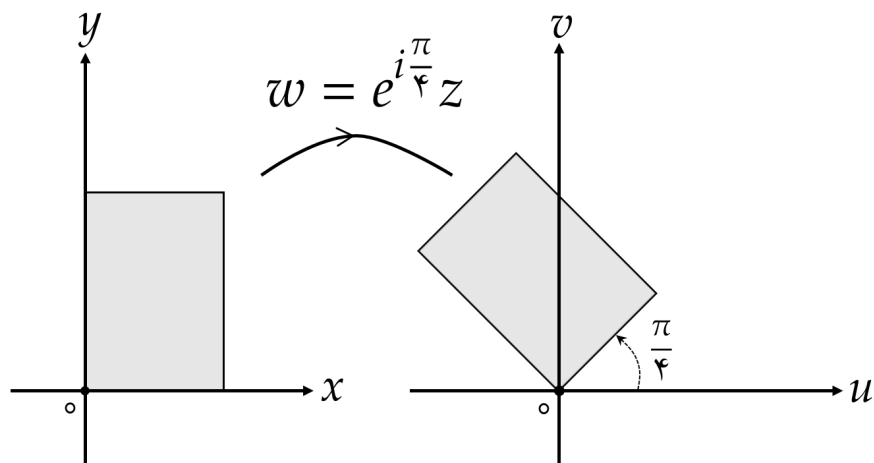
د) تبدیل نیم‌صفحه بالایی به دیسک واحد $w = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ به طوری که $\Im z_0 > 0$. معمولاً می‌گیریم، $z_0 = i$. شکل ۵۲.۵ را ببینید.

ه) ناحیه بین دو دایره متقاطع یا یک دایره و یک خط قابل تبدیل به زاویه است. نگاشت $w = \frac{z - z_0}{z - z_1}$ ، هر دو منحنی را به دو خط متقاطعی تصویر می‌کند که صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌نماید. شکل ۵۳.۵ را ببینید.

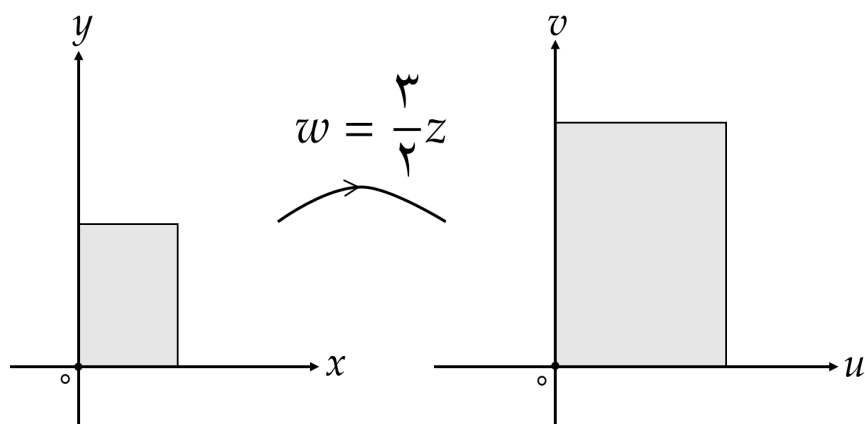
تذکره. یک نگاشت مبیوس خط و دایره را به خط یا دایره تبدیل می‌کند.

۳. نگاشت نمایی $w = e^z$ نوار را به نیم‌صفحه تبدیل می‌کند. شکل ۵۴.۵ را ببینید.

خاصیت زیر در تشخیص همدیس بودن تابع تحلیلی مفید است.



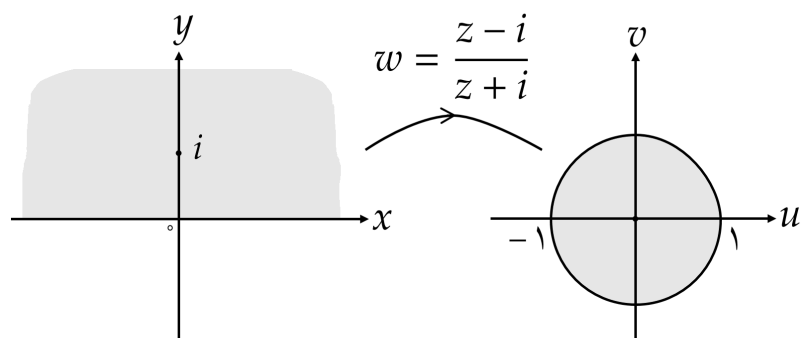
شکل ۵۰.۵



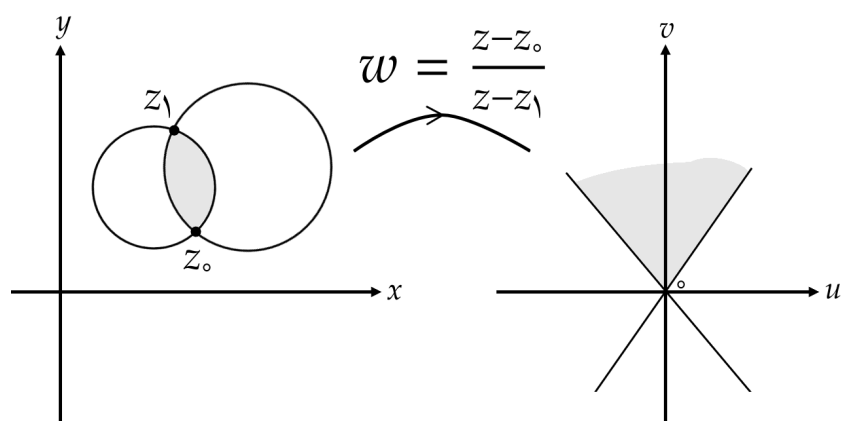
شکل ۵۱.۵

خاصیت ۱۳.۵. اگر تابع تحلیلی $f(z)$ در نقطه z_0 دارای $f'(z_0) \neq 0$ باشد، آنگاه نگاشت f در نقطه z_0 هم‌دیس است.

مثال ۲۹.۵. میدان بین دو دایره $|z| = 1$ و $|z - 1| = 1$ را به صورت $1 - 1$ و پوشا و هم‌دیس بر دیسک واحد بنگارید.

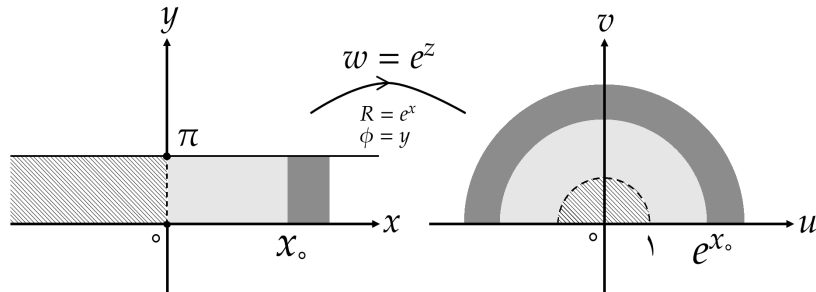


شکل ۵۲.۵



شکل ۵۳.۵

حل. با یک نگاشت مبیوس این ناحیه تبدیل به یک زاویه به رأس مبدأ می‌شود. سپس زاویه به دست آمده نیز با تبدیل خطی و تبدیل توانی به نیم‌صفحه و نیم‌صفحه نیز با تبدیل مبیوس تبدیل به دیسک واحد می‌گردد. در ابتدا تلاقی بین دو دایره را



شکل ۵.۴.۵

به دست می‌آوریم.

$$|z| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$|z - 1| = 1 \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y^2 = 1 - x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

نگاشت مبیوس عبارت است از

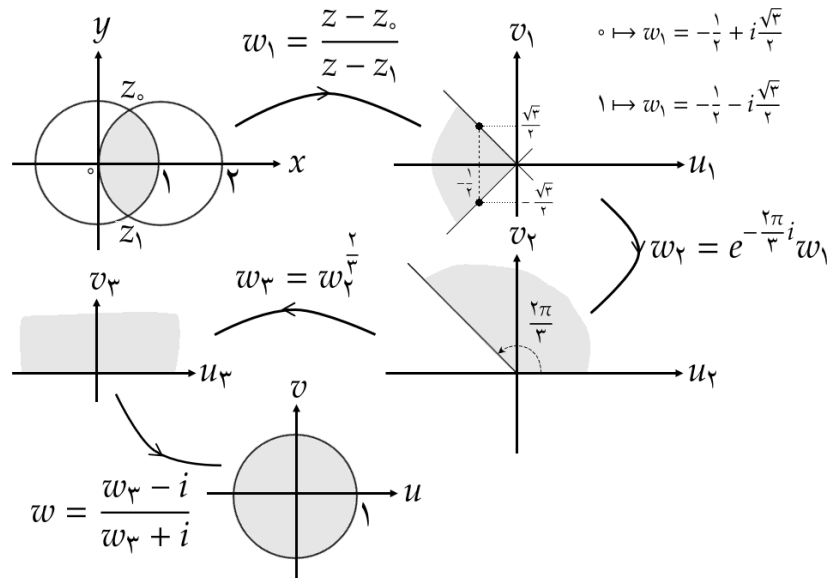
$$w_1 = \frac{z - z_0}{z - z_1}$$

به طوری که $z_0 \mapsto w_1 = 0$ و $z_1 \mapsto w_1 = \infty$. همچنین توجه کنید که

$$z = 1 \mapsto w_1 = \frac{1 - z_0}{1 - z_1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } z = 0 \mapsto w_1 = \frac{z_0}{z_1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

حال با توجه به شکل ۵.۵.۵ معلوم می‌شود که $w(z) = w_3(w_2(w_1(z)))$ نگاشت مطلوب است.

مثال ۳۰.۵. میدان $\{x > 0, y > 0, xy < \frac{\pi}{4}\}$ را به صورت $1 - 1$ و پوشا و همدیس بر دیسک واحد بنگارید.



شکل ۵.۵.۵

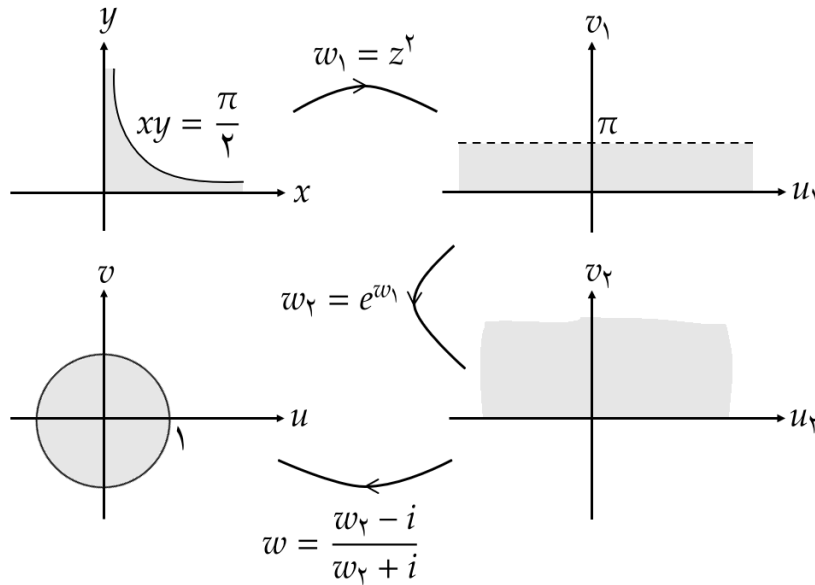
حل. کافی است شکل ۵۶.۵ را ببینید.

مثال ۳۱.۵. میدان $\{y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$ را به صورت $1 - 1$ و پوشا و همدیس بر ربع اول بنگارید.

حل. کافی است شکل ۵۷.۵ را ببینید. دقت کنید که زاویه بین دو خط تصویر قائمه است و همچنین $z = 0 \mapsto w_1 = -1$ و $z = i \mapsto w_1 = i$.

مثال ۳۲.۵. میدان $\{y > 0\} - \{x = 0, 0 < y < 1\}$ را به صورت $1 - 1$ و پوشا بر دیسک واحد بنگارید.

حل. کافی است شکل ۵۸.۵ را ببینید.

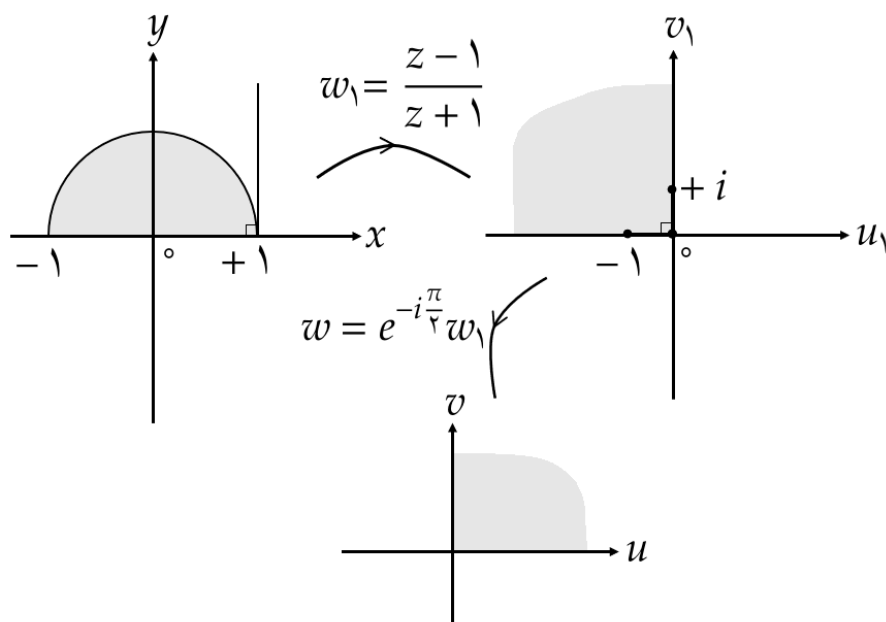


شکل ۵.۵۶

۴. نگاشت $w = z^2$ خط $x = a > 0$ را بر سهمی $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$ نگاشت می‌دهد. پس نگاشت معکوس آن یعنی $w = z^2 = r^2 e^{i\theta}$ یا $u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}$ به‌طوری‌که $-\pi < \theta < \pi$ ، به‌صورت عکس عمل می‌کند. شکل ۵.۵۹ را ببینید.

مثال ۵.۳۳. میدان $\{y > x^2\} - \{x = 0, y > 1\}$ را به‌صورت $1 - 1$ و پوشا و همدیس بر نیم‌صفحه بالایی بنگارید.

حل. کافی است شکل ۵.۶۰ را ببینید.



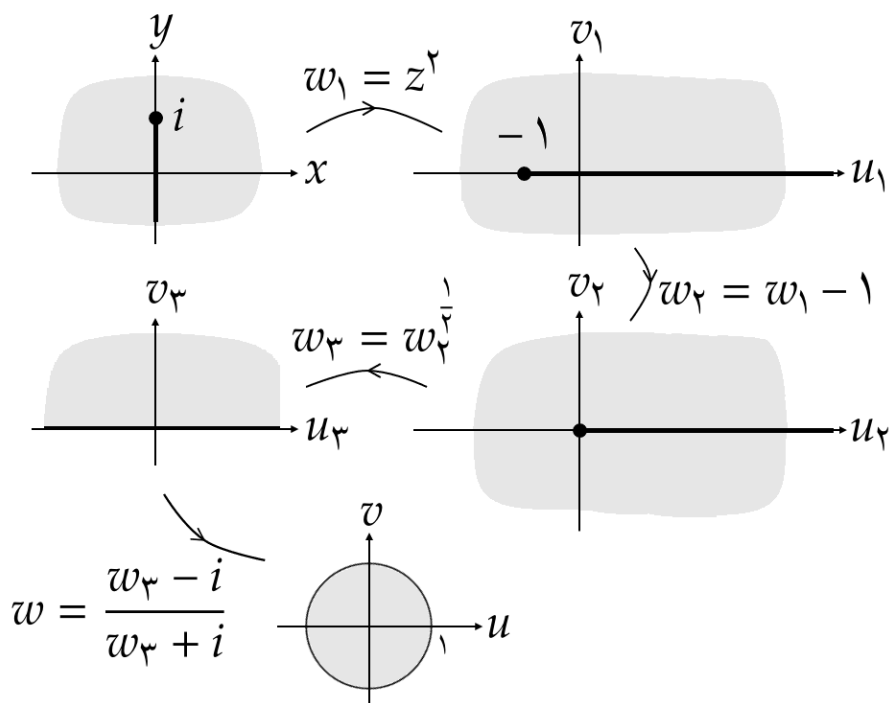
شکل ۵.۵۷

حل معادله پوآسن روی میدان‌های "بد" با تبدیل مسئله بر روی یک میدان خوب با استفاده از نگاشت‌های همدیس مقدور می‌گردد. دو خاصیت زیر در این مورد مفیداند. این خاصیت‌ها در بخش توابع تحلیلی بیان شده‌اند.

خاصیت ۱۴.۵. قسمت حقیقی و قسمت موهومی هر تابع تحلیلی یک تابع همساز یا جواب معادله لاپلاس است.

خاصیت ۱۵.۵. ترکیب یک تابع همساز و یک تابع تحلیلی یک تابع همساز است. از اثبات این خاصیت، خاصیت زیر به‌دست می‌آید.

خاصیت ۱۶.۵. معادله پوآسن $T_{uu} + T_{vv} = g(u, v)$ با تغییر متغیرهای $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ که در اینجا $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ یک تابع تحلیلی



شکل ۵.۵.۵

است به معادله پواسن زیر تبدیل می‌شود:

$$T_{xx} + T_{yy} = |f'(z)|^2 g(u(x, y), v(x, y))$$

مثال ۳۴.۵ (برای خاصیت ۱۴.۵). مطلوبست حل مسئله زیر

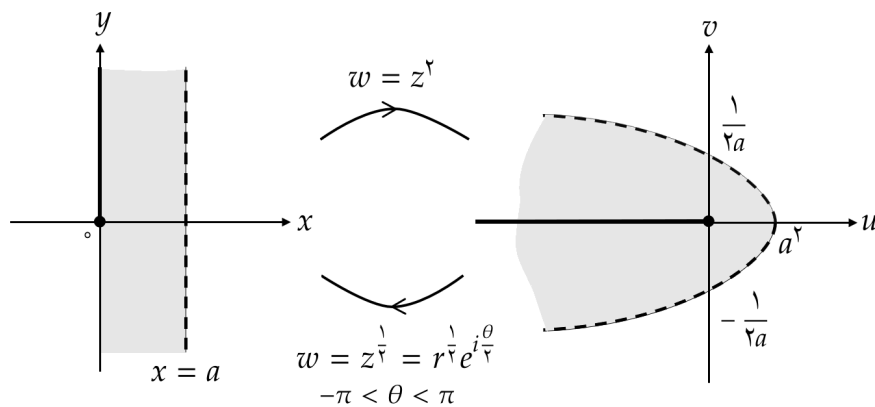
$$T_{xx} + T_{yy} = 0, \quad y > 0, \quad -\infty < x < \infty$$

$$T|_{x>0, y=0} = T_0, \quad T|_{x<0, y=0} = T_1,$$

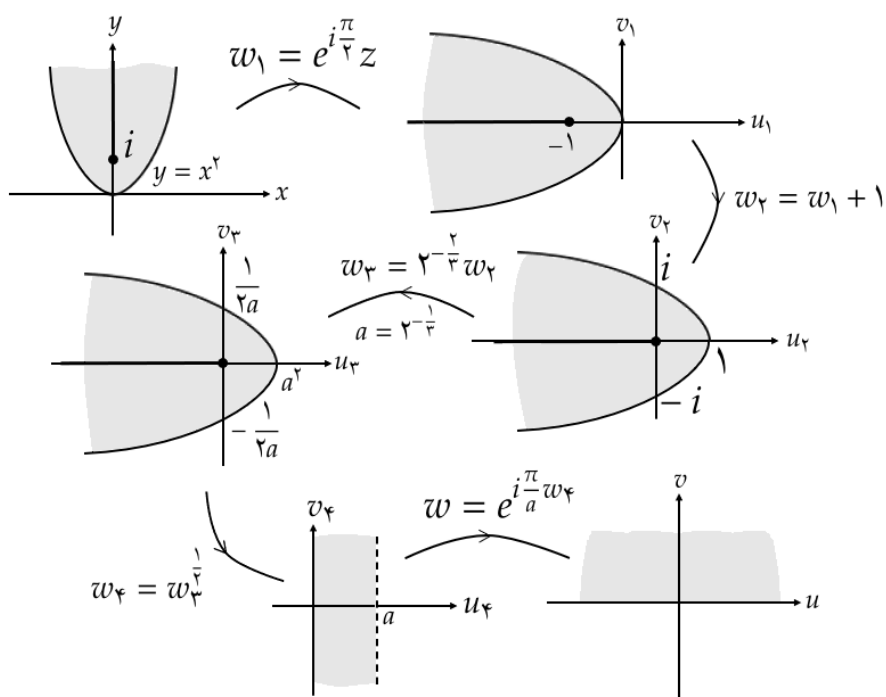
به طوری که T_0 و T_1 مقادیر ثابت هستند.

حل. تابع $T(r, \theta) = A\theta + B$ یک تابع همساز است. پس کافی است A و B را طوری تعیین کنیم تا

$$T|_{\theta=0} = T_0, \quad T|_{\theta=\pi} = T_1.$$



شکل ۵۹.۵



شکل ۶۰.۵

در نتیجه باید

$$\begin{aligned} T = A\theta + B \Big|_{\theta=0} &= B = T_0 \quad \Rightarrow \quad B = T_0 \\ T = A\theta + B \Big|_{\theta=\pi} &= A\pi + B = T_1 \quad \Rightarrow \quad A\pi + T_0 = T_1 \\ \Rightarrow \quad A &= \frac{T_1 - T_0}{\pi}. \end{aligned}$$

پس

$$T(x, y) = \frac{T_1 - T_0}{\pi} \theta + T_0 = \frac{T_1 - T_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x} + T_0.$$

مثال ۳۵.۵. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{aligned} T_{xx} + T_{yy} &= 0, \quad 1 < r < 2 \\ T \Big|_{r=1} &= T_0, \quad T \Big|_{r=2} = T_1, \end{aligned}$$

به‌طوری‌که T_0 و T_1 مقادیر ثابت هستند.

حل. تابع $T(r, \theta) = A \ln r + B$ یک تابع همساز است. کافی است A و B را طوری تعیین کنیم تا شرایط مرزی برقرار باشد. یعنی

$$\begin{aligned} T \Big|_{r=1} &= B = T_0, \quad T \Big|_{r=2} = A \ln 2 + B = T_1 \\ \Rightarrow \quad A \ln 2 + T_0 &= T_1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{T_1 - T_0}{\ln 2}. \end{aligned}$$

پس

$$T(x, y) = \frac{T_1 - T_0}{\ln 2} \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + T_0.$$

تمرین ۵.۵

۱. آ) تصویر ناحیه $y > 1 - x^2$ را تحت نگاشت $w = (1 - i)\frac{1}{z+1} + 2 - i$ به دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

ب) تصویر ناحیه $x < 0$ و $x^2 - y^2 > 1$ را تحت نگاشت $w = (1 + i)\frac{1}{z+1} + 2 + i$ به دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

ج) تصویر ناحیه $x = y^2$ را تحت نگاشت $w = (1 + i)\frac{1}{z-1} + 2 - i$ به دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

د) تصویر ناحیه $1 < |y| < 2$ و $-2 < x < -1$ را تحت نگاشت $w = (1 - i)\frac{1}{z+1} + 2 + i$ به دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

ه) تصویر ناحیه $|z - 2| < 1$ را تحت نگاشت $w = (1 + i)\frac{1}{z+1} + 2 + i$ به دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

و) تصویر ناحیه $x + 2y > 3$ و $y > 0$ را تحت نگاشت $w = (1 + i)\frac{1}{z-1} + 2i$ به دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

ز) تصویر ناحیه $y > 1 + x^2$ را تحت نگاشت $w = (1 - i)\frac{1}{z-1} + 2 + i$ به دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

۲. آ) تصویر ناحیه $2x + 3y < 1$ را تحت نگاشت $w = z^2$ به دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

ب) تصویر ناحیه $|z| > 1$ ، $|\arg z| < \frac{\pi}{4}$ را تحت نگاشت $w = z^2$ به دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

ج) تصویر ناحیه $x^2 - y^2 > 1$ ، $x > 0$ ، $y > 0$ را تحت نگاشت $w = z^2$ به دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

د) تصویر ناحیه $x + y > 1$ را تحت نگاشت $w = e^z$ به دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

ه) تصویر ناحیه $x^2 - y^2 < 1$ ، $x > 0$ ، $y > 0$ را تحت نگاشت $w = e^z$ به دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

(و) تصویر ناحیه $0 < y < \frac{\pi}{4}$ ، $1 < x < 2$ را تحت نگاشت $w = e^z$ به دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

۳. آ) تبدیل مبیوسی را بیابید که سه نقطه i ، 1 ، ∞ را به ترتیب i ، -1 ، $1+i$ بنگارد.

ب) تبدیل مبیوسی را بیابید که سه نقطه i ، -1 ، $1+i$ را به ترتیب ∞ ، 2 ، $1-i$ بنگارد.

ج) تبدیل مبیوسی را بیابید که سه نقطه i ، -1 ، ∞ را به ترتیب 2 ، $1-i$ ، ∞ بنگارد.

۴. آ) میدان $1 < y < x$ را به صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر دیسک واحد بنگارید.

ب) میدان $|z-2| < 2$ و $|z-2| < 2$ را به صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر دیسک واحد بنگارید.

ج) میدان $|z-2| < 2$ و $x > 2$ را به صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر دیسک واحد بنگارید.

د) میدان $y < x$ و $|z| < 1$ را به صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر دیسک واحد بنگارید.

۵. آ) معادله لاپلاس $T_{xx} + T_{yy} = 0$ را روی میدان $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ تحت شرط مرزی $T|_{\text{روی مرز}} = \cos \theta$ حل کنید.

ب) معادله لاپلاس $T_{xx} + T_{yy} = 0$ را روی میدان $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ تحت شرط مرزی $T|_{\text{روی مرز}} = \sin \theta + \frac{1}{4}$ حل کنید.

ج) معادله لاپلاس $T_{xx} + T_{yy} = 0$ را روی میدان $-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}$ تحت شرط مرزی $T|_{\text{روی مرز}} = \sin \theta + \cos \theta$ حل کنید.

د) معادله لاپلاس $T_{xx} + T_{yy} = 0$ را روی میدان $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}$ تحت شرط مرزی $T|_{\text{روی مرز}} = \sin \theta - \cos \theta$ حل کنید.

۶. آ) مسئله پواسن $T_{xx} + T_{yy} = 2e^{-xy}$ را روی میدان $-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$ و شرط مرزی $T|_{\text{روی مرز}} = e^{-xy}$ حل کنید.

ب) مسئله پواسن $T_{xx} + T_{yy} = 2e^{-xy}$ را روی میدان $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ و شرط مرزی $T|_{\text{روی مرز}} = e^{-x^2-y^2}$ حل کنید.

ج) مسئله پواسن $T_{xx} + T_{yy} = e^{-xy}$ را روی میدان $-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$ و شرط مرزی $T|_{\text{روی مرز}} = e^{-y^2x^2}$ حل کنید.

د) مسئله پواسن $T_{xx} + T_{yy} = \frac{1}{1+x^2y^2}$ را روی میدان $-\pi < \theta < -\frac{\pi}{4}$ و شرط مرزی $T|_{\text{روی مرز}} = -\frac{1}{1+x^2+y^2}$ حل کنید.

فصل ۶

فرم‌های جردن ماتریس‌ها

فرم‌های جردن یک صورت خاصی از ماتریس‌های مربعی است. به هر ماتریس مربعی یک فرم نسبت داده می‌شود. این نوع ماتریس‌ها در حل مسائل دستگاهی بسیار مفید است و حل آن‌ها را آسان می‌کند. در این بخش به دنبال تعیین این گونه ماتریس‌ها هستیم. در بخش ۱.۶ به یادآوری جبر ماتریس‌ها و بیان مفاهیم وابسته به آن می‌پردازیم. در بخش ۲.۶ فرآیند گرام-اشمیت را داریم. در بخش ۳.۶ حل دستگاه معادلات خطی می‌آید و در بخش ۴.۶ و بخش ۵.۶ به بررسی فرم‌های جردن می‌پردازیم.

۱.۶ جبر ماتریس‌ها

در این بخش درایه‌های هر ماتریس عدد حقیقی یا مختلط است.

الف) جمع دو ماتریس: برای دو ماتریس $m \times n$ (m سطر و n ستون) $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ مجموع آن‌ها را به صورت زیر داریم:

$$A + B = C, \quad C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

ب) ضرب دو ماتریس: اگر $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $m \times l$ و $B = (b_{ij})$ یک ماتریس

$l \times n$ باشد، حاصل ضرب آن‌ها به صورت زیر است:

$$AB = C, \quad C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik}b_{kj}.$$

(ج) ضرب اسکالر: برای ماتریس $m \times n$ ، $A = (a_{ij})$ و λ یک عدد حقیقی یا مختلط، ضرب λA را به صورت زیر داریم:

$$\lambda A = C, \quad C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

خواص عملیات فوق:

$$A + B = B + A \quad (۱)$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (۲)$$

$$A(BC) = (AB)C \quad (۳)$$

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC \quad (۴)$$

$$(\lambda_1 \lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A) = \lambda_2(\lambda_1 A) \quad (۵)$$

تعریف ۱.۶. برای ماتریس $A = (a_{ij})$ ، ماتریسی را که از تعویض ستون‌ها و سطرهای آن به دست می‌آید، ترانهاده می‌گویند و با $A^T = (a_{ji})$ نمایش می‌دهند. اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد، A^T یک ماتریس $n \times m$ است.

مثال ۱.۶. برای

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}$$

داریم

$$A^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}.$$

خواص:

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad (۱)$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T \quad (۲)$$

$$(AB)^T = B^T A^T \quad (۳)$$

تعریف ۲.۶. ماتریس $A = (a_{ij})$ را که تعداد سطرها و ستون‌های آن برابر یعنی $n \times n$ است، یک ماتریس مربع می‌گویند. برای سادگی آن را یک ماتریس از مرتبه n نیز می‌نامند.

تعریف ۳.۶. ماتریس از مرتبه n ، $A = (a_{ij})$ را یک ماتریس واحد می‌گویند اگر برای $n, \dots, 2, 1$ داشته باشیم $a_{ii} = 1$ و برای $i \neq j$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$. ماتریس واحد را با I نشان می‌دهند. همچنین هر ماتریسی که کلیه عناصر آن صفر باشد را ماتریس خنثی یا صفر می‌گویند و با 0 نشان می‌دهند.

تعریف ۴.۶. درایه‌های a_{ii} ، $i = 1, 2, \dots, n$ را عناصر قطر اصلی ماتریس مربع از مرتبه n ، $A = (a_{ij})$ می‌گویند.

تعریف ۵.۶. برای ماتریس از مرتبه n ، $A = (a_{ij})$ ، عدد $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ یعنی مجموع عناصر قطر اصلی را نشان یا شناسه این ماتریس می‌گویند.

تعریف ۶.۶. ماتریس از مرتبه n ، B را معکوس ماتریس از مرتبه n ، A یا ماتریس معکوس A می‌گویند اگر $AB = BA = I$. معکوس ماتریس A را با A^{-1} نشان می‌دهند. دترمینان یک ماتریس برای تشخیص وجود معکوس آن و همچنین محاسبه آن قابل استفاده است. این مفهوم را به صورت زیر داریم:

تعریف ۷.۶. دترمینان ماتریس مربع A را با $\det A$ یا با $|A|$ نشان می‌دهیم. تعریف دترمینان ماتریس A به صورت زیر است:

الف: اگر $A = (a_{ij})$ یک ماتریس 1×1 باشد، $\det A = a_{11}$.

ب: اگر $A = (a_{ij})$ یک ماتریس 2×2 باشد، $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

ج: اگر A یک ماتریس از مرتبه n باشد، از حذف درایه‌های سطر i ام و ستون j ام آن یک ماتریس از مرتبه $n - 1$ به دست می‌آید. اگر این ماتریس را با A_{ij} نشان دهیم، عدد $\det A_{ij} (-1)^{i+j}$ را کوفاکتور درایه a_{ij} ماتریس A می‌گویند و با نماد $\text{Cof}(a_{ij})$ نشان می‌دهند. در این صورت

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{Cof}(a_{ij}).$$

به این ترتیب با استقرار مقدار دترمینان یک ماتریس قابل محاسبه است. در تساوی‌های فوق مجموع اولی را بسط دترمینان ماتریس A روی سطر i ام و مجموع دوم را بسط دترمینان ماتریس A روی ستون j ام می‌گویند.

تذکره ۱) بسط‌های فوق را بسط‌های لاپلاسی می‌گویند.

۲) مقدار دترمینان مستقل از انتخاب سطر i ام و یا ستون j ام است.

مثال ۲.۶. دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

حل. در ابتدا روی سطر اول بسط می‌دهیم. در نتیجه به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \det A = |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= (40 - 48) - 2(32 - 42) + 3(32 - 35) \\ &= -8 + 20 - 9 = 3. \end{aligned}$$

پس $\det A = ۳$.

تعریف ۸.۶. چنانچه کلیه درایه‌های زیر قطر اصلی یک ماتریس از مرتبه n برابر صفر باشد، آن را یک ماتریس بالا مثلثی و چنانچه کلیه درایه‌های بالای قطر اصلی برابر صفر باشند، آن را یک ماتریس پایین مثلثی می‌گویند.

خاصیت ۱.۶. اگر A یک ماتریس مثلثی باشد، دترمینان آن برابر حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی است.

تعریف ۹.۶. ماتریس از مرتبه n را که هم بالا مثلثی و هم پایین مثلثی باشد، یک ماتریس قطری می‌گویند.

خاصیت ۲.۶. (۱) چنانچه کلیه درایه‌های یک سطر (یا ستون) یک ماتریس از مرتبه n را در یک عدد غیر صفر ضرب کنیم، دترمینان آن در همان عدد ضرب می‌شود.

(۲) چنانچه جای دو سطر (یا ستون) یک ماتریس از مرتبه n را عوض کنیم، دترمینان آن در عدد -۱ ضرب می‌شود.

(۳) چنانچه مضربی از یک سطر (یا ستون) یک ماتریس از مرتبه n را به سطر (یا ستون) دیگر آن ماتریس اضافه کنیم، مقدار دترمینان آن تغییری نمی‌کند.

علت. از بسط لاپلاسی نتیجه می‌شود.

تذکر. با استفاده از این خواص محاسبه دترمینان ساده‌تر می‌گردد.

مثال ۳.۶. دترمینان ماتریس مثال ۲.۶ را با استفاده از خواص فوق محاسبه کنید.

حل. برای این کار درایه‌های یک سطر یا یک ستون را تا حد ممکن به صفر تبدیل می‌کنیم. برای این کار مضرب مناسبی از ستون اول را به ستون دوم و سوم اضافه

می‌کنیم. با این کار درایه‌های دوم و سوم سطر اول را به صفر تبدیل می‌کنیم.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -13 \end{vmatrix}$$

حال روی سطر اول بسط می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -13 \end{vmatrix} = (-3)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 13 \end{vmatrix} \\ &= 3(1 \cdot 13 - 2 \cdot 6) = 3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

تذکره. چنانچه یک سطر (یا یک ستون) ماتریس مربع مضربی از سطر (یا ستون) دیگر آن باشد، دترمینان آن برابر صفر است.

خاصیت ۳.۶. اگر A و B دو ماتریس از مرتبه n باشند، آنگاه

$$\det AB = \det A \det B$$

بیان علت خاصیت فوق چندان ساده نیست، لیکن خاصیت مهم زیر از آن نتیجه می‌شود.

خاصیت ۴.۶. ماتریس از مرتبه n ، A ، دارای معکوس است اگر و فقط اگر $\det A \neq 0$.

علت. چون $AA^{-1} = I$ و $\det I = 1$ ، پس $\det A \det A^{-1} = 1$. بنابراین $\det A \neq 0$.

خاصیت ۵.۶ (محاسبه ماتریس معکوس). اگر ماتریس از مرتبه n ، $A = (a_{ij})$ ، دارای ماتریس معکوس $A^{-1} = (b_{ij})$ باشد، آنگاه

$$b_{ij} = \frac{1}{\det A} (-1)^{i+j} \det A_{ji}$$

که در آن A_{ji} ماتریسی از مرتبه $n - 1$ است که از حذف سطر j ام و ستون i ام ماتریس A به‌دست آمده است.

تذکر. برای محاسبه ماتریس معکوس ماتریس از مرتبه n ، $A = (a_{ij})$ ، ابتدا ماتریس $A^T = (a_{ji})$ را به‌دست آورید. اگر $A^{-1} = (b_{ij})$ ، در این صورت

$$b_{ij} = \frac{1}{\det A} \text{Cof}(a_{ji}).$$

مثال ۴.۶. معکوس ماتریس مثال ۲.۶ را به‌دست آورید.

حل. داریم $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}$. پس $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$. در نتیجه

$$\text{Cof}(a_{11}) = 5 \cdot 8 - 6 \cdot 8 = -8,$$

$$\text{Cof}(a_{21}) = -(2 \cdot 8 - 3 \cdot 8) = 8,$$

$$\text{Cof}(a_{31}) = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = -3,$$

$$\text{Cof}(a_{41}) = -(4 \cdot 8 - 7 \cdot 6) = 10,$$

$$\text{Cof}(a_{22}) = 1 \cdot 8 - 3 \cdot 7 = -13,$$

$$\text{Cof}(a_{32}) = -1(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) = 6,$$

$$\text{Cof}(a_{13}) = 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = -3,$$

$$\text{Cof}(a_{23}) = -1(1 \cdot 8 - 2 \cdot 7) = 6,$$

$$\text{Cof}(a_{33}) = 10.5 - 40.2 = -3.$$

همچنین $\det A = 3$. بنابراین

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -8 & 8 & -3 \\ 10 & -13 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -1 \\ \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

با استفاده از سه عملیات روی سطرها که در خاصیت ۲.۶ آمده است نیز می‌توان معکوس یک ماتریس مربع را بدون محاسبه دترمینان به دست آورد.

روش دوم محاسبه ماتریس معکوس: فرض کنید A یک ماتریس مربع از مرتبه n و I ماتریس واحد از مرتبه n باشد. ماتریس n سطری و $2n$ ستونی، $B = (AI)$ ، را تشکیل دهید. با سه عملیات روی سطرهای ماتریس B ، ماتریس A را تبدیل به ماتریس واحد کنید. برای این کار ستون‌های ماتریس A را از سمت چپ متوالیاً به ستون‌های ماتریس واحد تبدیل کنید. برای ساختن هر ستون با استفاده از عملیات ۱ و ۲ ابتدا عدد ۱ آن ستون را بسازید. سپس با استفاده از عملیات ۳ صفرهای آن ستون را بسازید. چنانچه با این عملیات ماتریس A به ماتریس I تبدیل گردد، همزمان ماتریس I ، به ماتریس A^{-1} تبدیل می‌گردد.

با هر یک از این عملیات در این فرآیند ماتریس موجود به ماتریس دیگری تبدیل می‌شود. این ماتریس را مشابه ماتریس قبلی می‌گویند.

مثال ۵.۶. معکوس ماتریس مثال ۲.۶ را با روش عملیات روی سطرها به دست آورید.

حل. داریم $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ پس ماتریس B به صورت زیر است:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -13 & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

به این ترتیب ماتریس معکوس به صورت زیر به دست می آید:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -1 \\ \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

خاصیت زیر گاهی در کاربرد معکوس یک ماتریس می تواند مفید باشد.

خاصیت ۶.۶. اگر A و B دو ماتریس معکوس پذیر از مرتبه n باشند، آنگاه

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

علت. $AB(AB)^{-1} = I$ ، همچنین $AB(B^{-1}A^{-1}) = I$.

تمرین ۱.۶

۱. برای دو ماتریس A و B زیر، ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید.

الف: $2A + 3B$

ب: $3AB^T$

ج: $(A^T B)^T$

د: $(3A + 2B)^T A$

به‌طوری‌که

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

۲. برای دو ماتریس مربع از مرتبه ۳، C و D ، ماتریس‌های معکوس زیر را هم با روش دترمینانی و هم با روش سه‌عملیاتی محاسبه کنید.

الف: C^{-1}

ب: D^{-1}

ج: $(CD)^{-1}$

د: $((CD)^T)^{-1}$

به‌طوری‌که

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

۳. ماتریس‌های مربع A و B را طوری به‌دست آورید تا $A \neq 0$ و $B \neq 0$ ، لیکن $AB = 0$.

۲.۶ فرآیند گرام-اشمیت

پایه برای یک فضای برداری از ابزارهای بسیار مفید برای انجام عملیات عملی روی آن فضای برداری است. بر روی یک فضای برداری عملی به نام ضرب داخلی یا ضرب برداری قابل تعریف است، این عمل به سهم خود کار کردن با آن فضای برداری را آسان می‌کند. یکی از نتایج ضرب داخلی ساختن پایه متعامد یکه است که نمایش عناصر آن فضای برداری بر حسب این گونه پایه‌ها را هم ساده‌تر و هم انجام عملیات مربوط به آن‌ها را آسان‌تر می‌سازد.

در این بخش با استفاده از روش گرام-اشمیت ساختن پایه‌های متعامد یکه‌ای را می‌آموزیم. در ابتدا به یادآوری ضرب داخلی می‌پردازیم. فرض کنید V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد. عمل دوتایی $\langle u, v \rangle$ (یعنی تابعی از $V \times V$ به $\mathbb{R}$) را یک ضرب داخلی روی $\mathbb{R}$ گوییم اگر در چهار خاصیت زیر صدق کند.

$$۱. \text{ برای } a, b \in \mathbb{R} \text{ و } u_1, u_2, v \in V$$

$$\langle au_1 + bu_2, v \rangle = a\langle u_1, v \rangle + b\langle u_2, v \rangle.$$

$$۲. \text{ برای هر دو عضو } u, v \in V$$

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle.$$

$$۳. \text{ برای هر عضو } u \in V$$

$$\langle u, u \rangle \geq 0.$$

$$۴. \text{ تساوی } \langle u, u \rangle = 0 \text{ فقط برای } u = 0 \text{ برقرار باشد.}$$

نکته. از خاصیت اول نتیجه می‌شود برای هر $u \in V$ داریم $\langle u, u \rangle = 0$.

مثال ۶.۶. مجموعه چندجمله‌ای‌ها از درجه ۳ و کمتر از درجه ۳ روی $[0, 1]$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است. مجموعه $\{1, x, x^2, x^3\}$ یک پایه برای این فضای برداری است. همچنین $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ یک ضرب داخلی روی این فضای برداری است.

مثال ۷.۶. مجموعه توابع پیوسته با دامنه $[0, \pi]$ که هر کدام در دو نقطه انتهایی بازه برابر صفراند یعنی:

$$V = \left\{ f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : f(0) = f(\pi) = 0 \text{ و } f \text{ پیوسته} \right\}.$$

یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است و $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه برای آن است. همچنین $\langle f, g \rangle = \int_0^{\pi} f(x)g(x) dx$ یک ضرب داخلی روی آن است.

نکته. روی یک فضای برداری ضرب‌های داخلی گوناگونی قابل تعریف است.

تعریف ۱۰.۶. یک فضای برداری که روی آن یک ضرب داخلی تعریف شده باشد را یک فضای حاصلضرب گویند.

تعریف ۱۱.۶. دو عضو از فضای حاصلضرب V مانند u و v را متعامد گویند اگر $\langle u, v \rangle = 0$. همچنین $\sqrt{\langle u, u \rangle}$ را طول بردار u گویند و با $\|u\|$ نشان می‌دهند. عضو $u \in V$ را که دارای طولی برابر یک است بردار یکه گویند.

تعریف ۱۲.۶. پایه $\mathcal{B} = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ را یک پایه متعامد یکه‌ای گویند اگر هر عضو آن یکه و هر دو عضو آن بر هم عمود باشد.

یکی از کاربردهای مهم در یک فضای برداری نمایش اعضای آن بر حسب عناصر پایه است. با پایه متعامد یکه‌ای این کار به‌سادگی انجام می‌شود.

خاصیت ۷.۶. اگر $\mathcal{B} = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ پایه متعامد یکه‌ای برای فضای برداری V و $u \in V$ آن‌گاه

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, \gamma_n \rangle \gamma_n.$$

علت. عضو u بر حسب عناصر پایه $\mathcal{B}$ به‌صورت $u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \gamma_n$ قابل نمایش است. برای تعیین c_m در تساوی فوق، طرفین تساوی را در γ_m ضرب کنیم به‌دست می‌آوریم:

$$\langle u, \gamma_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle \gamma_n, \gamma_m \rangle.$$

چون برای $n \neq m$ داریم $\langle \gamma_n, \gamma_m \rangle = 0$ و برای $n = m$ ، $\langle \gamma_m, \gamma_m \rangle = 1$ پس

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, \gamma_n \rangle \gamma_n \quad \text{یا} \quad \langle u, \gamma_m \rangle = c_m$$

با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت پایه متعامد یکه از روی هر پایه دیگر قابل ساخت است.

فرآیند گرام-اشمیت: فرض کنید $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots\}$ یک پایه برای فضای برداری V است. با استفاده از فرآیند زیر از آن یک پایه متعامد یکه ای می سازیم.

فرآیند اول: بگیرد

$$\beta_1 = \alpha_1.$$

فرآیند دوم: بگیرد

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1$$

در این صورت

$$\langle \beta_2, \beta_1 \rangle = \langle \alpha_2, \beta_1 \rangle - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \langle \beta_1, \beta_1 \rangle = 0.$$

پس β_2 بر β_1 عمود است. چون α_1 و α_2 مستقل خطی اند پس $\beta_2 \neq 0$.

فرآیند n ام: فرض کنید β_1 تا β_{n-1} را ساخته ایم به طوری که بر هم عمودند. با استقراء β_n را به صورت زیر می گیریم:

$$\beta_n = \alpha_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \alpha_n, \beta_j \rangle}{\langle \beta_j, \beta_j \rangle} \beta_j$$

در این صورت برای $1 \leq k \leq n-1$ می توان نوشت:

$$\langle \beta_n, \beta_k \rangle = \langle \alpha_n, \beta_k \rangle - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \alpha_n, \beta_j \rangle}{\langle \beta_j, \beta_j \rangle} \langle \beta_j, \beta_k \rangle = 0.$$

زیرا برای $j \neq k$ داریم $\langle \beta_j, \beta_k \rangle = 0$ پس

$$\langle \beta_n, \beta_k \rangle = \langle \alpha_n, \beta_k \rangle - \frac{\langle \alpha_n, \beta_k \rangle}{\langle \beta_k, \beta_k \rangle} \langle \beta_k, \beta_k \rangle = 0.$$

حال مجموعه $A' = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots\}$ را در نظر بگیرید که عناصر آن غیر صفر و متعامد هستند. پس مستقل خطی می‌باشند. مجموعه A' فضای برداری V را هم تولید می‌کند چون β_1 تا β_n عناصر α_1 تا α_n را تولید می‌کند. زیرا طبق فرآیند ساخت فوق برای $1 \leq m \leq n$:

$$\alpha_m = \beta_m + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle \alpha_m, \beta_j \rangle}{\langle \beta_j, \beta_j \rangle} \beta_j.$$

برای یک‌های کردن پایه A' بگیرید $\gamma_n = \frac{\beta_n}{\|\beta_n\|}$. در این صورت

$$\mathcal{B} = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots\}$$

یک پایه متعامد یک‌های است.

مثال ۸.۶. از پایه $A = \{1, x, x^2\}$ یک پایه متعامد یک‌های برای فضای برداری

$$V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ چندجمله‌ای کمتر از درجه ۳}\}$$

بسازید.

حل. بگیرید:

$$\beta_1 = 1$$

$$\beta_2 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = x - \frac{1/2}{1} = x - \frac{1}{2}$$

$$\beta_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} - \frac{\langle x^2, x - 1/2 \rangle}{\langle x - 1/2, x - 1/2 \rangle} (x - \frac{1}{2}) = x^2 - \frac{1}{3} - (x - \frac{1}{2})$$

$$\beta_3 = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

حال اگر قرار دهیم $\gamma_n = \frac{\beta_n}{\|\beta_n\|}$ داریم:

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{4}\right), \quad \gamma_3 = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

و پایه متعامد یکه‌ای

$$\mathcal{B} = \left\{1, 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{4}\right), 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}$$

حاصل می‌شود.

تمرین ۲.۶

۱. با استفاده از پایه $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ یک پایه متعامد یکه‌ای برای $\mathbb{R}^3$ بسازید.

۲. با استفاده از پایه $\{1, x + 1, x^2 - 1\}$ یک پایه متعامد یکه‌ای برای فضای برداری چندجمله‌ای‌ها از درجه کمتر از ۳ با دامنه $[-1, 1]$ بسازید.

۳. با استفاده از پایه $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, -1), (1, 1, 1, 1)\}$ یک پایه متعامد یکه‌ای برای $\mathbb{R}^4$ بسازید.

۴. با استفاده از پایه $\{1, \sin x, \sin x + \cos x\}$ یک پایه متعامد یکه‌ای برای فضای برداری تولید شده $\langle 1, \sin x, \cos x \rangle$ بسازید.

۵. روی فضای برداری چندجمله‌ای‌ها از درجه کمتر از ۳ با دامنه $[0, 1]$ ضرب داخلی را به صورت $\langle f, g \rangle = \int_0^1 x f(x) g(x) dx$ در نظر بگیرید. با استفاده از پایه $\{1, x, x^2\}$ یک پایه متعامد یکه‌ای برای آن بسازید.

۶. برای فضای برداری تولید شده $\langle 1, \sin x, x \rangle$ با دامنه $[0, \pi]$ یک پایه متعامد یکه‌ای با استفاده از پایه $\{1, x, \sin x\}$ بسازید.

۳.۶ حل دستگاه معادلات خطی

یک دستگاه m معادله و n مجهول خطی را به صورت زیر داریم.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

این دستگاه به صورت زیر قابل نمایش است.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

به این تساوی برداری برداری می‌گویند و دستگاه معادلات خطی فوق دارای جواب است

اگر بردار $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ به صورت ترکیبی خطی از n بردار $\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$ ، $\cdots$ و $\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$ قابل نمایش باشد.

الف: اگر $m = n$ و این n بردار ضرایب، مستقل خطی باشند در این صورت نمایش $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ بر حسب این n بردار به صورت یگانه مقدور است. در صورتی که آن دستگاه را به صورت

ماتریسی بنویسیم یعنی:

$$Ax = b \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

در این صورت ماتریس A معکوس پذیر است و $x = A^{-1}b$ این جواب یگانه است.

ب: در صورتی که $m \neq n$ و یا برای حالت $m = n$ وقتی که بردار ضرایب مستقل خطی نباشد دستگاه ممکن است بینهایت جواب یا فاقد جواب و حتی جواب یگانه داشته باشد. در زیر یک روش حل برای این حالت ارائه می دهیم که برای حالت **الف** هم مفید است. با استفاده از ماتریس A و بردار b ماتریس B زیر را می سازیم.

$$B = \left[A \mid b \right] = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & b \\ \hline & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

با عملیات زیر ستون های این ماتریس را از سمت چپ به ستون های ماتریس همانی تبدیل می کنیم.

۱. تعویض جای دو سطر.

۲. ضرب یک سطر در یک عدد غیر صفر.

۳. افزودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر.

۴. تعویض جای دو ستون همراه با تعویض مجهول بالای آن.

برای این کار ابتدا اولین ستون سمت چپ را می‌سازیم و در این ستون ابتدا عدد ۱ را می‌سازیم. اگر مولفه اول این ستون صفر نباشد سطر اول را بر این عدد تقسیم کنید. این مولفه به ۱ تبدیل می‌گردد. اگر این مولفه صفر بود سطر اول را با یکی از سطرهاى پایین‌تر که مولفه این ستون آن غیر صفر است تعویض کنید تا مولفه غیر صفر داشته باشد. بعد از ساختن عدد ۱ مضربی از سطر اول را به سطرهاى پایین که مولفه این ستون غیر صفر است اضافه کنید تا آن عضو صفر گردد. به این ترتیب ستون اول به ستون اول سمت چپ ماتریس واحد تبدیل می‌گردد. بعد از ساختن ستون اول نوبت به ساختن ستون دوم غیر صفر می‌رسد. برای ساختن ستون دوم ابتدا عدد ۱ را می‌سازیم. اگر مولفه مربوط غیر صفر باشد سطر دوم را بر این عدد تقسیم کنید تا عدد ۱ ساخته شود. اگر این مولفه صفر باشد این سطر را با یک سطر پایین آن که مولفه ستون دوم آن غیر صفر است تعویض کنید. بعد از ساختن عدد ۱ با افزودن مضربی از سطر دوم به سطر دیگر مولفه‌های صفر این ستون ساخته می‌شود. چنانچه در ستون دوم کلیه عناصر صفر بود برای داشتن عدد ۱ این ستون را با یکی از ستون‌های بعدی که حداقل یک مولفه غیر صفر دارد همراه با مجهول‌های بالای آنها عوض کنید. بعد از تکمیل شدن ستون دوم مشابهاً ستون‌های بعدی را بسازید تا جایی که امکان ساختن ستون ماتریس واحد موجود نباشد. در این صورت یا به ستون b رسیده‌ایم و یا در سطری که باید عدد ۱ را ساخت و سطرهاى بعدی آن بعد از این ستون مولفه غیر صفر ندارند، قرار داریم. در این صورت عملیات متوقف می‌گردد. ماتریس B به ماتریس B' زیر تبدیل شده است.

$$B' = \begin{array}{c|ccccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_j & x_{j+1} & \cdots & x_n & b \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & \star_{1,j+1} & \cdots & \star_{1,n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \star_{2,j+1} & \cdots & \star_{2,n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \star_{j,j+1} & \cdots & \star_{j,n} & b'_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{array}$$

الف: اگر یکی از b'_{j+1} تا b'_m ها غیر صفر باشد دستگاه جواب ندارد.

ب: اگر همه b'_{j+1} تا b'_m صفر باشند و هیچ $\star$ در ماتریس B' وجود نداشته باشد در این حالت عملاً $m = n$ و دستگاه جواب یگانه دارد و آن جواب $x = b'$ است.

ج: اگر همه b'_{j+1} تا b'_m صفر باشند و بلوک مربوط به بخش $\star$ در ماتریس B' وجود داشته باشد در این صورت دستگاه بینهایت جواب دارد و به ازاء هر ستون از بلوک مربوط به منطقه $\star$ مجهول آن به عنوان پارامتر دلخواه در جواب ظاهر می شود. یعنی مولفه های جواب های $x = (x_1, x_2, \dots, x_j)$ به صورت زیر می باشد که در آن ها x_{j+1} تا x_n به عنوان پارامتر دلخواه می باشند.

$$\begin{aligned}x_1 &= b_1 - \star_{1,j+1} \cdot x_{j+1} - \dots - \star_{1,n} \cdot x_n \\x_2 &= b_2 - \star_{2,j+1} \cdot x_{j+1} - \dots - \star_{2,n} \cdot x_n \\&\vdots \\x_j &= b_j - \star_{j,j+1} \cdot x_{j+1} - \dots - \star_{j,n} \cdot x_n\end{aligned}$$

خاصیت ۸.۶. جواب دستگاه B' ، جواب دستگاه B هم است.

علت. کافیت نشان دهیم دستگاه معادلاتی که بعد از هر یک از عملیات فوق از روی ماتریس نتیجه به دست می آید با دستگاه معادلات ماتریس قبل از آن معادل یا همان جواب را دارد.

۱. تعویض جای دو سطر معادل تعویض جای دو معادله وابسته به آن است. پس دستگاه معادلات جدید همان دستگاه معادلات قبلی است. پس جواب یکسان دارند.

۲. ضرب یک سطر در یک عدد غیر صفر معادل ضرب معادله وابسته به آن سطر در همان عدد غیر صفر است. پس جواب این دو معادله یکسان است. در نتیجه جواب دو دستگاه وابسته یکسان است.

۳. افزودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر معادل با افزودن همان مضرب از آن معادله به معادله وابسته به آن سطر دیگر است. در این صورت جواب این دو معادله دستگاه جدید با جواب دو معادله متناظر آنها یکسان است. پس در این عمل نیز جواب دستگاه جدید با جواب دستگاه قبلی یکسان است.

۴. تعویض محل دو ستون همراه با مجهول بالای آنها معادل با تعویض دو مجهول همراه با ضریب آنها در تمام معادلات است. این دستگاه معادلات جدید دقیقا همان دستگاه قبلی است. پس جواب جدید با جواب دستگاه قبلی یکسان است. پس جواب دستگاه وابسته به ماتریس B' با جواب دستگاه وابسته به B یکی است.

نتیجه ۹.۶. اگر $m < n$ و $b = 0$ در این صورت این دستگاه معادلات جواب غیر صفر دارد.

مثال ۹.۶. مطلوبست حل دستگاه معادلات خطی زیر

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4.$$

حل. ماتریس B و عملیات بعدی را به صورت زیر داریم.

$$B = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}$$

جای سطر اول و دوم را عوض می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \end{array}$$

منفی سطر اول را به سطرهای دیگر اضافه می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \end{array}$$

سطر سوم از دوم را کم می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \end{array}$$

سطر دوم را به سطر اول اضافه کنیم و همچنین ۲ برابر سطر دوم را از سطر سوم کم کنیم نتیجه می‌شود.

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 8 \end{array} \right] \end{array}$$

سطر سوم را بر ۴- تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}$$

۲ برابر سطر سوم را از سطر دوم و ۳ برابر سطر سوم را از سطر اول کم کنیم به دست می‌آوریم:

$$B' = \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}.$$

پس دستگاه وابسته به B' می‌شود:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_4 = 5 & & x_1 = x_4 + 5 \\ x_2 + x_4 = 1 & \implies & x_2 = -x_4 + 1 \\ x_3 + x_4 = -2 & & x_3 = -x_4 - 2. \end{array}$$

پس x_4 هر عددی می‌تواند باشد. بگیرد $t = x_4$.

$$\begin{array}{l} x_1 = t + 5 \\ x_2 = -t + 1 \\ x_3 = -t - 2. \end{array} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + 5 \\ -t + 1 \\ -t - 2 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

در حالتی که تعداد معادلات و تعداد مجهولات در دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ با هم برابر باشد، به عبارت دیگر ماتریس A مربع از مرتبه n با $\det A \neq 0$ باشد،

در این صورت A^{-1} یعنی ماتریس معکوس آن موجود است. در این حالت از ضرب طرفین این معادله از چپ در A^{-1} به دست می آوریم

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$$

یا

$$x = A^{-1}b$$

.

مثال ۱۰.۶. مطلوبست حل دستگاه معادلات زیر

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2$$

$$7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 3.$$

حل. اگر این دستگاه را به صورت ماتریسی بنویسیم، به دستگاه زیر تبدیل می شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

پس ماتریس A همان ماتریس A بخش ۱.۶ و دارای ماتریس معکوس زیر است

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -1 \\ \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

به این ترتیب جواب این دستگاه با استفاده از فرمول فوق به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -1 \\ \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} + \frac{16}{3} - 3 \\ \frac{10}{3} - \frac{26}{3} + 6 \\ -1 + 4 - 3 \end{bmatrix}.$$

پس

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = 0.$$

گرامر این روش حل را به صورت زیر بیان نموده است که به دستور گرامر شهرت دارد. فرض کنید A یک ماتریس مربع از مرتبه n با $\det A \neq 0$ باشد. برای حل دستگاه معادلات $Ax = b$ ماتریس A_j را ماتریسی در نظر بگیرید که از جایگزین کردن بردار b با ستون j ام ماتریس A به دست می آید. در این صورت مجهول‌های x_1 تا x_n این معادله از فرمول زیر به دست می آیند:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

توجه کنید در اینجا نیازی با محاسبه A^{-1} نمی باشد.

مثال ۱۱.۶. دستگاه معادلات مثال اخیر را با دستور گرامر حل کنید.

حل. برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ دترمینان را در بخش ۱.۶ محاسبه کردیم که به دست آمد $\det A = 3$. در نتیجه

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}(5 - 4) = -\frac{1}{3} \\ x_2 &= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{3}(2 - 4) = \frac{2}{3} \\ x_3 &= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \\ 7 & -6 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(12 - 12) = 0. \end{aligned}$$

تمرین ۳.۶

دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

۱.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 13.$$

۲.

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = -1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 6.$$

۳.

$$3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 14$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6.$$

۴.

$$4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5$$

$$-2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -2.$$

۵. دستگاه معادلات زیر را هم با روش عملیات روی سطرها و ستون‌ها و هم با استفاده از روش ماتریس معکوس و هم با دستور کرامر حل کنید.

۶.

$$2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2$$

$$-x_1 + 3x_2 = -3$$

$$5x_2 + 2x_3 = 5.$$

۷.

$$-2x_1 + 2x_2 = 7$$

$$4x_2 + 2x_3 = -5$$

$$2x_1 + x_3 = 4$$

۴.۶ فرم جردن ماتریس‌های متقارن و کاربردهای آن

هدف از این بخش معرفی فرم‌های جردن برای ماتریس‌های مربعی است. این فرم‌ها از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه هر ماتریس برای آن ماتریس ساخته می‌شود و یگانه است. با استفاده از این ماتریس‌ها هم کارهای محاسبه آسان‌تر و بحث‌های نظری ساده‌تر امکان‌پذیر می‌گردد.

چندجمله‌ای مشخصه: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ حقیقی (یا مختلط) است. $\det(A - \lambda I)$ را که یک چندجمله‌ای از درجه n بر حسب λ است را چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A گویند.

مقادیر ویژه: هر یک از ریشه‌های مشخصه را یک مقدار خاص و یا یک مقدار ویژه ماتریس A گویند.

بردار ویژه: اگر λ_1 یک مقدار ویژه ماتریس A باشد هر جواب غیر صفر دستگاه معادله جبری $(A - \lambda_1 I)x = 0$ را یک بردار ویژه ماتریس A وابسته به مقدار ویژه λ_1 گویند.

خاصیت ۱۰.۶.۱ (۱) هر ماتریس $n \times n$ دارای n مقدار ویژه است که ممکن است تکراری، حقیقی و یا مختلط باشد.

(۲) هر مقدار ویژه حداقل دارای یک بردار ویژه مستقل خطی است.

علت. (۱) چندجمله‌ای مشخصه یک چندجمله‌ای از درجه n است. پس طبق قضیه گاوس دارای n ریشه است که ممکن است تکراری، حقیقی و یا مختلط باشد.
(۲) چون $\det(A - \lambda I) = 0$ پس دستگاه $(A - \lambda I)x = 0$ حداقل یک جواب غیر صفر مانند x_1 دارد.

ماتریس متقارن: ماتریس $n \times n$ ، مانند A را متقارن گوئیم اگر $A = A^T$ باشد. یعنی اگر $A = (a_{ij})$ باشد آن‌گاه $a_{ij} = a_{ji}$ برای $1 \leq i, j \leq n$. یا عناصر ماتریس نسبت به قطر اصلی متقارن باشد.

فضای برداری $\mathbb{R}^n$: فضای برداری n مولفه‌ای را روی $\mathbb{R}$ با $\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهند.

ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^n$: اگر $x, y \in \mathbb{R}^n$ و $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ باشد ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^n$ را به صورت $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ تعریف می‌کنیم. همچنین $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ را طول x گویند.

خاصیت ۱۱.۶.۱ (۱) کلیه مقادیر ویژه یک ماتریس متقارن اعداد حقیقی‌اند.

(۲) کلیه بردارهای ویژه یک ماتریس متقارن حقیقی‌اند.

(۳) اگر یک مقدار ویژه k بار تکرار شود برای آن k بردار ویژه مستقل خطی وجود دارد.

(۴) بردارهای ویژه مقادیر ویژه متفاوت نسبت به ضرب داخلی فوق برهم عموداند.

تذکره. با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت می‌توان بردارهای ویژه یک ماتریس متقارن را متعامد یکه‌ای کرد، به‌طوری‌که بردارهای یکه‌ای شده باز هم بردار ویژه مقادیر ویژه خود باشند. برای این کار کفایت بردارهای ویژه هر مقدار خاص را جداگانه متعامد یکه‌ای کنیم.

مثال ۱۲.۶. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را به‌دست و بردارهای ویژه را به‌صورت متعامد یکه‌ای در آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

حل. ابتدا مقادیر ویژه را محاسبه کنیم.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1, -1, 2.$$

بردار ویژه $\lambda = -1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = 0$$

پس جواب می‌بایستی در معادله زیر صدق کند.

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$$

پس

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} s.$$

$\lambda = -1$ یک مقدار ویژه از مرتبه ۲ است، پس دو بردار ویژه مستقل خطی به صورت زیر دارد.

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

بردار ویژه $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = 0.$$

پس بردار ویژه جواب دو معادله زیر است.

$$\begin{aligned} -2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0 & \Rightarrow & \quad -2\xi_1 + \xi_2 = -\xi_3 \\ \xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 &= 0 & \Rightarrow & \quad 2\xi_1 - 4\xi_2 = -2\xi_3 \end{aligned}$$

با جمع دو معادله فوق داریم:

$$-3\xi_2 = -3\xi_3 \quad \Rightarrow \quad \xi_2 = \xi_3.$$

حال $\xi_2 = \xi_3$ را در یکی از معادلات فوق قرار می‌دهیم.

$$2\xi_1 - 4\xi_2 = -2\xi_3 \quad \Rightarrow \quad 2\xi_1 - 4\xi_3 = -2\xi_3 \quad \Rightarrow \quad \xi_1 = \xi_3.$$

پس $\xi_1 = \xi_3$ و

$$\xi^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

پس سه بردار ویژه عبارت‌اند از

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \xi^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

حال این سه بردار را متعامد یکه‌ای می‌کنیم.

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

به این ترتیب $\mathcal{B} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ یک پایه متعامد یکه‌ای است.

در مورد ماتریس متقارن $n \times n$ ، A خاصیت زیر را داریم.

خاصیت ۱۲.۶. فرض کنید ماتریس متقارن $n \times n$ ، A دارای مقادیر ویژه λ_1 تا λ_n و بردار ویژه وابسته به آنها u_1 تا u_n باشد که متعامد یکه‌ای اند. آن گاه برای ماتریس‌های

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

داریم:

$$U^T A U = \Lambda.$$

ماتریس قطری Λ را به صورت $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ نیز نمایش می‌دهند.

علت. u_k بردار ویژه مقدار ویژه λ_k است. پس:

$$Au_1 = \lambda_1 u_1$$

$$Au_2 = \lambda_2 u_2$$

$$\vdots$$

$$Au_n = \lambda_n u_n$$

پس

$$AU = U\Lambda.$$

چون u_1 تا u_n متعامد یک‌ه‌اند پس ماتریس U دارای ماتریس معکوس U^{-1} است، به علاوه $U^{-1} = U^T$. در نتیجه از تساوی اخیر به دست می‌آوریم:

$$U^T AU = \Lambda.$$

تعریف ۱۳.۶. ماتریس Λ را فرم جردن ماتریس A گویند.

تذکر. در کاربرد ماتریس جردن A ماتریس U که از بردارهای ویژه متعامد یک‌ه‌ای u_1 تا u_n تشکیل شده است نقش اساسی دارد. از این ماتریس برای تغییر متغیرها استفاده می‌گردد و اثر آن به صورت فوق منجر به حضور ماتریس جردن Λ می‌شود.

مثال ۱۳.۶. در مثال ۱۲.۶ برای ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

به دست آوریم:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2.$$

و

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

پس

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

پس برای این ماتریس‌ها داریم:

$$U^T A U = \Lambda.$$

مثال ۱۴.۶. مطلوبست حل دستگاه

$$y'_1 = y_2 + y_3$$

$$y'_2 = y_1 + y_3.$$

$$y'_3 = y_1 + y_2$$

حل. این دستگاه را به صورت ماتریسی زیر می‌توان نوشت.

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad Y' = AY.$$

حال بگیریید $Y = UZ$ در این صورت

$$UZ' = AUZ \implies Z' = U^{-1}AUZ = U^T AUZ = \Lambda Z.$$

پس

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} z_1' &= -z_1 & z_1 &= C_1 e^{-x} \\ z_2' &= -z_2 & z_2 &= C_2 e^{-x} \\ z_3' &= 2z_3 & z_3 &= C_3 e^{2x} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{-x} \\ C_2 e^{-x} \\ C_3 e^{2x} \end{bmatrix}.$$

در نتیجه

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Y = UZ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 e^{-x} \\ C_2 e^{-x} \\ C_3 e^{2x} \end{bmatrix}.$$

پس

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} C_1 e^{-x} - \frac{1}{\sqrt{6}} C_2 e^{-x} + \frac{1}{\sqrt{3}} C_3 e^{2x} \\ y_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} C_2 e^{-x} + \frac{1}{\sqrt{3}} C_3 e^{2x} \\ y_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} C_1 e^{-x} + \frac{1}{\sqrt{6}} C_2 e^{-x} + \frac{1}{\sqrt{3}} C_3 e^{2x}. \end{aligned}$$

یکی از کاربردهای خوب ماتریس‌های متقارن نمایش فرم‌های درجه دوم با استفاده از آنها است. مطالب زیر را در این ارتباط داریم.

فرم‌های درجه ۲: چندجمله‌ای درجه دوم از n متغیر x_1 تا x_n ،
 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

را یک فرم درجه ۲ در $\mathbb{R}^n$ گویند.

تذکره. a_{ij} ها را می‌توان طوری تنظیم نمود تا $a_{ij} = a_{ji}$ گردد.

مثال ۱۵.۶. چندجمله‌ای درجه ۲ زیر یک فرم درجه ۲ در $\mathbb{R}^3$ است.

$$F(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 5x_2^2.$$

تعریف ۱۴.۶. فرم درجه دو $F(x)$ را

(۱) مثبت معین گویند اگر $F(x) > 0$ برای تمام $x \in \mathbb{R}^n$ و $x \neq 0$.

(۲) نیم‌مثبت معین گویند اگر $F(x) \geq 0$ برای تمام $x \in \mathbb{R}^n$ و $x \neq 0$.

(۳) منفی معین گویند اگر $F(x) < 0$ برای تمام $x \in \mathbb{R}^n$ و $x \neq 0$.

(۴) نیم‌منفی معین گویند اگر $F(x) \leq 0$ برای تمام $x \in \mathbb{R}^n$ و $x \neq 0$.

(۵) نامعین گویند اگر مقدار $F(x)$ برای مقادیری از $x \in \mathbb{R}^n$ تغییر علامت دهد.

تذکره. فرم درجه ۲، $F(x)$ را می‌توان به صورت $F(x) = x^T A x$ نوشت که در آن

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, x^T = (x_1, \dots, x_n) \text{ و } A = (a_{ij}), 1 \leq i, j \leq n.$$

خاصیت ۱۳.۶. فرم درجه ۲، $F(x) = x^T A x$

(۱) مثبت معین است اگر و فقط اگر کلیه مقادیر ویژه A مثبت باشد.

(۲) نیم‌مثبت معین است اگر و فقط اگر کلیه مقادیر ویژه A غیر منفی باشد.

(۳) منفی معین است اگر و فقط اگر کلیه مقادیر ویژه A منفی باشد.

(۴) نیم‌منفی معین است اگر و فقط اگر کلیه مقادیر ویژه A غیر مثبت باشد.

(۵) نامعین است اگر و فقط اگر برخی از مقادیر ویژه A مثبت و برخی دیگر منفی باشد.

علت. طبق خاصیت ۱۲.۶ با استفاده از ماتریس U می‌توان نوشت $U^T A U = \Lambda$ که

در آن $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ماتریس قطری متشکل از مقادیر ویژه ماتریس است.

حال بگیرید $X = UY$ ، در این صورت

$$F(x) = x^T A x = y^T U^T A U Y = Y^T \Lambda Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = G(y).$$

(۱) اگر $F(x)$ مثبت معین باشد، $F(x) > 0$ برای $x \neq 0$ باید $G(y) > 0$ برای $y \neq 0$ و این برقرار است اگر و فقط اگر $\lambda_i > 0$ برای $1 \leq i \leq n$ سایر حالات به صورت مشابه قابل استدلال است.

مثال ۱۶.۶. نوع فرم درجه دوم زیر را مشخص کنید.

$$F(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2$$

حل. داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

حال مقادیر ویژه را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 3-\lambda & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \left[(1-\lambda)(3-\lambda) - 8 \right] \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0 \\ \Rightarrow \quad \lambda_1 &= 3, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = -1. \end{aligned}$$

پس A یک ماتریس نامعین است.

با توجه به تعریف معین بودن فرم درجه ۲ و ارتباط آن با ماتریس متقارن تعریف زیر را داریم.

تعریف ۱۵.۶. اگر کلیه مقادیر ویژه یک ماتریس متقارن مثبت باشد آن ماتریس را مثبت معین گوئیم. اگر کلیه مقادیر ویژه غیر منفی باشد آن را مثبت نیم‌معین گوئیم. اگر کلیه مقادیر ویژه منفی باشد آن را منفی معین و اگر کلیه مقادیر ویژه غیر مثبت باشد آن را منفی نیم‌معین می‌گویند.

در خاصیت زیر همزمان قطری کردن دو ماتریس متقارن را داریم.

خاصیت ۱۴.۶. فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ و متقارن و B یک ماتریس مثبت معین باشد آن گاه ماتریس $n \times n$ مانند S موجود است به طوری که

$$S^T B S = I \quad \text{و} \quad S^T A S = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

علت. ابتدا ماتریس Q' را طوری تعیین کنید تا

$$Q'^T B Q' = \Lambda' = \begin{bmatrix} \lambda'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda'_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda'_n \end{bmatrix} = B \text{ فرم جردن ماتریس } B.$$

حال بگیرید:

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda'}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda'_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda'_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\lambda'_n}} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Q = Q' \frac{1}{\sqrt{\Lambda'}}.$$

حال ماتریس P را طوری انتخاب کنید تا

$$P^T(Q^T A Q)P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

حال بگیرید $S = QP$. در این صورت

$$S^T A S = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

همچنین

$$\begin{aligned} S^T B S &= P^T Q^T B Q P = P^T \frac{1}{\sqrt{\Lambda'}} Q'^T B Q' \frac{1}{\sqrt{\Lambda'}} P \\ &= P^T \frac{1}{\sqrt{\Lambda'}} \Lambda' \frac{1}{\sqrt{\Lambda'}} P = P^T I P = I. \end{aligned}$$

توجه کنید که در تساوی فوق نشان دادیم $Q^T B Q = I$. پس

$$\begin{aligned} |Q^T| \cdot |A - \lambda B| \cdot |Q| &= |Q^T A Q - \lambda Q^T B Q| \\ &= |Q^T A Q - \lambda I|. \end{aligned}$$

بنابراین ریشه‌های $\det(A - \lambda B)$ مقادیر ویژه ماتریس $Q^T A Q$ است.

مثال ۱۷.۶. دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ را همزمان قطری نمایید.

حل. ابتدا مقادیر ویژه ماتریس B را به دست می‌آوریم.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

به ازای $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 0 \implies \xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

به ازای $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 0 \implies \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

به این ترتیب به دست می‌آوریم:

$$Q' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \Lambda' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

پس

$$\sqrt{\Lambda'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Q = Q' \frac{1}{\sqrt{\Lambda'}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

و در نتیجه

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

این ماتریس به صورت قطری است. پس $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ و

$$S = P Q = Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

همچنین

$$S^T A S = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad S^T B S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

تعریف ۱۶.۶. اگر در فرم درجه دوم $F(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i x_j$ برای $i \neq j$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$ می‌گویند این فرم به صورت کانونیک است.

همزمان به صورت کانونیک در آوردن دو فرم درجه ۲ از اهمیت خاصی برخوردار است. خاصیت زیر در این ارتباط است.

خاصیت ۱۵.۶. فرض کنید $F_1(x)$ و $F_2(x)$ دو فرم درجه دو و $F_2(x)$ مثبت معین باشد. آن گاه ماتریسی مانند S موجود است به طوری که با تغییر متغیر $x = Sx'$ هر دو فرم درجه ۲ فوق به صورت کانونیک در می‌آید.

علت. اگر این دو فرم را با استفاده از ماتریس‌های متقارن A و B بنویسیم:

$$F_1(x) = x^T A x \quad \text{و} \quad F_2(x) = x^T B x.$$

در این صورت B یک ماتریس مثبت معین است. پس طبق خاصیت ۱۴.۶ ماتریسی مانند S موجود است به طوری که $S^T A S = \Lambda$ و $S^T B S = I$ که در آن Λ یک ماتریس قطری و نه لزوماً فرم جردن ماتریس A است. حال بپذیرید $x' = Sx$ در این صورت

$$F_1(x) = x^T A x = x'^T S^T A S x' = x'^T \Lambda x' = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i'^2$$

9

$$F_2(x) = x^T B x = x'^T S^T B S x' = x'^T I x' = \sum_{i=1}^n x_i'^2.$$

تمرین ۴.۶

۱. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه هر یک از ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۲ \\ ۰ & -۲ & ۳ \end{bmatrix} \quad (\text{آ})$$

۲. با استفاده از بردارهای ویژه هر یک از ماتریس‌های زیر را به فرم جردن در آورید.

$$C = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \quad (\text{آ})$$

$$D = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۰ \\ -۲ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

۳. هر یک از فرم‌های درجه ۲ زیر را به صورت کانونیک در آورید.

$$F_1(x) = x_1^2 + ۲x_1^2 + x_3^2 - ۲x_1x_2 + ۲x_2x_3 \quad (\text{آ})$$

$$F_2(x) = ۲x_1x_2 + ۲x_1x_3 + ۲x_2x_3 \quad (\text{ب})$$

$$F_3(x) = x_1^2 + x_2^2 + ۳x_3^2 - x_1x_3 + ۲x_2x_3 \quad (\text{ج})$$

$$F_4(x) = ۵x_1^2 - ۲x_1x_2 + ۳x_1^2 + x_3^2 \quad (\text{د})$$

۴. هر یک از دو ماتریس داده شده زیر را همزمان قطری نمایید.

$$B = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \quad (\text{آ})$$

$$B = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

۵. هر یک از دو فرم دوخطی داده شده زیر را همزمان به فرم کانونیک در آورید.

$$F_2(x) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 \text{ و } F_1(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 \quad (\bar{A})$$

$$F_2(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 \text{ و } F_1(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 \quad (\bar{B})$$

۶. با استفاده از ماتریس جردن هر یک از دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e^t \\ 1 \end{bmatrix} & (\bar{C}) & \dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} t \\ e^t \end{bmatrix} & (\bar{A}) \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e^t \\ t \\ 1 \end{bmatrix} & (\bar{D}) & \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ e^t \end{bmatrix} & (\bar{B}) \end{aligned}$$

۵.۶ فرم جردن ماتریس‌های مختلط

در این بخش به معرفی فرم‌های جردن برای ماتریس‌های مختلط می‌پردازیم. فرض کنید $\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط و $\mathbb{C}^n$ بردارهای با n مولفه از اعداد مختلط باشد. در این صورت $\mathbb{C}^n$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است. روی $\mathbb{C}^n$ یک ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

در این جا $\bar{y}_k$ مزدوج مختلط y_k است. این ضرب برداری دارای خواص زیر است.

۱. برای $a, b \in \mathbb{C}$ و $x, y, z \in \mathbb{C}^n$

$$\langle ax + bz, y \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle z, y \rangle.$$

۲. برای هر دو عضو $x, y \in \mathbb{C}^n$

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}.$$

۳. برای هر عضو $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle x, x \rangle \geq 0.$$

۴. تساوی $\langle x, x \rangle = 0$ برقرار است اگر و فقط اگر $x = 0$.

تعریف ۱۷.۶. $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ را طول x گویند و با $\|x\|$ نشان می‌دهند.

ماتریس هرمیتی: ماتریس مختلط $n \times n$ ، $A = (a_{ij})$ را یک ماتریس هرمیتی گوئیم اگر

$$\bar{A} = A^T \text{ یا } \bar{a}_{ij} = a_{ji}, i, j \text{ برای هر}$$

ماتریس هرمیتی خواص اساسی ماتریس‌های متقارن را دارد.

خاصیت ۱۶.۶. (۱) کلیه مقادیر خاص یک ماتریس هرمیتی حقیقی‌اند.

(۲) اگر λ_1 یک مقدار ویژه از مرتبه k باشد برای آن k تا بردار خاص مستقل خطی موجود است.

(۳) بردارهای ویژه مقادیر ویژه متفاوت بر هم عموداند.

تذکر. با استفاده از روش گرام-اشمیت می‌توان بردارهای ویژه هر مقدار ویژه را به صورت متعامد یکه‌ای در آورد. پس هر ماتریس هرمیتی n بردار ویژه متعامد یکه‌ای دارد.

ماتریس الحاقی: ماتریس مختلط $\bar{A}^T$ را ماتریس الحاقی ماتریس A گویند و با A^* نشان می‌دهند.

برای ماتریس‌های هرمیتی داریم $A^* = A^{-1}$.

مثال ۱۸.۶. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس هرمیتی $A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$ را

به دست آورید.

حل.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 + i \\ 1 - i & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 2) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4.$$

به ازای $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \xi_1 + (1+i)\xi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \end{bmatrix}.$$

به ازای $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -2\xi_1 + (1+i)\xi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

اکنون به بررسی فرم جردن در حالت کلی می‌پردازیم.

فرض کنید ماتریس $n \times n$ مختلط A دارای مقدار ویژه λ_1 است و ξ بردار ویژه وابسته به آن است.

تعریف ۱۸.۶. هر جواب غیر صفر دستگاه $(A - \lambda_1 I)\eta = \xi$ را یک بردار ویژه مرتبه دوم λ_1 گویند. همچنین هر جواب غیر صفر دستگاه $(A - \lambda_1 I)\zeta = \eta$ را یک بردار ویژه از مرتبه سوم λ_1 گویند. با استقرا سایر بردارهای ویژه از مرتبه بالاتر تعریف می‌گردد. بردار ویژه ξ را نیز بردار ویژه از مرتبه یک تعریف می‌کنیم.

خاصیت ۱۷.۶. فرض کنید ماتریس A دارای مقادیر ویژه متفاوت λ_1 تا λ_s باشد. اگر یک مقدار ویژه از مرتبه تکرار k باشد برای آن k بردار ویژه از مرتبه گوناگون موجود است. این n بردار ویژه λ_1 تا λ_s مستقل خطی اند.

تعریف ۱۹.۶. ماتریس $m \times m$ زیر را که روی قطر اصلی مقدار ویژه λ و بالای قطر اصلی عدد ۱ دارد، ماتریس جردن گویند.

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

تعریف ۲۰.۶. ماتریس مربعی $n \times n$ مانند A را متشابه با ماتریس B گویند اگر ماتریسی غیر منفرد مانند P موجود باشد به طوری که $P^{-1}AP = B$.

خاصیت ۱۸.۶. هر ماتریس مربعی $n \times n$ مانند A متشابه با یک ماتریس مانند Λ به صورت زیر است

$$\Lambda = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & M_{s-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & M_s \end{bmatrix}.$$

هر یک از ماتریس‌های M_k یک ماتریس جردن است. تعداد این ماتریس‌ها از تعداد مقادیر ویژه متفاوت کمتر نیست. برای ماتریس P که به صورت زیر داده می‌شود، داریم:

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

ماتریس بلوکی-قطری Λ را به صورت $\Lambda = \text{diag}[M_1, \dots, M_s]$ نیز نمایش می‌دهیم.
ماتریس P به صورت زیر ساخته می‌شود. فرض کنید برای مقدار ویژه λ_k بردارهای ویژه از مرتبه یک (بردار ویژه) و مرتبه بالاتر به ترتیب به صورت

$$\xi^{(k)}, \eta^{(k)}, \zeta^{(k)}, \dots$$

به دست آمده است. در این صورت

$$P = \begin{bmatrix} \xi^{(1)} & \eta^{(1)} & \zeta^{(1)} & \dots & \xi^{(s)} & \eta^{(s)} & \zeta^{(s)} & \dots \end{bmatrix}.$$

علت. برای مقادیر خاص λ_1 تا λ_s داریم:

$$A\xi^{(1)} = \lambda_1 \xi^{(1)}$$

$$A\eta^{(1)} = \lambda_1 \eta^{(1)} + \xi^{(1)}$$

$$A\zeta^{(1)} = \lambda_1 \zeta^{(1)} + \eta^{(1)}$$

$$\vdots$$

$$A\xi^{(s)} = \lambda_s \xi^{(s)}$$

$$A\eta^{(s)} = \lambda_s \eta^{(s)} + \xi^{(s)}$$

$$A\zeta^{(s)} = \lambda_s \zeta^{(s)} + \eta^{(s)}$$

$$\vdots$$

به این ترتیب

$$\begin{bmatrix} A\xi^{(1)} & A\eta^{(1)} & A\zeta^{(1)} & \dots & A\xi^{(s)} & A\eta^{(s)} & A\zeta^{(s)} & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \xi^{(1)} & \lambda_1 \eta^{(1)} + \xi^{(1)} & \dots & \lambda_s \xi^{(s)} & \lambda_s \eta^{(s)} + \xi^{(s)} & \lambda_s \zeta^{(s)} + \eta^{(s)} & \dots \end{bmatrix}$$

یا به صورت ماتریسی

$$\begin{aligned}
 A \begin{bmatrix} \xi^{(1)} & \eta^{(1)} & \zeta^{(1)} & \dots & \xi^{(s)} & \eta^{(s)} & \zeta^{(s)} & \dots \end{bmatrix} &= AP \\
 &= P \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_s & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_s \end{bmatrix} \\
 &= P \cdot \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & M_{s-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & M_s \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

یا

$$AP = P\Lambda$$

یا

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

که در آن $\Lambda = \text{diag}[M_1, \dots, M_s]$ و هر یک از M_k ها یک ماتریس جردن است.

نکته. در کاربرد محاسبه P^{-1} ضرورت دارد و به کار می‌رود.

مثال ۱۹.۶. ماتریس جردن زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

حل. مراحل حل را به صورت زیر داریم.

قدم اول، محاسبه مقادیر ویژه:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ -3 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2+\lambda \\ -3 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2+\lambda \\ -1 & 3-\lambda & 0 \end{vmatrix} = (-1)(2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2) \left[(1-\lambda)(3-\lambda) + 1 \right] \\ &= (\lambda-2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda-2)^3 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = 2, 2, 2. \end{aligned}$$

قدم دوم، محاسبه بردار ویژه:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = 0 & \Rightarrow \begin{aligned} -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0 \\ -2\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 &= 0 \end{aligned} \\ & \Rightarrow \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = -\xi_3 \\ & \Rightarrow \xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} t, \quad \xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

قدم سوم، محاسبه بردار ویژه مرتبه ۲:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} & \Rightarrow \begin{aligned} -\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 &= 0 \\ 2\eta_1 - \eta_2 - \eta_3 &= 1 \\ -3\eta_1 + 2\eta_2 + 2\eta_3 &= -1 \end{aligned} \\ & \Rightarrow \eta_1 = 1, \quad \eta_2 + \eta_3 = 1 \\ & \Rightarrow \eta^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

قدم چهارم، محاسبه بردار ویژه مرتبه ۳:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 &= 1 \\ 2\zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3 &= 1 \end{aligned} \\ \Rightarrow \zeta_1 = 2, \quad \zeta_2 + \zeta_3 &= 0 \\ \Rightarrow \zeta^{(1)} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

قدم پنجم، معرفی ماتریس P و محاسبه P^{-1} :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

محاسبه ماتریس P^{-1} :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

به این ترتیب به دست می‌آوریم:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

همچنین $AP = \Lambda P^{-1}$ به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

تذکره. نمایش یک مقطع مخروطی را در فضای n بعدی به صورت زیر داریم.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^n b_j x_j = C, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

(۱) اگر کلیه مقادیر ویژه ماتریس $A = (a_{ij})$ مثبت یا منفی باشد مقطع مخروطی را بیضی گون گویند.

(۲) اگر بعضی از مقادیر ویژه مثبت و بعضی دیگر منفی باشد آن را هذلولی گون گویند.

(۳) اگر بعضی صفر باشد آن را سهمی گون گویند.

مثال ۶.۲۰. در صفحه $\mathbb{R}^2$ ، نوع مقطع مخروطی $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey = f$ را تعیین کنید.

حل. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ ماتریس مربوط به معادله $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey = f$ است. اگر λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه A باشند داریم:

$$\lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2 \quad \text{و} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = a + c.$$

(۱) اگر $ac - b^2 > 0$ در این صورت دو ریشه حقیقی هم علامت داریم پس بیضی گون داریم.

(۲) اگر $ac - b^2 < 0$ در این صورت دو ریشه حقیقی مختلف علامت داریم پس هذلولی گون داریم.

(۳) اگر $ac - b^2 = 0$ و $a + c \neq 0$ در این صورت یکی از ریشه‌ها صفر است و سهمی‌گون داریم.

تعریف ۲۱.۶. اگر در نمایش یک مقطع مخروطی برای $i \neq j$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$ آن را به صورت کانونیک آن مقطع مخروطی گویند.

تمرین ۵.۶

۱. هر یک از ماتریس‌های زیر را به فرم جردن در آورید.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{آ})$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 6 & -4 & -4 \\ 22 & 15 & -8 & -9 \\ -3 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

۲. هر یک از دستگاه معادلات زیر را با استفاده از فرم جردن حل کنید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (\text{آ})$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ -7 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (ه)$$

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (ج)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} t \\ e^t \\ e^{-t} \end{bmatrix} \quad (د)$$

۳. نوع هر یک از مقاطع مخروطی زیر را تعیین کنید. همچنین آن را به فرم کانونیک بنویسید.

$$xy = 1 \quad (\bar{آ})$$

$$\sqrt{3}xy + y^2 = 1 \quad (ب)$$

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8 \quad (ج)$$

$$73x^2 + 72xy + 52y^2 + 30x - 40y - 75 = 0 \quad (د)$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0 \quad (ه)$$

فصل ۷

حساب تغییرات با نقاط ثابت انتهایی

حساب تغییرات به مطالعه مسائل ماگزیمم و مینیمم می‌پردازد. از این نظر می‌توان آن را شاخه‌ای از بهینه‌سازی دانست. لیکن این شاخه تفاوت اساسی با مسائل ماگزیمم و مینیمم توابع چندمتغیره حقیقی مقدار با دامنه $\mathbb{R}^n$ دارد. در مسائل حساب تغییرات با تابع‌ها و مسائل ماگزیمم و مینیمم آنها سر کار داریم. عناصر دامنه هر تابع خود تابع‌اند و جواب مسئله نیز خود یک تابع است. در بخش ۱.۷ به بیان تاریخی حساب تغییرات و مسائلی که منجر به پیدایش این شاخه از ریاضی گردید، می‌پردازیم. در بخش ۲.۷ ساده‌ترین مسئله در حساب تغییرات را معرفی و بررسی می‌کنیم. در بخش‌های بعدی این مسئله را در جهت‌های گوناگون توسعه می‌دهیم.

۱.۷ پیدایش حساب تغییرات و مثال‌ها

پیدایش حساب تغییرات با فاصله‌ای بسیار کوتاه با پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال صورت گرفت. علت این امر وجود مسائل طبیعی در حساب تغییرات بوده است. گسترش حساب تغییرات نیز به موازات گسترش حساب دیفرانسیل و انتگرال صورت پذیرفته است. اهمیت واقعی حساب تغییرات در کاربرد آن در مسائل مکانیک کلاسیک، ارتعاشات، کنترل بهینه و مسائل علوم پایه و علوم اقتصادی است. همچنین تبدیل مسائل معادلات دیفرانسیل با مقادیر مرزی به مسائل حساب تغییرات و حل مستقیم آنها بر ارزش این

شاخه ریاضی می‌افزاید. در ادامه این بخش به معرفی چند مسئله طبیعی در حساب تغییرات می‌پردازیم.

الف: مسئله زنجیر آویزان

زنجیر نازک و سنگین با جرم مخصوص ثابت در واحد طول که کاملاً انعطاف‌پذیر با طول L را در نظر بگیرید که بین دو نقطه A و B در فضا آویزان است و فاصله A و B کمتر از L است. همچنین فرض کنید ارتفاع A برابر y_0 و ارتفاع B برابر y_1 است. مسئله عبارت از تعیین شکل یا منحنی است که زنجیر در فضا به خود می‌گیرد.

فرض بر این است که زنجیر شکلی را به خود می‌گیرد تا انرژی پتانسیل آن مینیمم گردد. اگر m جرم مخصوص در واحد طول زنجیر و g شتاب ثقل باشد مقدار انرژی در جزء طول زنجیر برابر $mg y ds$ و کل انرژی پتانسیل زنجیر برابر است با

$$W_p = \int_0^L mg y ds. \quad (۱.۷)$$

توجه کنید در اینجا s طول منحنی زنجیر را تا نقطه A و $y(s)$ فاصله نقطه s زنجیر تا زمین را نشان می‌دهد. فرض کنید دستگاه مختصات دکارتی طوری قرار دارد که A دارای مختصات (x_0, y_0) و B دارای مختصات (x_1, y_1) است. در این صورت $ds = \sqrt{1 + y'^2}$ و (۱.۷) به صورت زیر در می‌آید:

$$W_p = \int_{x_0}^{x_1} mg y \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (۲.۷)$$

در بالا فرض بر این است که $y : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی دارای مشتق مرتبه اول پیوسته است.

زنجیر شکلی را به خود می‌گیرد تا انرژی پتانسیل مینیمم گردد. چون مقدار mg تأثیری در جواب مسئله ندارد می‌توان از آن صرف‌نظر کرد و یا آن را برابر ۱ گرفت. پس می‌توان گفت مسئله عبارت از تعیین یک منحنی است که مقدار زیر را مینیمم کند:

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (۳.۷)$$

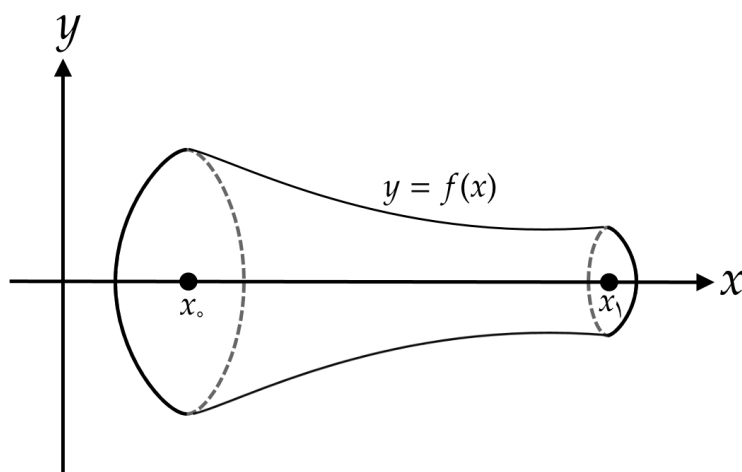
توجه کنید این مسئله علاوه بر معادله بالا دارای این شرایط نیز است که اگر $y_0(x)$ جواب مطلوب باشد این جواب می‌بایستی در شرایط مرزی زیر صدق نماید:

$$y_0(x_0) = y_0, \quad y_0(x_1) = y_1. \quad (۴.۷)$$

در بخش بعدی به حل این مسئله می‌پردازیم و خواهیم دید که جواب یک تابع کسینوس هذلولی است. این منحنی را منحنی زنجیر نیز نامیده‌اند چون اولین بار در حل مسئله بالا ظاهر شد.

ب: مسئله سطح دوار مینیمم مقید

دو نقطه (x_0, y_0) و (x_1, y_1) در صفحه x و y با $y_0 > 0$ و $y_1 > 0$ مفروض‌اند. از میان تمام منحنی‌های $y = f(x)$ با دامنه $[x_0, x_1]$ که از دو نقطه بالا می‌گذرند و دارای طول L است با $x_1 - x_0 < y_0 + y_1$ آن منحنی را بیابید که رویه حاصل از دوران آن حول محور x ها دارای مقدار مینیمم باشد. به شکل ۱.۷ توجه کنید.



شکل ۱.۷: رویه حاصل از دوران $y = f(x)$ حول محور x ها

اگر $A(y)$ مساحت رویه تولید شده توسط منحنی $y(x)$ باشد در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} A(y) &= 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \\ L &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \\ y(x_0) &= y_0, \quad y(x_1) = y_1. \end{aligned} \quad (5.7)$$

در این جا مسئله عبارت از تعیین منحنی $y : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که $A(y)$ را مینیمم نماید و در دو شرط دیگر صدق کند. توجه کنید این مسئله دارای همان جواب مسئله قبل است. رویه بالا را کانولوتید می گویند. توجه کنید برای این که مسئله بالا دارای جواب باشد باید طول منحنی جواب یعنی L از فاصله بین دو نقطه (x_0, y_0) و (x_1, y_1) بیشتر باشد. دو مسئله بالا را که در آن طول منحنی جواب برابر L است مسئله مقید گویند.

تذکره ۱) مسئله بالا برای انتخاب منحنی $y(x)$ برای رویه ماگزیمم نیز دارای جواب است.

۲) مسئله بالا برای مینیمم بدون داشتن طول منحنی نیز دارای جواب است. این مسئله در زیر می آید.

ج: مسئله سطح دوار مینیمم بدون قید

از میان تمام منحنی ها که از دو نقطه (x_0, y_0) و (x_1, y_1) می گذرد آن منحنی را بیابید که سطح رویه دوار حول محور x ها مینیمم گردد.

منحنی مطلوب آن منحنی است که $A(y)$ زیر را مینیمم کند.

$$\begin{aligned} A(y) &= 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \\ y(x_0) &= y_0, \quad y(x_1) = y_1. \end{aligned} \quad (6.7)$$

تذکره. بدیهی است که مسئله بالا برای رویه ماگزیمم فاقد جواب است. چرا؟

د: مسئله سرسره

می‌خواهیم سرسره‌ای بسازیم که در صفحه مختصات x و y نقطه شروع آن $A = (x_0, y_0)$ و نقطه انتهایی آن $B = (x_1, y_1)$ با $x_0 < x_1$ و $y_0 < y_1$ باشد. منحنی این سرسره را طوری بیابید که زمان حرکت بدون اصطکاک و بدون سرعت اولیه روی آن از نقطه A تا B نسبت به تمام منحنی‌های ممکن دیگر مینیمم باشد.

اگر s طول قوس مسیر از نقطه A و v تندی حرکت ذره باشد در این صورت $v = \frac{ds}{dt}$ یا $dt = \frac{ds}{v}$. پس زمان لازم برای حرکت از A و رسیدن به B عبارت است از $T = \int_A^B \frac{ds}{v}$. اگر $y(x)$ منحنی یک مسیر حرکت باشد از اصل بقاء انرژی با توجه به سرعت اولیه صفر داریم:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y_0 - y)$$

که در آن m جرم ذره و g شتاب ثقل است. یا

$$v = \sqrt{2g(y_0 - y)}.$$

همچنین، $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$. پس:

$$T(y) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} dx. \quad (7.7)$$

پس جواب مسئله یک منحنی است که $T(y)$ را مینیمم نماید و در شرایط مرزی زیر صدق کند:

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1. \quad (8.7)$$

ه: مسئله رویه مینیمم

فرض کنید C یک منحنی بسته و هموار در فضای سه بعدی (x, y, z) است به طوری که تصویر آن در صفحه (x, y) منحنی بسته و ساده «خوب» است. از میان تمام رویه‌های ممکن با لبه C آن رویه را بیابید که دارای سطح مینیمم است.

اگر $z = u(x, y)$ نمایش دهنده یک رویه هموار با مرز C باشد در این صورت سطح آن برابر است با:

$$A(u) = \iint_D \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy. \quad (9.7)$$

پس جواب مسئله رویه‌ای است که $A(u)$ را مینیمم نماید و $u|_{\partial D} = C$.

و: مسئله منحنی‌های ژئودزیک

فرض کنید M یک رویه در فضا (x, y, z) و دو نقطه A و B روی آن قرار دارند. از میان تمام منحنی‌های بین A و B که روی M قرار دارند آن منحنی را بیابید که دارای طول مینیمم است.

فرض کنید این رویه دارای معادلات پارامتری زیر است:

$$x = x(t, v), \quad y = y(t, v), \quad z = z(t, v).$$

همچنین فرض کنید $v = v(t)$ ، $a \leq t \leq b$ ، یک منحنی روی M باشد که دو نقطه A و B را به هم وصل می‌نماید. در این صورت معادله منحنی مطلوب عبارت است از:

$$\vec{r}(t) = x(t, v(t))\vec{i} + y(t, v(t))\vec{j} + z(t, v(t))\vec{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

پس

$$\begin{aligned} d\vec{r}(t) &= dx(t)\vec{i} + dy(t)\vec{j} + dz(t)\vec{k} \\ &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v} v' \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} v' \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} v' \right) \vec{k} \right] dt. \end{aligned}$$

بدین ترتیب به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 &= \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= x_t^2 + y_t^2 + z_t^2 + 2(x_t x_v + y_t y_v + z_t z_v)v' + (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2)(v')^2 \\ &= e + 2fv' + g(v')^2. \end{aligned}$$

پس طول مسیر بین A و B به صورت زیر به دست می‌آید:

$$L(v) = \int_a^b \sqrt{e + 2fv' + g(v')^2} dt. \quad (۱۰.۷)$$

توجه کنید در این مسئله هدف یافتن تابع $v = v(t)$ است که طول L را مینیمم نماید. این مثال‌ها در بخش‌های بعدی مورد مطالعه قرار خواهند گرفت.

تمرین ۱.۷

در مسائل زیر فقط تابع نهایی شونده، قیود و شرایط مرزی را تعیین کنید.

۱. فرض کنید در صفحه (x, y) دو نقطه (x_0, y_0) و (x_1, y_1) با $x_0 < x_1$ و $y_0 > 0$ و $y_1 > 0$ و نخی باریک به طول L بین این دو نقطه بسته است. منحنی $y = f(x) > 0$ را طوری انتخاب کنید تا مساحت زیر آن ماگزیمم گردد.

۲. بشکه‌ای با شعاع قاعده‌های ۱ و ارتفاع ۲ با حجم ۸ طوری ساخته شده است که سطح رویه جانبی آن مینیمم است. مساحت این سطح جانبی را بیابید.

۳. بشکه‌ای با شعاع قاعده‌های ۱ و ارتفاع ۲ با سطح جانبی $\frac{1}{4}$ طوری ساخته شده که حجم آن ماگزیمم است، مقدار حجم آن را بیابید.

۴. نشان دهید رویه حاصل از دوران منحنی $y = f(x)$ بین دو نقطه $(0, 0)$ و $(x_1, 0)$ نامعین (به دور محور x ‌ها با سطح رویه مقدار داده شده a و حجم ماگزیمم یک کره است).

۵. نشان دهید رویه حاصل از دوران منحنی $y = f(x)$ بین دو نقطه $(0, 0)$ و $(x_1, 0)$ نامعین (به دور محور x ‌ها با حجم ثابت a و سطح رویه مینیمم یک کره است).

۶. می‌خواهیم شبه هرمی به ارتفاع ۳ و شعاع قاعده ۱ بسازیم که از دوران منحنی $y = f(x)$ در صفحه مختصات بین نقاط $(0, 3)$ و $(1, 0)$ به دور محور y به دست آید. این منحنی را طوری انتخاب کنید تا مدت زمانی که یک قطره باران روی آن می‌ماند مینیمم گردد.

۷. در مسئله ۶ منحنی را طوری انتخاب کنید تا سطح جانبی آن مینیمم گردد.

۸. طبق اصل فرما نور برای طی مسافت بین دو نقطه از فضا مسیری را انتخاب می‌کند که زمان طی این مسیر مینیمم باشد. همچنین در سیالات سرعت حرکت نور به غلظت سیال وابسته است. فرض کنید در سیالی غلظت به ارتفاع سیال یا سرعت نور فقط به ارتفاع سیال وابسته باشد. در این سیال منحنی مسیر بین نقاط A و B را به دست آورید.

۹. نشان دهید کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه داده شده A و B خط مستقیم است.

۲.۷ معادله اویلر-لاگرانژ

در بخش قبل مسائل ماگزیمم و مینیمم‌هایی مطرح گردید که جواب‌های آن منحنی یا رویه بودند. پاسخ به این سؤالات با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال مشکل و یا غیر ممکن است. هدف از این بخش معرفی حساب تغییرات به عنوان ابزاری برای حل این گونه مسائل است که بعداً معرفی می‌شوند. در مسائل پیچیده‌تری این ابزار مسائل ماگزیمم و مینیمم را برای توابعی بررسی می‌کند که دامنه این توابع خود نیز تابع اند. پس برای درک و حل این مسائل می‌بایستی فضای برداری دامنه این توابع را مشخص کنیم. در این ارتباط مفاهیم زیر را داریم.

فرض کنید $D \subset \mathbb{R}^n$ یک میدان یعنی مجموعه باز و همبند و $C^n(\bar{D})$ مجموعه توابع حقیقی با دامنه D باشد که دارای مشتقات مرتبه n -ام پیوسته در $\bar{D}$ است. برای $n = 0$ می‌نویسیم $C(\bar{D})$ که مجموعه توابع حقیقی پیوسته با دامنه $\bar{D}$ است. در این جا $\bar{D}$ بستار D است.

تعریف ۱.۷. هر تابع حقیقی با دامنه $C^n(\bar{D})$ را یک تابع می‌گوییم.

مثال ۱.۷. تابع $L : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ که به تابع $y = f(x)$ طول منحنی آن را نسبت می‌دهد یک تابع است.

مثال ۲.۷. تابع $L : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ که به تابع $y = f(x)$ سطح رویه حاصل از دوران این تابع حول محور y را نسبت می‌دهد یک تابع است.

مثال ۳.۷. تابع $L : C^n[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ که به تابع $y = f(x)$ مقدار $N(f) = \sum_{i=0}^n f^{(i)}(0)$ را نسبت می‌دهد یک تابع است.

تعریف ۲.۷. می‌گوییم تابع J دارای ماگزیمم در y_0 است اگر برای هر y دیگری نزدیک y_0 داشته باشیم $J(y) \leq J(y_0)$. می‌گوییم تابع J در y_0 دارای مینیمم است اگر $-J$ در y_0 دارای ماگزیمم باشد.

تابع‌هایی که در بخش قبلی به عنوان مثال مطرح کردیم، به صورت انتگرال همراه با شرایط مرزی و قید بوده است. ساده‌ترین آن‌ها و بدون قید مسئله به صورت زیر است که بایستی تابع $y(x)$ نهایی (ماگزیمم و یا مینیمم) کننده تابع زیر را تعیین کنیم.

$$\begin{cases} J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx \\ y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1. \end{cases}$$

این مسئله را ساده‌ترین مسئله حساب تغییرات گویند.

برای بررسی این مسئله یک خاصیت اساسی را بیان می‌کنیم که به لم اساسی حساب تغییرات یا لم دوبویس-ریموند مشهور است.

خاصیت ۱.۷ (لم دوبویس-ریموند). فرض کنید $g : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ یک

تابع پیوسته باشد به طوری که برای هر تابع دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته $\eta : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ با $\eta(x_0) = 0$ و $\eta(x_1) = 0$ داشته باشیم $\int_{x_0}^{x_1} g(x)\eta(x) dx = 0$ آن گاه $g \equiv 0$.

علت. اگر این لم درست نباشد $x' \in [x_0, x_1]$ موجود است به طوری که $g(x') \neq 0$. فرض کنید $g(x') > 0$. در این صورت زیر بازه $[x'_1, x'_2]$ از $[x_0, x_1]$ موجود است به طوری که روی آن $g(x) > 0$. حال بگیریم:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & x \in [x_0, x_1] \setminus [x'_1, x'_2] \\ (x - x'_1)^2 (x - x'_2)^2 & x \in [x'_1, x'_2]. \end{cases} \quad (11.7)$$

برای این η که در شرایط بالا صدق می کند داریم:

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x) \eta(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} (x - x'_1)^2 (x - x'_2)^2 g(x) dx.$$

چون $g > 0$ روی $[x'_1, x'_2]$ پس مقدار انتگرال بالا مثبت است، که تناقض است. دلیل مشابه برای $g(x') < 0$ قابل بیان است.

تذکره. توجه کنید اگر در تابع η فوق توان ها را به جای ۲ عدد $2n$ بگیریم در این صورت تابع $\eta(x)$ ، $2n - 1$ بار مشتق پذیر پیوسته است که کلیه مشتقات آن تا مرتبه $2n - 1$ نیز در شرایط مرزی صفر صدق کنند.

اکنون آماده ایم تا ساده ترین مسئله حساب تغییرات را بررسی کنیم.

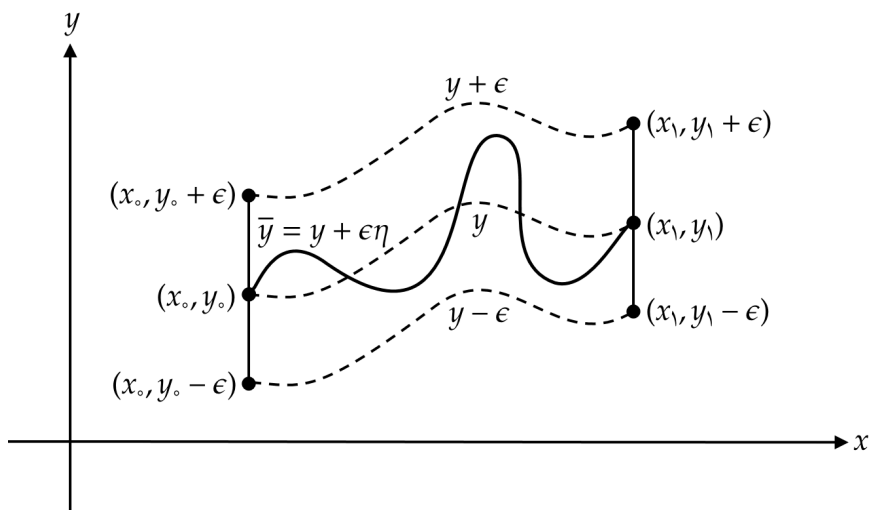
فرض کنید $J : C^2([x_0, x_1]) \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به صورت زیر باشد:

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx \quad (12.7)$$

که در آن f دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته نسبت به x ، y و y' است. همچنین فرض کنید دو مقدار ثابت $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ داده شده است. مسئله حساب تغییرات با نقاط انتهایی ثابت عبارت است از تعیین $y \in C^2([x_0, x_1])$ به طوری که $y(x_0) = y_0$ ، $y(x_1) = y_1$ و J دارای یک مقدار نهایی (ماگزیمم و یا مینیمم) در y باشد.

فرض کنید J در y دارای یک مقدار نهایی مثلاً یک مقدار ماگزیمم است. در این صورت برای هر $\bar{y}$ نزدیک آن که در شرایط مرزی $\bar{y}(x_0) = y_0$ و $\bar{y}(x_1) = y_1$ صدق کند، داریم $J(\bar{y}) \leq J(y)$. حال فرض کنید $\eta(x)$ تابعی با مشتقات مرتبه دوم پیوسته

است که در شرایط $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ صدق می‌کند، داده شده است. در این صورت $\epsilon > 0$ موجود است به طوری که برای $0 \leq |\epsilon| < \epsilon_0$ ، $\bar{y} = y + \epsilon\eta$ نزدیک y است. به شکل ۲.۷ توجه کنید.



شکل ۲.۷

چون تابع f ، y و $\eta(x)$ معین هستند پس

$$I(\epsilon) = J(\bar{y}) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x) + \epsilon\eta(x), y'(x) + \epsilon\eta'(x)) dx$$

فقط تابعی از ϵ است. چون $y(x)$ تابع ماگريمم کننده است پس $I(\epsilon) \leq I(0)$. چون $I(\epsilon)$ مشتق پذیر است پس باید $\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$ یا

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x) + \epsilon\eta(x), y'(x) + \epsilon\eta'(x)) dx \right|_{\epsilon=0} = 0.$$

چون تابع زیر انتگرال نسبت به ϵ دارای مشتق پیوسته و حدود انتگرال ثابت است پس جای مشتق نسبت به ϵ و انتگرال نسبت به x را می‌توان عوض کرد تا به دست آوریم:

$$\left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0.$$

تعریف ۳.۷. عبارت $\int_{x_0}^{x_1} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$ را تغییرات اول J می‌گویند و با $\delta J(\eta, y)$ نشان می‌دهند.

بدین ترتیب برای هر $\eta(x)$ با مشتقات مرتبه دوم پیوسته با دامنه $[x_0, x_1]$ به‌دست می‌آوریم:

$$\delta J(\eta, y) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0. \quad (13.7)$$

توجه کنید استدلال مشابه را برای حالت مینیمم می‌توان به‌کار برد و نتیجه گرفت در این حالت نیز (۱۳.۷) برای هر η فوق‌برقرار است.

برای حذف η' از زیر انتگرال در (۱۳.۷) از انتگرال‌گیری جزء‌جاء به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} dx = \eta \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

که در تساوی اخیر از شرایط مرزی $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ استفاده شده است. با به‌کارگیری این تساوی در (۱۳.۷) به‌دست می‌آوریم:

$$\delta J(\eta, y) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \eta dx = 0. \quad (14.7)$$

چون f نسبت به x ، y و y' دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته و y نیز دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته است پس:

$$E(x) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)$$

تابعی پیوسته است. چون (۱۴.۷) برای کلیه η ‌ها به‌صورت فوق‌برقرار است پس طبق لم دوبویس-ریموند برای هر $x \in [x_0, x_1]$ باید داشته باشیم $E(x) = 0$ یا

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (15.7)$$

بدین ترتیب خاصیت زیر را داریم که در آن $C^2([x_0, x_1])$ فضای برداری توابع دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته با دامنه $[x_0, x_1]$ است.

خاصیت ۲.۷. فرض کنید $J : C^1([x_0, x_1]) \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی به صورت زیر است:

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx \quad (۱۶.۷)$$

همچنین فرض کنید f دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته نسبت به x, y و y' است. اگر y یک مقدار نهایی، ماکزیمم یا مینیمم، برای $J(y)$ باشد، آن گاه y یک جواب مسئله با شرایط مرزی زیر است:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1. \end{cases} \quad (۱۷.۷)$$

تذکره ۱. معادله (۱۵.۷) را معادله اویلر یا معادله اویلر-لاگرانژ می گویند.

۲. هر جواب (۱۷.۷) را یک نقطه بحرانی یا ساکن (۱۲.۷) گویند.

۳. توجه کنید خاصیت بالا یک شرط لازم برای وجود مقدار نهایی را به دست می دهد، لیکن هر جواب (۱۷.۷) ممکن است یک مقدار نهایی برای (۱۲.۷) نباشد.

۴. معادله (۱۷.۷) یک معادله دیفرانسیل عادی از مرتبه دوم است که معمولاً غیر خطی است. در واقع معادله (۱۷.۷) را به صورت زیر داریم:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \right) y'' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y} \right) y' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0. \quad (۱۸.۷)$$

مثال ۴.۷. منحنی هموار $y(x) > 0$ را بین دو نقطه (x_0, y_0) و (x_1, y_1) و $x_0 < x_1$ و $y_0 > 0$ و $y_1 > 0$ را طوری به دست آورید تا سطح رویه حاصل از دوران آن به دور محور x ها حداقل گردد.

حل. مقدار سطح رویه حاصل از دوران تابع $y = y(x)$ ، $x_0 \leq x \leq x_1$ عبارت است از:

$$J(y) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

پس $f(x, y, y') = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}$. در نتیجه معادلهٔ اوایلر-لاگرانژ به صورت زیر است:

$$\sqrt{1 + y'^2} - \frac{d}{dx} \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0.$$

این معادله پس از ساده کردن به صورت زیر در می آید:

$$yy'' - y'^2 - 1 = 0.$$

چون در این معادله غیر خطی مرتبه دوم x به صورت صریح در معادله ظاهر نشده است می گیریم $y' = p$. در این صورت برای y'' به دست می آوریم:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

پس معادله دیفرانسیل بالا بر حسب p و y به صورت زیر در می آید:

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 - 1 = 0.$$

این معادله مرتبه اول با تفکیک متغیرها قابل حل است.

$$\frac{pdp}{1 + p^2} = \frac{dy}{y} \implies \ln(1 + p^2) = 2 \ln(y) + \ln(c_1^2)$$

یا

$$1 + y'^2 = y^2 c_1^2 \implies \frac{dy}{dx} = (y^2 c_1^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

حال بگیریم $c_1 y = \cosh(u)$. در این صورت $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{c_1} \sinh(u) \frac{du}{dx}$. بدین ترتیب به دست می آوریم $c_1 = \frac{du}{dx}$ یا $u = c_1 x + c_2$. در نتیجه

$$y = \frac{1}{c_1} \cosh(c_1 x + c_2).$$

برای این که شرایط مرزی $y(x_0) = y_0$ و $y(x_1) = y_1$ برقرار باشد بایستی داشته باشیم:

$$y_0 = \frac{1}{c_1} \cosh(c_1 x_0 + c_2), \quad y_1 = \frac{1}{c_1} \cosh(c_1 x_1 + c_2).$$

از حل این دو معادله دو مجهول جبری مقادیر c_1 و c_2 بر حسب مقادیر x_0, x_1 ، y_0 و y_1 قابل تعیین است. برای حالت $x_1 = -x_0$ و $y_1 = y_0$ جواب عبارتست از

$$y = \frac{y_0}{\cosh(x_0)} \cosh(x)$$

مثال ۵.۷ (مسئله دیدو). منحنی $y(x) > 0$ را بین دو نقطه $(-1, 0)$ و $(1, 0)$ طوری انتخاب کنید تا طول آن برابر π و مساحت زیر آن ماگزیمم باشد.

حل. مقدار مساحت برای هر منحنی $y(x) > 0$ و طول این منحنی عبارتست از:

$$I(y) = \int_{-1}^1 y \, dx, \quad J(y) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + y'^2} \, dx = \pi$$

همچنین شرایط مرزی عبارتست از $y(-1) = y(1) = 0$. چنانچه y را تابعی از s ، طول قوس، و تغییر متغیر x به s را بدهیم با توجه به تساوی $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ به دست می آوریم:

$$dx = \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} ds.$$

در نتیجه:

$$I(y) = \int_0^\pi y \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} ds, \quad J(y) = \int_0^\pi ds = \pi.$$

بدین ترتیب مسئله مقید بالا برای متغیر مستقل x به مسئله بی قید برای متغیر مستقل s زیر تبدیل می گردد:

$$I(y) = \int_0^\pi y \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} ds, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = \pi.$$

برای این مسئله، مسئله اویلر-لاگرانژ را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$1 - \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0, \quad y(-1) = y(1) = 0.$$

که در آن $\frac{d}{ds} = 0$ است. حال بگیریم $p = \dot{y}$. در این صورت معادله بالا به صورت زیر در می آید:

$$1 - p^2 + yp \frac{dp}{dy} = 0 \implies \frac{-p dp}{1 - p^2} = \frac{dy}{y} \implies \ln(1 - p^2) = 2 \ln(cy) \\ \implies y' = \sqrt{1 - (cy)^2}.$$

با گرفتن $cy = \sin(u)$ به دست می آوریم $du = cds$ یا $u = cs + c'$. لذا $cy = \sin(cs + c')$ همچنین از

$$dx = \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} ds$$

به دست می آوریم $dx = \sin(cs + c')ds$ یا $c(x - x_0) = \cos(cs + c')$. در نتیجه $\frac{1}{c^2} = (x - x_0)^2 + y^2$. با اعمال شرایط مرزی به دست می آوریم $x_0 = 0$, $c = 1$ و $y = \sqrt{1 - x^2}$.

تذکره. از این به بعد برای سادگی به جای بیان مسئله حساب تغییرات اغلب اوقات می گوئیم مسئله تغییراتی.

معادله اوایلر-لاگرانژ یک معادله دیفرانسیل از مرتبه دوم همراه با شرایط مرزی است. حل غیر خطی این گونه معادلات معمولاً بسیار پیچیده است و روش حل کلی برای آنها موجود نیست. لیکن حالات خاصی از این گونه معادلات وجود دارند که حل آنها به سادگی صورت می گیرد. در زیر روش های حل این نوع معادلات خاص را خواهیم دید.

حالت ۱: فرض کنید y به صورت صریح در $J(y)$ ظاهر نشده باشد، یعنی:

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y') dx.$$

توجه کنید y به صورت صریح در f ظاهر نشده است. در این حالت معادله اوایلر-لاگرانژ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = c_1 \quad (19.7)$$

که در آن c_1 ثابت انتگرال گیری است. این معادله یک معادله دیفرانسیل عادی مرتبه اول برای y است.

می دانیم اگر $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \neq 0$ ، طبق قضیه تابع ضمنی معادله (۱۹.۷) برای y' قابل حل است. بدین ترتیب به دست می آوریم $y' = g(x, c_1)$. با انتگرال گیری از آن y قابل حصول است.

مثال ۶.۷. منحنی هموار $y = y(x)$ با دو نقطه انتهایی $(1, 5)$ و $(5, 0)$ در ربع اول صفحه مختصات طوری تعیین کنید تا رویه حاصل از دوران آن به دور محور y ها دارای حداقل سطح ممکن باشد.

حل. برای منحنی $y(x)$ مقدار مساحت رویه برابر است با:

$$J(y) = 2\pi \int_1^5 x \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad y(1) = 5, \quad y(5) = 0.$$

تابع زیر انتگرال فاقد y است. پس:

$$\frac{\partial}{\partial y'} (x \sqrt{1 + y'^2}) = c_1.$$

در نتیجه $c_1 = \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}$ و یا $y' = \frac{c_1}{\sqrt{x^2 - c_1^2}}$. بگیرید $x = c_1 \cosh(u)$ در این صورت $dx = c_1 \sinh(u) du$

$$y = \int \frac{c_1}{\sqrt{x^2 - c_1^2}} dx = \int c_1 du = c_1 u + c_2.$$

بدین ترتیب به دست می آوریم:

$$y = c_1 \cosh^{-1} \left(\frac{x}{c_1} \right) + c_2.$$

از قرار دادن شرایط مرزی در این دسته از جوابها به دست می آوریم:

$$5 = c_1 \cosh^{-1} \left(\frac{1}{c_1} \right) + c_2, \quad 0 = c_1 \cosh^{-1} \left(\frac{5}{c_1} \right) + c_2.$$

از حل این دو معادله برای c_1 و c_2 جواب مطلوب حاصل می گردد.

حالت ۲: متغیر x به صورت صریح در $J(y)$ در ظاهر نشده است.

در حالتی که تابع زیر انتگرال یعنی f فاقد x است یا x به طور صریح در آن ظاهر نشده است معادله اویلر-لاگرانژ به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می گردد. در این مورد خاصیت زیر را داریم.

خاصیت ۳.۷. فرض کنید در f ، متغیر x ظاهر نشده است یعنی:

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(y, y') dx.$$

در این صورت معادله اولر-لاگرانژ معادل معادله زیر است:

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C.$$

که در آن C مقداری ثابت است.

علت. فرض کنید $y = y(x)$ تابع $J(y)$ را نهایی کند. در این صورت

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right) &= y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \left(y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \\ &= y' \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

چون $y(x)$ یک تابع نهایی کننده $J(y)$ است. پس در معادله اوایلر-لاگرانژ صدق می کند
یعنی مقدار اخیر در تساوی بالا برابر صفر است یعنی:

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C.$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول فاقد x است.

مثال ۷.۷. مطلوبست حل مسئله رویه مینیمم حاصل از دوران منحنی $y = f(x)$ از نقطه‌ی (x_0, y_0) تا نقطه (x_1, y_1) حول محور x ها.

حل. در مثال ۴.۷ برای این مسئله تابع زیر را به دست آوردیم و برای تابع $y(x)$ مینیمم کننده آن منحنی زنجیر به دست آمد.

$$J(y) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

چون تابع زیر انتگرال فاقد x است پس از نتیجه بالا می توان استفاده کرد.

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = y' \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} - y \sqrt{1 + y'^2} = \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

پس در امتداد یک منحنی نهایی کننده داریم:

$$\frac{y^2}{1+y'^2} = c_1^2 \implies y' = \sqrt{\frac{y^2}{c_1^2} - 1}.$$

پس منحنی نهایی کننده عبارتست از $y = c_1 \cosh\left(\frac{x-c_2}{c_1}\right)$. ثابت‌های c_1 و c_2 با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند.

مثال ۸.۷. مطلوبست حل مسئله سرسره که آن را مسئله برنولی نیز می‌گویند.

حل. در بخش ۱.۷ در فرمول ۷.۷ مدت زمان لازم را برای طی طول مسیر سرسره به صورت تابع زیر به دست آوردیم:

$$T(y) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}} dx.$$

که در آن $y = y(x)$ در نیم صفحه بالایی دستگاه مختصات (x, y) با شرایط مرزی $y(x_0) = y_0$ و $y(x_1) = y_1$ واقع است. برای سادگی بگیرد $z = y_0 - y$ ، در این صورت z می‌بایستی تابع زیر را مینیمم نماید:

$$J(z) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+z'^2}}{z} dx.$$

چون تابع زیر انتگرال به x وابسته نیست، پس طبق خاصیت بالا باید

$$z' \frac{\partial f}{\partial z'} - f = \frac{z'^2}{\sqrt{z(1+z'^2)}} - \sqrt{\frac{1+z'^2}{z}} = \frac{1}{\sqrt{z(1+z'^2)}}$$

در امتداد هر منحنی نهایی کننده $J(z)$ برابر مقداری ثابت باشد. پس در امتداد منحنی مینیمم کننده $z = z(x)$ باید داشته باشیم:

$$z(1+z'^2) = c_1.$$

که در آن c_1 مقداری ثابت است. بدین ترتیب به دست می‌آوریم:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{c_1}{z} - 1}} = x + c_2.$$

حال بگیریم:

$$\frac{c_1}{z} = \frac{1}{\cos^2(t)}$$

و یا

$$z = c_1 \cos^2(t).$$

در این صورت $dz = -2c_1 \cos(t) \sin(t) dt$. پس:

$$\begin{aligned} x + c_2 &= \int \frac{-2c_1 \cos(t) \sin(t)}{\frac{\sin(t)}{\cos(t)}} dt = -c_1 \int 2 \cos^2(t) dt \\ &= -c_1 \int (1 + \cos 2t) dt \end{aligned}$$

یا

$$x + c_2 = -c_1 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right)$$

یا

$$x + c_2 = -c_1 \left(\cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{z}{c_1}} \right) + \frac{z}{c_1} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{c_1} \right)^2} \right).$$

در این صورت به دست می آوریم:

$$x + c_2 = -c_1 \left(\cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{y_0 - y}{c_1}} \right) + \frac{y_0 - y}{c_1} \sqrt{1 - \left(\frac{y_0 - y}{c_1} \right)^2} \right).$$

با اعمال شرایط مرزی $y(x_0) = y_0$ و $y(x_1) = y_1$ مقادیر c_1 و c_2 به دست می آیند.

تمرین ۲.۷

۱. منحنی $y(x) > 0$ را بین دو نقطه $(1, 5)$ و $(5, 1)$ طوری تعیین کنید تا رویه حاصل از دوران آن حول محور y ها دارای رویه مینیمم گردد.

۲. بگیریید $J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y'^2 + 4ye^x) dx$ با شرایط مرزی $y(0) = 0$ و $y(1) = 1$ مقادیر نهایی J را در $C^2([0, 1])$ پیدا کنید.

۳. نشان دهید تابع $J(y) = \int_{-1}^1 x^4 y'^2 dx$ در $C^2([-1, 1])$ با شرایط مرزی $y(-1) = -1$ و $y(1) = 1$ فاقد مقدار نهایی است.

۴. منحنی هموار $y = y(x)$ با دو نقطه انتهایی $(0, 5)$ و $(5, 0)$ در ربع اول صفحه مختصات طوری انتخاب کنید تا سطح روبه حاصل از دوران آن به دور نیمساز ربع دوم و چهارم مینیمم باشد.

۵. جواب عمومی معادله اویلر-لاگرانژ را برای تابع $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \sqrt{1 + y'^2} dx$ بیابید.

۶. مقادیر نهایی را برای تابع $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'^2}{x^3} dx$ همراه با $x_1 > x_0 > 0$ و $y(x_0) = y_0$ و $y(x_1) = y_1$ بیابید.

۷. منحنی هموار $y = y(x)$ را طوری بیابید تا در شرط مرزی $y(2) = 1$ و $y(3) = \sqrt{3}$ صدق کند و تابع $J(y) = \int_2^3 y^2 (1 - y')^2 dx$ را نهایی کند.

۸. اگر $C(x, y)$ سرعت نور در یک سیال باشد با استفاده از اصل فرما نشان دهید برای طی فاصله دو نقطه (x_0, y_0) و (x_1, y_1) نور مسیری را طی می کند که تابع زیر را مینیمم نماید.

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{C(x, y)} dx$$

الف: مطلوبست تعیین مسیر بین دو نقطه $(0, 5)$ و $(5, 1)$ برای $C(x, y) = x$.

ب: مطلوبست تعیین مسیر بین دو نقطه مذکور برای $C(x, y) = y$.

۹. منحنی $y = y(x)$ را بین دو نقطه انتهایی $(0, 0)$ و $(1, 1)$ طوری تعیین کنید تا تابع

زیر را نهایی کند.

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 - 2yy' - 2y') dx$$

۱۰. منحنی $y = y(x)$ را بین دو نقطه انتهایی $(0, 0)$ و $(1, 1)$ طوری تعیین کنید تا تابع زیر را نهایی کند.

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + xy' + x^2) dx$$

۳.۷ چند تعمیم از ساده‌ترین مسئله حساب تغییرات

در بخش گذشته مسئله حساب تغییرات را در ساده‌ترین حالت یعنی وقتی تابع زیر انتگرال فقط تابعی از x ، y و y' است، دیدیم. در این بخش این مسئله را از چند جهت تعمیم می‌دهیم.

الف: تابع‌های حاوی مشتقات مرتبه بالاتر

در یک مسئله حساب تغییرات ممکن است در تابع زیر انتگرال تابع حساب تغییرات مشتقات مرتبه دوم و بالاتر ظاهر شده باشد. خواهیم دید با بحث مشابه با آن چه در فصل گذشته به کار رفته به معادله اویلر-لاگرانژ تعمیم یافته‌ای برای این گونه مسائل دست خواهیم یافت. برای این منظور تابع زیر را که فقط به مشتق مرتبه اول و دوم تابع مجهول وابسته است در نظر بگیرید.

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'') dx. \quad (20.7)$$

همچنین فرض کنید شرایط مرزی ثابت زیر بر روی تابع مجهول اعمال شده است.

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y'_1. \quad (21.7)$$

در این جا فرض می‌کنیم f نسبت به x ، y ، y' و y'' دارای مشتقات مرتبه سوم پیوسته است.

حال فرض کنید J در $C^{\mathfrak{f}}([x_0, x_1])$ دارای یک مقدار نهایی است. برای $\eta \in C^{\mathfrak{f}}([x_0, x_1])$ معین و شرایط مرزی همگن $\eta(x_0) = \eta(x_1) = \eta'(x_0) = \eta'(x_1) = 0$ و ϵ کوچک، $\hat{y} = y + \epsilon\eta$ را در نظر بگیرید، در این صورت $J(\hat{y})$ فقط تابعی از ϵ است. یعنی داریم:

$$I(\epsilon) = J(\hat{y}) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta', y'' + \epsilon\eta'') dx.$$

اگر J در y دارای یک مقدار مینیمم باشد در این صورت $I(\epsilon) \geq I(0)$. چون $I(\epsilon)$ دارای مشتق مرتبه اول پیوسته است، پس باید $\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$ باشد. لیکن

$$\begin{aligned} \left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ f_y(x, y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta', y'' + \epsilon\eta'')\eta \right. \\ &\quad + f_{y'}(x, y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta', y'' + \epsilon\eta'')\eta' \\ &\quad \left. + f_{y''}(x, y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta', y'' + \epsilon\eta'')\eta'' \right\} dx \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (f_y\eta + f_{y'}\eta' + f_{y''}\eta'') dx = \delta J(\eta, y). \end{aligned}$$

همانند دلیل خاصیت ۲.۷، با استفاده از انتگرال گیری جزیه جزء می‌توان مشتقات را از روی η بر روی $f_{y''}$ و $f_{y'}$ انتقال داد. چون شرایط مرزی η برابر صفر است، با این کار به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \eta'' f_{y''} dx &= \eta' f_{y''} \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta' \frac{d}{dx} f_{y''} dx \\ &= -\eta \frac{d}{dx} f_{y''} \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} dx = \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} dx. \end{aligned}$$

به‌طور مشابه

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta f_{y'} dx = \eta f_{y'} \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx} f_{y'} dx = - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx} f_{y'} dx.$$

در این جا از پیوستگی توابع f و مشتقاتش و همچنین از شرایط مرزی η ، یعنی:

$$\eta(x_0) = \eta'(x_0) = \eta(x_1) = \eta'(x_1) = 0$$

استفاده شده است. از قرار دادن جملات بالا در $\delta(J, \eta)$ به دست می آوریم:

$$\delta J(\eta, y) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d^2}{dx^2} f_{y''} - \frac{d}{dx} f_{y'} + f_y \right) \eta dx.$$

چون y یک تابع مینیمم کننده است، پس $I(\epsilon)$ در نقطه $\epsilon = 0$ دارای مینیمم است، پس $\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$ برای تمام η به صورت فوق می بایستی برقرار باشد. بنابراین طبق خاصیت ۱.۷، یعنی لم دوبویس-ریموند می بایستی داشته باشیم:

$$\frac{d^2}{dx^2} f_{y''} - \frac{d}{dx} f_{y'} + f_y = 0. \quad (22.7)$$

بدین ترتیب معادله دیفرانسیل بالا به عنوان یک شرط لازم برای این که تابع y یک تابع نهایی کننده موضعی تابع J باشد به دست آمد. یعنی خاصیت زیر را داریم.

خاصیت ۴.۷. اگر در تابع (۲۰.۷) تابع f نسبت به x, y, y' و y'' دارای مشتقات مرتبه سوم پیوسته و تابع با مشتقات مرتبه چهارم پیوسته y تابع $J(y)$ را همراه با شرایط مرزی (۲۱.۷) نهایی کند، آن گاه y یک جواب معادله دیفرانسیل عادی از مرتبه چهارم (۲۲.۷) است که در شرایط مرزی (۲۱.۷) صدق می نماید.

تذکره ۱. توجه کنید خاصیت بالا یک شرط لازم را برای وجود جواب مسئله تغییرات (۲۰.۷) و (۲۱.۷) به دست می دهد.

۲. مسئله معادله دیفرانسیل (۲۲.۷) همراه با شرایط مرزی (۲۱.۷) ممکن است فاقد جواب، دارای یک جواب و یا دارای بیش از یک جواب باشد.

۳. معادله (۲۲.۷) را معادله اوایلر-لاگرانژ و این معادله را با شرایط مرزی (۲۱.۷) مسئله اوایلر-لاگرانژ وابسته به مسئله حساب تغییرات (۲۰.۷) و (۲۱.۷) گویند.

مثال ۹.۷. تابع $y(x)$ را روی بازه $[0, 1]$ طوری بیابید تا تابع زیر را نهایی کند و در شرایط مرزی $y(0) = y'(0) = 0$ و $y(1) = y'(1) = 1$ صدق نماید. در این تابع p عددی ثابت است.

$$J(y) = \int_0^1 (y''^2 - 2py) dx$$

حل. معادله اویلر-لاگرانژ را برای این تابع به صورت $y^{(4)} = p$ به دست می‌آوریم که دارای جواب عمومی

$$y(x) = \frac{p}{4!}x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$$

است. از شرایط مرزی $y(0) = 0$ و $y'(0) = 0$ به دست می‌آوریم $c_3 = c_4 = 0$. از اعمال شرایط مرزی $y(1) = 1$ و $y'(1) = 1$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{p}{3!} + 3c_1 + 3c_2 = 1, \quad \frac{p}{4!} + c_1 + c_2 = 1.$$

پس $c_1 = -1 - \frac{1}{12}p$ و $c_2 = 2 + \frac{1}{24}p$ و جواب نهایی عبارت است از

$$y(x) = \frac{p}{24}x^4 - \left(1 + \frac{p}{12}\right)x^3 + \left(2 + \frac{p}{24}\right)x^2.$$

تذکره. در مواردی خاص معادله اویلر-لاگرانژ (۲۲.۷) صورت ساده‌ای پیدا می‌کند. بعضی از این موارد را در زیر می‌آوریم:

(۱) اگر در تابع زیر انتگرال، تابع $J(y)$ خود y به صورت صریح ظاهر نشده باشد در این صورت (۲۲.۷) به صورت زیر در می‌آید که در آن c_1 ثابت است.

$$\frac{d}{dx}f_{y''} - f_{y'} = c_1$$

(۲) اگر در تابع مذکور x به طور صریح ظاهر نشده باشد، در این حالت معادله اویلر-لاگرانژ به صورت زیر ساده می‌گردد که در آن c_1 ثابت انتگرال‌گیری است.

$$H(y, y', y'') = y''f_{y''} - y' \left(\frac{d}{dx}f_{y''} - f_{y'} \right) - f = c_1.$$

کافی است نشان دهید مشتق این عبارت با توجه به معادله اولر-لاگرانژ برابر صفر است.

مثال ۱۰.۷. تابع $\int_{x_0}^{x_1} \frac{(1+y'^2)^2}{y''} dx$ را تحت شرایط مرزی $y(x_1) = y'(x_1) = 1$ و $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ نهایی کنید.

حل. چون تابع زیر انتگرال فاقد y است، پس طبق بند (۱) تذکر بالا

$$\frac{d}{dx} f_{y''} - f_{y'} = c_1.$$

با به کارگیری این تساوی، در بند (۲) تذکر بالا به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} y'' f_{y''} - y' \left(\frac{d}{dx} f_{y''} - f_{y'} \right) - f &= y'' f_{y''} - y' c_1 - f \\ &= -2 \frac{(1+y'^2)^2}{y''} - y' c_1 = c_2. \end{aligned}$$

این تساوی را به صورت زیر می توان نوشت که در آن R_1 و R_2 مقادیری ثابت اند:

$$y'' \frac{R_1 y' + R_2}{(1+y'^2)^2} = 1.$$

برای حل این معادله دیفرانسیل مرتبه دوم تغییر تابع مجهول $y' = \tan \psi$ را می دهیم. در این صورت $y'' = \psi' \sec^2 \psi$ و معادله بالا می شود:

$$\psi' \sec^2(\psi) \frac{R_1 \tan \psi + R_2}{(1 + \tan^2 \psi)^2} = 1.$$

یا

$$(R_1 \cos \psi \sin \psi + R_2 \cos^2 \psi) \psi' = 1.$$

با انتگرال گیری از طرفین این تساوی به دست می آوریم:

$$x = R_3 + \frac{R_1}{4} (-\cos^2 \psi) + \frac{R_2}{4} \left(\psi + \frac{1}{4} \sin^2 \psi \right)$$

که در آن R_3 یک ثابت انتگرال است. با تغییر مجدد ثابت ها به صورت $R_1 = 4k_1$ ، $R_2 = 4k_2$ و $R_3 = k_3 + \frac{R_1}{4}$ به دست می آوریم:

$$x = k_3 + 2k_2 \psi + k_2 \sin^2 \psi - k_1 \cos^2 \psi.$$

همچنین برای y به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} dy &= \tan \psi \, dx = [2k_2(1 + \cos 2\psi) + 2k_1 \sin 2\psi] \tan \psi \, d\psi \\ &= [2k_1 + 2k_2 \sin 2\psi - 2k_1 \cos 2\psi] d\psi. \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری از تساوی بالا به‌دست می‌آوریم:

$$y = k_4 + 2k_1\psi - k_2 \cos 2\psi + k_1 \sin 2\psi$$

که در آن k_4 نیز ثابت انتگرال‌گیری است. بدین ترتیب جواب عمومی معادله دیفرانسیل اویلر-لاگرانژ به‌صورت پارامتری بالا برای x و y با پارامتر ψ به‌دست می‌آید. با اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آوریم $y'(x_0) = \tan \psi_0 = y'(x_1) = \tan \psi_1 = 1$. پس $\psi_0 = \frac{\pi}{4}$ و $\psi_1 = \frac{\pi}{4}$ و

$$\begin{aligned} x_0 &= k_3 - k_1, & x_1 &= k_3 - \frac{\pi}{4}k_2 + k_2 \\ k_4 - k_2 &= 0, & 1 &= k_4 - \frac{\pi}{4}k_1 + k_1. \end{aligned}$$

از حل این دستگاه چهار معادله چهار مجهولی خطی ثابت‌های k_1 تا k_4 به‌دست می‌آیند.

قابل توجه است که خاصیت (۴.۷) برای مشتقات از مرتبه دو بالاتر به‌صورت مشابه است در واقع در این مورد خاصیت زیر قابل بیان است.

خاصیت ۵.۷. فرض کنید تابع f در تابعک زیر دارای مشتقات پیوسته از مرتبه $2n$ است.

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \, dx$$

اگر تابع $y(x)$ دارای مشتقات مرتبه $2n$ ام پیوسته باشد، تابعک بالا را همراه با شرایط مرزی $y^{(k)}(x_i) = y_{ik}$ ، $i = 0, 1$ و $0 \leq k \leq n$ ، نهایی کند، آن‌گاه این تابع $y(x)$ یک جواب مسئله با شرایط مرزی معادله دیفرانسیل از مرتبه $2n$ زیر است:

$$\begin{cases} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f_{y^{(n-1)}} + \dots - \frac{d}{dx} f_{y'} + f_y = 0 \\ y^{(k)}(x_0) = y_{0k}, \quad y^{(k)}(x_1) = y_{1k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

علت. شبیه علت خاصیت (۴.۷) است فقط به جای دوبار انتگرال گیری جزبه جزء باید n بار انتگرال جزبه جزء بگیرید.

ب: تابع‌ها با چند تابع مجهول

بعضی از مسائل تغییراتی حاوی تابع‌هایی هستند که به چند تابع مجهول وابسته‌اند. به عنوان مثال در مکانیک کلاسیک حرکت یک ذره در فضا به سه متغیر مکان x , y و z وابسته است، تا موقعیت یک ذره را در فضا مشخص نماید. هدف از این قسمت به دست آوردن معادله اوایلر-لاگرانژ برای این گونه مسائل تغییراتی است که تابع‌ها به چند متغیر مستقل وابسته‌اند. فرض کنید برای $1 \leq i \leq n$, $y_i \in C^2([x_0, x_1])$, n تابع حقیقی است. تابع

$$J(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx \quad (23.7)$$

همراه با زوج شرایط مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$y_i(x_0) = y_{i0}, \quad y_i(x_1) = y_{i1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (24.7)$$

هدف تعیین $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in C^2([x_0, x_1])$ است که تابع بالا را تحت شرایط مرزی بالا نهایی کند. در این جا $C^2([x_0, x_1])$ فضای برداری کلیه توابع برداری $y : C^2([x_0, x_1]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ است. فرض کنید $y \in C^2([x_0, x_1])$, اگر $J(y) = J(y_1, y_2, \dots, y_n)$ را مینیمم کند.

$$\eta(x) = (\eta_1(x), \eta_2(x), \dots, \eta_n(x)) \in C^2([x_0, x_1])$$

با شرایط مرزی $\eta_i(x_0) = \eta_i(x_1) = 0$, $1 \leq i \leq n$, داده شده باشد در این صورت برای $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \mathbb{R}^n$ و $|\epsilon_i|$ های کوچک باید داشته باشیم:

$$I(\epsilon) = I(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1 + \epsilon_1 \eta_1, \dots, y_n + \epsilon_n \eta_n) dx \geq I(0).$$

فرض کنید f دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته نسبت به کلیه متغیرهای x, y_1 تا y_n و y'_1 تا y'_n است. در این صورت باید داشته باشیم:

$$\left. \frac{\partial I}{\partial \epsilon_i} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} \int_{x_0}^{x_1} f dx \right|_{\epsilon_i=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left. \frac{\partial f}{\partial \epsilon_i} \right|_{\epsilon=0} dx = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

چون

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \epsilon_i} \right|_{\epsilon=0} = \frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \eta'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

پس باید داشته باشیم:

$$\delta J_i(\eta, y) = \left. \frac{\partial I}{\partial \epsilon_i} \right|_{\epsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \eta'_i \right) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء و به کار بردن شرایط مرزی روی η به دست می‌آوریم:

$$\delta J_i(\eta, y) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \eta_i dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

چون برای هر $\eta_i \in C^2([x_0, x_1])$ برقرار است. پس طبق لم دوبویس-ریموند باید داشته باشیم:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (25.7)$$

به این ترتیب خاصیت زیر را اثبات نمودیم.

خاصیت ۶.۷. فرض کنید تابع f در تابعک (۲۳.۷) دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته نسبت به x, y_1 تا y_n و y'_1 تا y'_n باشد. همپنین تابع $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ تابع $J(y_1, \dots, y_n)$ را در (۲۳.۷) همراه با شرایط مرزی (۲۴.۷) نهایی کند. آن گاه توابع $y_1(x)$ تا $y_n(x)$ جواب دستگاه (۲۵.۷) است و در شرایط مرزی (۲۴.۷) صدق می‌نماید.

مثال ۱۱.۷. تابع $J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1' + (y_2' - 1)^2 + y_1^2 + 2\sqrt{2}y_1y_2) dx$ را تحت شرایط مرزی $y_i(\frac{\pi}{2}) = y_{i1}$ و $y_i(0) = y_{i0}$ ، $i = 1, 2$ ، نهایی کنید.

حل. معادلات اویلر-لاگرانژ منطبق بر این تابع عبارتست از:

$$y_1'' - y_1 - \sqrt{2}y_2 = 0$$

$$y_2'' - \sqrt{2}y_1 = 0.$$

با حذف y_2 بین این دو معادله به دست می آوریم:

$$y_1^{(4)} - y_1'' - 2y_1 = 0.$$

این معادله دارای معادله مشخصه $r^4 - r^2 - 2 = 0$ با $r^2 = 2, -1$ یا $r = \pm i, \pm\sqrt{2}$ است. پس جواب عمومی آن عبارتست از:

$$y_1 = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cosh \sqrt{2}x + c_4 \sinh \sqrt{2}x$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2c_1 \cos x - 2c_2 \sin x + c_3 \cosh \sqrt{2}x + c_4 \sinh \sqrt{2}x).$$

همچنین:

$$y_1(0) = c_1 + c_3 = y_{10}$$

$$y_2(0) = -2c_1 + c_3 = \sqrt{2}y_{20}$$

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_2 + c_3 \cosh \frac{\pi}{\sqrt{2}} + c_4 \sinh \frac{\pi}{\sqrt{2}} = y_{11}$$

$$y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2c_2 + c_3 \cosh \frac{\pi}{\sqrt{2}} + c_4 \sinh \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}y_{21}.$$

از حل این چهار معادله چهار مجهول به دست می آوریم:

$$c_1 = \frac{1}{3}(y_{10} - \sqrt{2}y_{20})$$

$$c_2 = \frac{1}{3}(y_{11} + \sqrt{2}y_{21})$$

$$c_3 = \frac{1}{3}(2y_{10} - \sqrt{2}y_{20})$$

$$c_4 = \frac{1}{2 \sinh \frac{\pi}{\sqrt{2}}} \left[y_{11} + \sqrt{2}y_{21} - \frac{1}{3}(y_{10} - \sqrt{2}y_{20}) \cosh \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right].$$

یک کاربرد خاصیت فوق در بررسی حرکت اجسام در فضای سه‌بعدی است. این مطلب را با جزییات بیشتر در اینجا می‌آوریم. اگر $q(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t)) = (x(t), y(t), z(t))$ موقعیت حرکت یک ذره را در فضای سه بعدی نشان دهد در این صورت

$$T(q, q') = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i^2$$

انرژی جنبشی این ذره و $V(t, q)$ انرژی پتانسیل آن باشد. در این صورت عبارت

$$L(t, q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(t, q) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(t, q)$$

را تابع حرکت لاگرانژ گویند. اصل هامیلتون می‌گویند مسیر حرکت ذره طوری است که تابع

$$J(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt$$

نهایی گردد. معادلات اوایلر-لاگرانژ (۲۵.۷)، معادلات حرکت لاگرانژ ذره را به صورت زیر به دست می‌دهد:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

به عبارت دیگر

$$m\ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

از طرف دیگر نیرویی که در اثر میدان پتانسیل بر ذره وارد می‌شود عبارتست از $f_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$. بدین ترتیب معادلات حرکت لاگرانژ معادله حرکت نیوتن یعنی $f = ma$ را نتیجه می‌دهد که در آن $a = \ddot{q}$ و $f = (f_1, f_2, f_3)$ به ترتیب شتاب و نیروی وارد شده به ذره است.

تذکره. اصل هامیلتون بیانگر این واقعیت است که حرکت هر سیستم دینامیکی با شرایط مرزی به گونه‌ای هماهنگ است که انتگرال تغییرات انرژی جنبشی سیستم و کار

مجازی انجام شده توسط کلیه نیروهای خارجی بر روی سیستم در هر فاصله زمانی $[t_0, t_1]$ برابر صفر است.

مثال ۱۲.۷. فرض کنید ذره‌ای در صفحه (y, z) در حرکت است و تحت تاثیر انرژی پتانسیل $V(y, z) = -yz$ قرار دارد. مسیر حرکت این ذره را روی بازه $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ با شرایط مرزی $y(0) = 0, z(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, z\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ بیابید.

حل. با توجه به اصل هامیلتون تابع زیر می‌بایستی نهایی گردد.

$$J(y, z) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dt.$$

معادلات اویلر-لاگرانژ برای این تابع به صورت زیر است:

$$y'' - z = 0, \quad z'' - y = 0.$$

با حذف z بین این دو معادله به دست می‌آوریم $y^{(4)} - y = 0$ ، که دارای جواب عمومی زیر است:

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cosh t + c_4 \sinh t$$

$$z = -c_1 \cos t - c_2 \sin t + c_3 \cosh t + c_4 \sinh t.$$

برای برقراری شرایط مرزی در $t = 0$ باید داشته باشیم:

$$y(0) = c_1 + c_3 = 0, \quad z(0) = -c_1 + c_3 = 0$$

پس $c_1 = c_3 = 0$. برای برقراری شرایط مرزی در $t = \frac{\pi}{4}$ باید داشته باشیم:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = c_2 + c_4 \sinh \frac{\pi}{4} = 1, \quad z\left(\frac{\pi}{4}\right) = -c_2 + c_4 \sinh \frac{\pi}{4} = -1$$

پس باید $c_4 = 0$ و $c_2 = 1$ باشد. بدین ترتیب مسیر حرکت به صورت پارامتری عبارتست از،

$$y = \sin t, \quad z = -\sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

مثال ۱۳.۷. با استفاده از فرمول انتگرالی طول منحنی نشان دهید که کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه از فضا خط مستقیم است.

حل. فرض کنید $y = y(x)$ و $z = z(x)$ ، $x_0 \leq x \leq x_1$ ، منحنی جواب باشد. این منحنی باید تابع

$$J(y, z) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

را مینیمم نماید. پس باید این منحنی جواب معادلات زیر باشد:

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0, \quad \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0.$$

پس باید $y' = Az'$ برای ثابتی مانند A باشد. یا $\frac{z'}{\sqrt{1 + (1+A^2)z'^2}} = c$. پس $z' = c_1$ و $y' = c_2$ یا $y' = c_1$ یا $z = c_1x + c'_1$ و $y = c_2x + c'_2$. یعنی منحنی مطلوب یک خط مستقیم است.

ج: تابع‌ها با دو متغیره مستقل

اکنون مسائل تغییراتی را برای تابع‌هایی که تابع زیر انتگرال به یک متغیر وابسته و دو متغیر مستقل بستگی دارد مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در این صورت انتگرال در تابع دوگانه است. فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ یک مجموعه باز و همبند ساده و کرانه‌دار با مرز هموار $\partial\Omega$ و $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ بستار آن است. فرض کنید $C^2(\bar{\Omega})$ مجموعه تمام توابع مانند $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ است که دارای مشتقات پیوسته در Ω است و این مشتقات و خود تابع به‌طور پیوسته روی $\bar{\Omega}$ تعریف شده‌اند. حال تابع $J : C^2(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$J(u) = \iint_{\Omega} f(x, y, u, u_x, u_y) dx dy. \quad (۲۶.۷)$$

در این جا فرض بر این است که f دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته نسبت به x, y, u, u_x, u_y است. مسئله تغییراتی برای تابع بالا عبارت از تعیین تابع $u \in C^2(\bar{\Omega})$ است که

در شرط مرزی

$$u(x, y) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (27.7)$$

صدق کند و $J(u)$ را نهایی کند. تابع $u_0(x, y)$ روی $\partial\Omega$ تعریف شده و پیوسته است. برای تعیین این جواب نهایی کننده فرض کنید $u = u(x, y)$ جواب مسئله باشد، یعنی $J(u)$ را نهایی کند و در شرایط مرزی بالا صدق نماید. فرض کنید $\eta \in C^2(\overline{\Omega})$ و در شرایط مرزی صفر صدق کند. یعنی روی $\partial\Omega$ داریم $\eta(x, y) \equiv 0$. فرض کنید $\eta(x, y)$ داده شده باشد در این صورت برای $\epsilon \in \mathbb{R}$ با $|\epsilon|$ کوچک تابع

$$\hat{u}(x, y) = u(x, y) + \epsilon \eta(x, y)$$

در نزدیکی $u(x, y)$ قرار دارد. اگر $u(x, y)$ تابع $J(u)$ را با شرایط مرزی بالا مینیمم کند در این صورت برای $|\epsilon|$ کوچک باید داشته باشیم:

$$I(\epsilon) = \iint_{\overline{\Omega}} f(x, y, \hat{u}, \hat{u}_x, \hat{u}_y) dx dy \geq I(0).$$

در نتیجه باید

$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \iint_{\overline{\Omega}} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \eta + \frac{\partial f}{\partial u_x} \eta_x + \frac{\partial f}{\partial u_y} \eta_y \right) dx dy = 0. \quad (28.7)$$

در این جا مانند قبل می بایستی با استفاده از انتگرال گیری جزیه جزء مشتقات نسبی را از روی η برداریم و بر جمله ضریب مربوطه قرار دهیم. این کار به سادگی قبل نیست. برای این کار مقدماتی نیاز است. که در این جا بیان می کنیم. ابزار اصلی برای این کار قضیه گرین است که نقش انتگرال جزیه جزء را دارد. صورت این خاصیت را بدون اثبات در زیر داریم.

خاصیت ۷.۷ (قضیه گرین). فرض کنید Ω یک میدان همبند ساده، باز و کرانه دار با مرز هموار $\partial\Omega$ باشد. اگر $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ روی $\overline{\Omega}$ دارای مشتقات پیوسته باشند، آن گاه

$$\int_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy.$$

حال برای این که طرف دوم (۲۸.۷) را ساده کنید، در تساوی بالا بگیرید:

$$P = -\eta \frac{\partial f}{\partial u_y}, \quad Q = \eta \frac{\partial f}{\partial u_x}.$$

چون η و f دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته است پس می‌توان قضیه گرین را به کار برد و تساوی زیر را نوشت:

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{\Omega}} \left\{ \eta_x \frac{\partial f}{\partial u_x} + \eta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_x} + \eta_y \frac{\partial f}{\partial u_y} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u_y} \right\} dx dy \\ = \int_{\partial\Omega} \eta \frac{\partial f}{\partial u_x} dy - \eta \frac{\partial f}{\partial u_y} dx. \end{aligned}$$

چون $\eta(x, y)$ روی $\partial\Omega$ برابر صفر است پس انتگرال طرف دوم این تساوی روی منحنی $\partial\Omega$ برابر صفر است. بدین ترتیب از تساوی بالا به دست می‌آوریم:

$$\iint_{\bar{\Omega}} \left(\frac{\partial f}{\partial u_x} \eta_x + \frac{\partial f}{\partial u_y} \eta_y \right) dx dy = - \iint_{\bar{\Omega}} \eta \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u_y} \right) dx dy.$$

از قرار دادن آن در (۲۸.۷) به دست می‌آوریم:

$$\iint_{\bar{\Omega}} \eta \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u_y} - \frac{\partial f}{\partial u} \right\} dx dy = 0.$$

چون این تساوی برای هر $\eta \in C^2(\Omega)$ برقرار است. پس با توجه به لم دوبویس-ریموند باید داشته باشیم:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u_y} - \frac{\partial f}{\partial u} = 0. \quad (29.7)$$

به این ترتیب خاصیت زیر را به اثبات رساندیم.

خاصیت ۸.۷. فرض کنید تابع f در تابع (۲۶.۷) دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته و تابع u واقع در $C^2(\bar{\Omega})$ تابع فوق همراه با شرایط مرزی داده شده را نهایی کند. آنگاه u جواب معادله دیفرانسیل پاره‌ای از مرتبه دوم (۲۹.۷) است که در شرط مرزی (۲۷.۷) صدق می‌کند.

تذکر. معادله (۲۹.۷) را نیز معادله اویلر-لاگرانژ گویند.

مثال ۱۴.۷. تابع زیر را روی دیسک واحد $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ در نظر بگیرید.

$$J(u) = \iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

تابع $u(x, y)$ را در $C^2(\overline{\Omega})$ طوری به دست آورید تا تابعک بالا را نهایی کند و در شرایط مرزی $u_0(x, y) = x^2 - 1$ صدق کند.

حل. با توجه به خاصیت ۸.۷ تابع جواب می‌بایستی جواب مسئله با شرایط مرزی زیر باشد:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u_0(x, y) = x^2 - 1 \text{ روی دایره واحد}$$

برای حل این مسئله آن را در مختصات قطبی در نظر می‌گیریم که به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} &= 0, & \text{معادله لاپلاس در مختصات قطبی} \\ u_0(1, \theta) = \cos^2 \theta &= \frac{1}{4}e^{2i\theta} + \frac{1}{4}e^{-2i\theta}, & \text{شرایط مرزی در مختصات قطبی} \end{aligned}$$

با استفاده از پایه $\{e^{in\theta}\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل بالا به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) e^{in\theta}.$$

چون $|u(0, \theta)| < \infty$ پس $b_n = 0$ برای $n > 0$ و $a_n = 0$ برای $n < 0$. پس باید داشته باشیم:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n e^{-in\theta}.$$

برای برقراری شرایط مرزی باید داشته باشیم:

$$u_0(1, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n e^{in\theta} + b_n e^{-in\theta}) = \frac{1}{4}e^{2i\theta} + \frac{1}{4}e^{-2i\theta}.$$

در نتیجه $a_2 = \frac{1}{2}$ و $b_{-2} = \frac{1}{2}$ و $a_n = 0$ برای $n \neq 2$ و $b_{-n} = 0$ برای $n \neq 2$. بدین ترتیب به دست می‌آوریم:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} r^2 e^{2i\theta} + \frac{1}{2} r^2 e^{-2i\theta} = r^2 \cos 2\theta = r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$

یا در مختصات دکارتی

$$u(x, y) = x^2 - y^2.$$

تمرین ۳.۷

۱. تابع $y(x)$ را طوری انتخاب کنید تا تابع زیر را همراه با شرایط مرزی داده شده نهایی کند.

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} (y''^2 - y^2 + 2yx^3) dx$$

$$y^{(k)}(x_0) = 0, \quad y^{(k)}(x_1) = 1, \quad k = 0, 1.$$

۲. تابع نهایی کننده تابع $J(y) = \int_0^1 y' \sqrt{1 + y''^2} dx$ را طوری بیابید تا در شرایط مرزی $y(0) = 0, y'(0) = 0, y(1) = 1, y'(1) = 2$ صدق کند.

۳. فرض کنید g نمایش دهنده شتاب ثقل است. نهایی کننده تابع زیر را بیابید.

$$J(q) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - gq_2 \right] dx$$

۴. فرض کنید k عددی ثابت است. نهایی کننده تابع زیر را به دست آورید.

$$J(q) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sqrt{\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2} - kq_2 \right) dx$$

۵. تابع $u(x, y)$ را طوری تعیین کنید تا تابع زیر را روی میدان

$$Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

همراه با شرایط مرزی داده شده نهایی کند.

$$J(u) = \iint_Q (u_x^2 + u_y^2 + u^2) dx dy$$

$$u(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = 0, \quad u_x(0, y) = y, \quad u_x(1, y) = 0.$$

۶. تابع $u(x, y)$ را طوری تعیین کنید تا تابع زیر همراه با شرایط مرزی داده شده روی میدان

$$Q = \{(x, y) : -\pi \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1\}$$

را نهایی کند.

$$J(u) = \iint_Q (u_x^2 + u_y^2 - 2u^2) dx dy$$

$$u(-\pi, y) = u(\pi, y), \quad u_x(-\pi, y) = u_x(\pi, y)$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_y(x, 0) = 0.$$

۷. تابع $u(x, y)$ را طوری تعیین کنید تا تابع زیر را روی میدان

$$Q = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

همراه با شرایط مرزی داده شده نهایی کند.

$$J(u) = \iint_Q (u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

برای $0 < x < 1$ و $u_y(x, 0) = 1$ و برای $x < 0$ ، $u(x, 0) = x$. روی قوس نیم دایره فوقانی دایره واحد، یعنی $x^2 + y^2 = 1$ و $y > 0$ داشته باشیم $u(x, y) = x + y$.

فصل ۸

مسائل تغییراتی مقید و کرانه‌های متغیر

در بعضی از مسائل حساب تغییرات که نهایی کردن یک تابعک مطرح است، همراه با آن تابعک قیودی به صورت طبیعی بر روی تابع مطلوب اعمال می‌گردد. این قیود می‌تواند به صورت معادلات تابعی یا معادلات انتگرالی و یا معادلات دیفرانسیل و یا ترکیبی از این موارد ظاهر گردد.

در بخش ۱.۸ مسائل تغییراتی با شرایط مرزی ثابت و قید انتگرالی برای ساده‌ترین مسئله حساب تغییرات و سپس مسائل با مشتقات از مرتبه بالاتر و تعداد قیود بیشتر از یکی بحث می‌شود. این نوع قیود را معمولاً قیود همدوری می‌گویند. در بخش ۲.۸ مسائل تغییراتی مقید را برای قیود غیرانتگرالی خواهیم دید. اینگونه قیود به صورت تابعی و یا معادلات دیفرانسیل هستند. کلیه مسائل در این دو بخش با شرایط مرزی ثابت است. لیکن در مسائل مقید و بعضاً غیر مقید شرایط مرزی می‌تواند تغییر نماید. به عبارت دیگر در مسائل مهندسی، فیزیکی و هندسی با مسائلی مواجه می‌شویم که یکی یا هر دو نقطه مرزی یا مقادیر آنها از پیش تعیین شده نیست و می‌بایستی همراه با تعیین تابع‌های نهایی کننده آنها را نیز تعیین کرد. این گونه مسائل حساب تغییرات را مسائل تغییراتی با کرانه‌های متغیر می‌گویند. در بخش ۳.۸ به معرفی و بررسی مسائل با شرایط مرزی طبیعی و ارائه مثال‌هایی در این مورد می‌پردازیم. در بخش ۴.۸ مسائل با شرایط مرزی جابه‌جا شونده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۸ مسائل تغییراتی مقید همدوری (هم‌محیط)

در این بخش مسائل تغییراتی همدور یا هم‌محیط را مطرح و روش حل آن‌ها را نیز بیان می‌کنیم. علت این نام برای این گونه مسائل به‌خاطر اولین مسئله در این زمینه است که توسط دیدو قرن‌ها قبل از پیدایش حساب تغییرات، حتی قبل از بیان مفهوم تابع یا معادله بیان گردیده است. این مسئله به‌صورت زیر است.

مسئله دیدو: قطعه زمین با محیط برابر $2L$ و سطح ماگزیمم را در یک دشت مسطح بیابید.

این مسئله را در حالت کلی‌تر در انتهای این بخش حل خواهیم نمود. اکنون به بیان مسئله اصلی می‌پردازیم.

فرض کنید $J : C^2([x_0, x_1]) \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی به‌صورت زیر است:

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx. \quad (۱.۸)$$

در این تابع، f تابعی هموار از x, y و y' است. مسئله همدوری یا هم‌محیط عبارت از تعیین مقادیر نهایی J است که علاوه بر صدق کردن در شرایط مرزی

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \quad (۲.۸)$$

در قید یا شرط

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} g(x, y, y') dx = L \quad (۳.۸)$$

که در آن g تابعی معین و هموار از x, y و y' است و L عددی ثابت و معین است نیز صدق نماید. همان‌طور که قبلاً گفته شد اولین مسئله طبیعی در این مورد مربوط به ماگزیمم کردن مساحت و قید مذکور به‌صورت طول محیط بوده است. این گونه مسائل را مسائل همدور یا هم‌محیط گویند. در این بخش یک شرط لازم برای تابعی هموار که نهایی‌کننده مسئله بالا باشد، ارائه خواهیم کرد.

فرض کنید $y(x)$ تابع $J(y)$ را تحت شرایط مرزی و قید همدور بالا مینیمم کند. فرض کنید $\eta_1, \eta_2 \in C^1([x_0, x_1])$ دو تابع داده شده باشند که در شرایط مرزی

$$\eta_1(x_0) = \eta_1(x_1) = \eta_2(x_0) = \eta_2(x_1) = 0$$

صدق کند. همچنین فرض کنید پارامترهای ϵ_1 و ϵ_2 از نظر مقدار قدرمطلق به قدری کوچک اند به طوری که $\hat{y} = y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2$ در نزدیکی y قرار دارد، یعنی مینیمم مقدار $J(y)$ همراه با شرایط و قید مذکور توسط y داده شده است. با انتخاب $\epsilon_1 \eta_1$ متناسب با داریم:

$$J(y) \leq J(\hat{y}), \quad I(\hat{y}) = I(y) = L.$$

حال بگیریم:

$$J(\epsilon_1, \epsilon_2) = J(\hat{y}), \quad I(\epsilon_1, \epsilon_2) = I(\hat{y}).$$

چون f و g دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته اند، پس در روابط زیر

$$J(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2, y' + \epsilon_1 \eta_1' + \epsilon_2 \eta_2') dx$$

$$I(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_{x_0}^{x_1} g(x, y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2, y' + \epsilon_1 \eta_1' + \epsilon_2 \eta_2') dx$$

تعویض $\frac{\partial}{\partial \epsilon_1}$ و $\frac{\partial}{\partial \epsilon_2}$ مجاز است. بنابراین $J(\epsilon_1, \epsilon_2)$ و $I(\epsilon_1, \epsilon_2)$ دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته می باشند. چون برای $\epsilon_1^0 + \epsilon_2^0$ کوچک، نقطه $(0, 0)$ تابع $J(\epsilon_1, \epsilon_2)$ را تحت قید $I(\epsilon_1, \epsilon_2) = L$ مینیمم می کند، پس اگر $\nabla I(\epsilon_1, \epsilon_2) \neq 0$ ، ضریب لاگرانژی مانند λ موجود است به طوری که برای $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0)$ داریم:

$$\nabla J(\epsilon_1, \epsilon_2) = \lambda \nabla I(\epsilon_1, \epsilon_2).$$

یا

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} \nabla f(x, y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2, y' + \epsilon_1 \eta_1' + \epsilon_2 \eta_2') dx \\ &= \lambda \int_{x_0}^{x_1} \nabla g(x, y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2, y' + \epsilon_1 \eta_1' + \epsilon_2 \eta_2') dx = 0. \end{aligned}$$

یا در نقطه $(\circ, \circ)$ برای کلیه $\eta_1(x)$ و $\eta_2(x)$ باید داشته باشیم:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \right) \eta_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y'} \right) \eta_1' + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \right) \eta_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y'} \right) \eta_2' \right\} dx = 0.$$

حال برای ساده‌نویسی بگیرید $F = f - \lambda g$. با به‌کارگیری انتگرال جزبه‌جزء و استفاده از شرایط مرزی صفر برای η_1 و η_2 به‌دست می‌آوریم:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta_2 \right\} dx = 0.$$

تساوی بالا می‌بایستی برای هر η_1 و η_2 برقرار است پس طبق خاصیت ۱.۷ باید داشته باشیم:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

یا

$$\frac{\partial}{\partial y} (f - \lambda g) - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} (f - \lambda g) = 0. \quad (4.8)$$

اگر $\circ \neq \nabla I(\epsilon_1, \epsilon_2) \big|_{\epsilon_1 = \epsilon_2 = \circ}$ در این صورت، y یک جواب معادله (۴.۸) است که می‌بایستی در شرایط مرزی (۲.۸) و قید (۳.۸) صدق کند. چون معادله (۴.۸) یک معادله دیفرانسیل از مرتبه دوم و جواب آن دارای دو مقدار ثابت c_1 و c_2 است پس انتظار می‌رود با انتخاب c_1, c_2 و λ شرایط مرزی (۲.۸) و قید (۳.۸) برقرار شود.

تذکره. توجه کنید y' ممکن است در f یا g به‌طور صریح ظاهر نشود، لیکن در یکی از آنها می‌بایستی ظاهر شود.

بدین ترتیب خاصیت زیر را به اثبات رسانده‌ایم.

خاصیت ۱.۸. فرض کنید $y \in C^2([x_0, x_1])$ تابع $J(y)$ را همراه با شرایط مرزی (۲.۸) و قید همدوری (۳.۸) نهایی کند. آن‌گاه عددی مانند λ موجود است به‌طوری‌که y جواب (۴.۸) همراه با شرایط مرزی (۲.۸) و قید همدوری (۳.۸) است.

اولین مثال را به صورت زیر داریم که شکل ساده شده مسئله دیدو است.

مثال ۱.۸. تابع $y = f(x) > 0$ را روی بازه $(-1, 1)$ طوری تعیین کنید تا $y(-1) = y(1) = 0$ و طول منحنی آن برابر با $L > 2$ و مساحت بین آن و پاره خط $[-1, 1]$ ماگزیمم باشد.

حل. مساحت مذکور و شرایط مرزی را به صورت زیر داریم:

$$J(y) = \int_{-1}^1 y \, dx, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0.$$

طول منحنی داده شده به وسیله y عبارتست از:

$$I(y) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + y'^2} \, dx = L > 2.$$

معادله اویلر-لاگرانژ برای تابع $F = y - \lambda \sqrt{1 + y'^2}$ به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = -\lambda \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - 1 = 0.$$

یا

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = -\frac{1}{\lambda}(x + c_1) \implies \frac{y'^2}{1 + y'^2} = \frac{1}{\lambda^2}(x + c_1)^2$$

یا

$$y'^2 = \frac{\frac{1}{\lambda^2}(x + c_1)^2}{1 - \frac{1}{\lambda^2}(x + c_1)^2} \implies y' = \frac{-\frac{1}{\lambda}(x + c_1)}{\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}(x + c_1)^2}}$$

یا

$$y = \int \frac{-\frac{1}{\lambda}(x + c_1)}{\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}(x + c_1)^2}} \, dx - c_2.$$

بدین ترتیب به دست می آوریم:

$$\frac{1}{\lambda}(y + c_2) = \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}(x + c_1)^2}$$

یا

$$(y + c_2)^2 + (x + c_1)^2 = \lambda^2.$$

با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آوریم:

$$c_2^2 + (1 + c_1)^2 = \lambda^2, \quad c_2^2 + (-1 + c_1)^2 = \lambda^2.$$

پس $c_1 = 0$ و $c_2^2 + 1 = \lambda^2$. از طرف دیگر

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} dx.$$

حال بگیریم $x = \lambda \sin t$. در این صورت $dx = \lambda \cos t dt$ و

$$L = \int \lambda dt = \lambda t = \lambda \sin^{-1} \frac{x}{\lambda} \Big|_{-1}^1 = \lambda \left(\sin^{-1} \frac{1}{\lambda} - \sin^{-1} \frac{-1}{\lambda} \right)$$

یا

$$L = 2\lambda \sin^{-1} \frac{1}{\lambda}$$

یا

$$\frac{1}{\lambda} = \sin \frac{L}{2\lambda} \implies \lambda \sin \frac{L}{2\lambda} = 1.$$

چون نهایی کننده $I(y)$ پاره خط $[-1, 1]$ است و $|\lambda| > 1$ پس برای c_2 نیز جواب حقیقی به دست می‌آید.

تذکره ۱ حل مسئله مقید (۱.۸)، (۲.۸) و (۳.۸) معادل با مسئله یافتن تابع نهایی کننده مسئله زیر است:

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} (f - \lambda g) dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

همچنین مقدار λ باید طوری انتخاب شود تا قید (۳.۸) برقرار باشد.

۲ از خاصیت ۳.۷ در حالت خاص $f - \lambda g$ فاقد x نیز می‌توان استفاده نمود.

در مثال بعدی مسئله زنجیر را بررسی می‌کنیم.

مثال ۲.۸. زنجیری به طول $L > ۱$ بین دو نقطه $(۰, h)$ و $(۱, h)$ آویزان است که در آن $L > ۲h$ ، منحنی زنجیر را بیابید.

حل. تابع مربوط به زنجیر که باید مینیمم گردد طبق فرمول (۳.۷) به صورت زیر در می‌آید.

$$I(y) = \int_0^1 y \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad y(0) = h, \quad y(1) = h.$$

همچنین قید طول زنجیر را به صورت زیر داریم:

$$I(y) = \int_0^1 y \sqrt{1 + y'^2} dx = L > ۱.$$

برای این مسئله تابع F به صورت زیر است:

$$F = y \sqrt{1 + y'^2} - \lambda \sqrt{1 + y'^2} = (y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2}.$$

چون در آن x به طور صریح ظاهر نشده است، معادله اویلر-لاگرانژ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$y' F_{y'} - F = y'(y - \lambda) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - (y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2} = c_1.$$

حال بگیرد $u = y - \lambda$ در این صورت معادله بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{u^2}{1 + u'^2} = c_1^2 \quad \Rightarrow \quad u'^2 = \frac{u^2}{c_1^2} - ۱$$

یا

$$u' = \sqrt{\left(\frac{u}{c_1}\right)^2 - ۱}$$

یا

$$\frac{du}{\sqrt{\left(\frac{u}{c_1}\right)^2 - ۱}} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{u}{c_1}\right)^2 - ۱}} = x + c_2.$$

با تغییر متغیر $\frac{u}{c_1} = \cosh t$ به دست می‌آوریم $du = c_1 \sinh t \, dt$ و

$$x + c_2 = \int \frac{c_1 \sinh t}{\sinh t} dt = c_1 t = c_1 \cosh^{-1} \frac{u}{c_1}$$

یا

$$u = c_1 \cosh \frac{1}{c_1} (x + c_2)$$

یا

$$y = \lambda + c_1 \cosh \frac{1}{c_1} (x + c_2).$$

برای سادگی بگیرید $c_1 = k_1$ و $c_2 = \frac{c_2}{c_1}$. در این صورت با اعمال شرایط مرزی تساوی‌های زیر به دست می‌آید:

$$h - \lambda = k_1 \cosh k_2, \quad h - \lambda = k_1 \cosh \left(\frac{1}{k_1} + k_2 \right).$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\cosh k_2 = \cosh \left(k_2 + \frac{1}{k_1} \right).$$

این تساوی به‌ازاء $k_2 = \left(k_2 + \frac{1}{k_1} \right)$ یا $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ برقرار است. قید همدوری نیز به‌صورت زیر برقرار می‌شود:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} \, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \sinh^2 \left(\frac{x}{k_1} + k_2 \right)} \, dx \\ &= \int_0^1 \cosh \left(\frac{x}{k_1} + k_2 \right) \, dx = k_1 \sinh \left(\frac{x}{k_1} + k_2 \right) \Big|_0^1. \end{aligned}$$

این شرط به‌صورت زیر تقلیل می‌یابد:

$$L = 2k_1 \sinh \frac{1}{2k_1} \implies \frac{L}{2k_1} = \sinh \frac{1}{2k_1}.$$

برای $L > 1$ این معادله دارای جواب یگانه‌ای مثبت برای k_1 و در نتیجه یک جواب منفی برای $k_2 = -\frac{1}{2k_1}$ است. همچنین از معادله $h - \lambda = k_1 \cosh k_2$ برای λ مقدار $\lambda = h - k_1 \cosh k_2$ به دست می‌آید.

مسائل تغییراتی مقید همدوری که در این جا مورد مطالعه قرار گرفت از چند جهت قابل تعمیم است. اول این که در توابع زیر انتگرال مشتقات از مرتبه دوم و یا بالاتر ظاهر شده باشد. دوم این که تعداد قیدها بیشتر از یکی باشد. سوم این که تعداد متغیرهای وابسته یا توابع مجهول بیشتر از یکی باشد. چهارم این که تعداد متغیرهای مستقل بیشتر از یکی باشد و در آخر این که هر ترکیبی از موارد چهارگانه بالا نیز می‌تواند برقرار باشد. در ادامه این بخش خواهیم دید که این حالات با توجه به مطالب بخش فوق به‌سادگی قابل بررسی است.

الف: مسائل حاوی مشتقات مرتبه بالاتر

فرض کنید I و J تابع‌هایی به‌صورت

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'') dx, \quad I(y) = \int_{x_0}^{x_1} g(x, y, y', y'') dx$$

باشند که در آن f و g توابعی هموار اند. با استفاده از تجزیه و تحلیل مشابه در اثبات خاصیت ۱.۸ می‌توان نشان داد جواب نهایی کننده $J(y)$ که در قید همدوره‌ای، $I(y) = L$ و شرایط مرزی $y'(x_1) = y'_1, y'(x_0) = y'_0, y(x_1) = y_1, y(x_0) = y_0$ صدق می‌کند باید یک جواب معادله اوایلر-لاگرانژ

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

باشد که در آن $F = f - \lambda g$ و در شرایط مرزی بالا صدق کند.

برای مشتقات از مرتبه بالاتر از دو که در f یا g ظاهر می‌گردند نیز وضعیت کاملاً مشابه است.

مثال ۳.۸. تابع $J(y)$ همراه با قید همدوره‌ای و شرایط مرزی زیر را نهایی کنید.

$$J(y) = \int_0^1 y''^2 dx, \quad I(y) = \int_0^1 y dx = 1$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad y'(0) = y'(1) = 0.$$

حل. برای این مسئله $f = (y'')^2$ و $g = y$. طبق مطالب بالا نهایی کننده مسئله، جواب مسئله زیر است:

$$2y^{(4)} - \lambda = 0, \quad y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0.$$

معادله دیفرانسیل بالا دارای جواب عمومی زیر است:

$$y = \frac{\lambda x^4}{4!} + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0.$$

برای برقراری شرایط مرزی باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} y(0) = c_0 = 0, \quad y'(0) = c_1 = 0 \\ y(1) = \frac{\lambda}{4!} + c_3 + c_2 = 0, \quad y'(1) = \frac{\lambda}{3!} + 3c_3 + 2c_2 = 0. \end{aligned}$$

همچنین برای برقراری قید همدوری باید داشته باشیم:

$$I(y) = \int_0^1 y \, dx = \frac{\lambda}{5!} + \frac{c_3}{4} + \frac{c_2}{3} = 1.$$

از حل این دستگاه سه معادله و سه مجهول خطی برای c_2 ، c_3 و λ به دست می آوریم:
 $\lambda = 6!$ ، $c_2 = 30$ و $c_3 = -60$. بدین ترتیب جواب مسئله به صورت زیر حاصل می گردد:

$$y = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2.$$

ب: مسائل حاوی چند قید همدوری

تابع $J(y)$ همراه با شرایط مرزی داده شده و قیدهای همدوری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} J(y) &= \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') \, dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \\ I_k(y) &= \int_{x_0}^{x_1} g_k(x, y, y') \, dx = L_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

در این جا همانند گذشته فرض بر این است که توابع f و g_k ، $k = 1, 2, \dots, m$ همواراند. در این مسئله مجدداً روش ضریب لاگرانژ چندگانه مقید مفید است. در این جا این روش را برای $m = 2$ بررسی می کنیم. حالت کلی به صورت مشابه نتیجه می گردد.

فرض کنید y یک تابع نهایی کننده موضعی J باشد که در شرایط مرزی و قیدهای دوری $I_1(y) = L_1$ و $I_2(y) = L_2$ صدق کند. برای این که این دو قید همدوری برقرار باشد باید پارامتر اختیاری دیگری داشته باشیم. در همسایگی تابع نهایی کننده y ، تابع $\hat{y}$ را به صورت زیر می گیریم که η_1 ، η_2 و η_3 توابع داد شده اند.

$$\hat{y} = y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2 + \epsilon_3 \eta_3 = y + \langle \epsilon, \eta \rangle$$

که در آن $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ ، $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ و $\langle \cdot, \cdot \rangle$ همان نماد ضرب داخلی است. همچنین مانند بخش های قبلی $\eta_k \in C^2([x_0, x_1])$ و $\eta_k(x_0) = \eta_k(x_1) = 0$ و $\|\eta_k\|_\infty \leq 1$ برای $k = 1, 2, 3$ حال بگیرید:

$$\begin{aligned} J(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) &= \int_{x_0}^{x_1} f(x, y + \langle \epsilon, \eta \rangle, y' + \langle \epsilon, \eta' \rangle) dx \\ I_1(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) &= \int_{x_0}^{x_1} g_1(x, y + \langle \epsilon, \eta \rangle, y' + \langle \epsilon, \eta' \rangle) dx = L_1 \\ I_2(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) &= \int_{x_0}^{x_1} g_2(x, y + \langle \epsilon, \eta \rangle, y' + \langle \epsilon, \eta' \rangle) dx = L_2. \end{aligned}$$

چون برای $\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2$ کوچک، نقطه $(0, 0, 0)$ تابع $J(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ را تحت قیدهای،

$$I_1(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = L_1$$

$$I_2(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = L_2$$

مینیمم می کند. پس مقادیر λ_1 و λ_2 موجود است به طوری که برای $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = 0$ داریم:

$$\nabla J(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \lambda_1 \nabla I_1(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) + \lambda_2 \nabla I_2(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3).$$

یا در نقطه $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (0, 0, 0)$ باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x, y + \langle \epsilon, \eta \rangle, y' + \langle \epsilon, \eta' \rangle) dx \\ = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_{x_0}^{x_1} g_i(x, y + \langle \epsilon, \eta \rangle, y' + \langle \epsilon, \eta' \rangle) dx. \end{aligned}$$

یا در نقطه $\epsilon = 0$ باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial y} \right) \eta_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial y'} \right) \eta'_1 \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial y} \right) \eta_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial y'} \right) \eta'_2 \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial y} \right) \eta_3 + \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial y'} \right) \eta'_3 \right] dx = 0. \end{aligned}$$

حال بگیریید $F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$ و انتگرال جزیه جزء و شرایط مرزی صفر η_k ها را به کار برید تا به دست آید:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta_2 \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta_3 \right] dx = 0. \end{aligned}$$

تساوی بالا برای هر η_1, η_2, η_3 برقرار است، پس طبق خاصیت ۱.۷ باید داشته باشیم:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

که در آن $F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$ است. جواب عمومی این معادله دیفرانسیل مرتبه دوم دارای دو ثابت اختیاری است. با استفاده از شرایط مرزی و دو قید همدوری این دو ثابت اختیاری و مقدار λ_1 و λ_2 قابل تعیین است. لیکن می‌بایستی شرایطی برقرار باشد تا چهار معادله جبری که برای محاسبه این چهار مجهول به کار می‌رود دارای جواب باشد.

یکی از این شروط این است که دو بردار $\nabla I_1(\epsilon)$ و $\nabla I_2(\epsilon)$ در نقطه $\epsilon = 0$ مستقل خطی باشند. همچنین y جواب مسئله بالا، باید طوری باشد تا $\nabla I(\epsilon)$ برای $\epsilon = 0$ به صورت ترکیبی خطی از $\nabla I_1(\epsilon)$ و $\nabla I_2(\epsilon)$ قابل بیان باشد.

مثال ۴.۸. تابع $J(y)$ زیر را تحت قیدهای همدوری و شرایط مرزی داده شده نهایی کنید.

$$J(y) = \int_0^1 y'^2 dx, \quad y(0) = y(1) = 0$$

$$I_1(y) = \int_0^1 y dx = 2, \quad I_2(y) = \int_0^1 xy dx = \frac{1}{4}.$$

حل. بگیریم $F = y'^2 - \lambda_1 y - \lambda_2 xy$. با توجه به مطالب بالا جواب مسئله بالا باید جواب مسئله زیر باشد و در قیدهای همدوری نیز صدق کند.

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

این مسئله به صورت زیر در می‌آید:

$$2y'' + \lambda_1 + \lambda_2 x = 0, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

جواب عمومی این معادله دیفرانسیل را به صورت زیر داریم:

$$y = -\frac{\lambda_2 x^3}{6} - \frac{\lambda_1 x^2}{4} + c_1 x + c_0.$$

حال شرایط مرزی و قیدها را اعمال می‌کنیم:

$$y(0) = 0 \implies c_0 = 0$$

$$y(1) = 0 \implies c_1 = \frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{6}$$

$$\int_0^1 y dx = 2 \implies 2 = -\frac{\lambda_1}{12} - \frac{\lambda_2}{24} + \frac{c_1}{12}$$

$$\int_0^1 xy dx = \frac{1}{4} \implies \frac{1}{4} = -\frac{\lambda_1}{16} - \frac{\lambda_2}{30} + \frac{c_1}{3}.$$

از حل این دستگاه سه معادله سه مجهولی خطی به دست می‌آوریم $c_1 = 420$ ، $\lambda_1 = 408$ و $\lambda_2 = -360$ بدین ترتیب جواب مطلوب به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$y = 60x^3 - 102x^2 + 42x.$$

ج: مسائل حاوی چند تابع مجهول

روش ضریب لاگرانژ برای مسائل همدوری حاوی چند متغیر وابسته یا تابع مجهول نیز قابل اعمال است. برای دیدن این مطلب بگیرید، $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ و

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx \quad (5.8)$$

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx \quad (6.8)$$

همچنین فرض کنید توابع f و g دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته است به علاوه y تابع $J(y)$ را همراه با قید $I(y) = L$ و شرایط مرزی زیر نهایی کند.

$$y_i(x_0) = y_{0i}, \quad y_i(x_1) = y_{1i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (7.8)$$

در این صورت عددی مانند λ موجود است به طوری که y یک جواب دستگاه معادله اویلر-لاگرانژ زیر است و در شرایط مرزی بالا صدق می‌کند که در آن $F = f - \lambda g$ است.

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.8)$$

برای دیدن این مطلب می‌گیریم:

$$\eta(x) = (\eta_1(x), \dots, \eta_n(x)) \in C^2([x_0, x_1]), \quad \|\eta\|_\infty \leq 1$$

$$\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \epsilon\eta = (\epsilon_1\eta_1, \epsilon_2\eta_2, \dots, \epsilon_n\eta_n)$$

$$\hat{J}(\epsilon) = J(y + \epsilon\eta), \quad \hat{I}(\epsilon) = I(y + \epsilon\eta).$$

در این صورت $\epsilon = 0$ نهایی کننده موضعی $\hat{J}(\epsilon)$ با قید $\hat{I}(\epsilon) = L$ است. پس عددی مانند λ موجود است به طوری که $\nabla \hat{J}(\epsilon) = \lambda \nabla \hat{I}(\epsilon)$ یا

$$\left. \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} (\hat{J}(\epsilon) - \lambda \hat{I}(\epsilon)) \right|_{\epsilon=0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

حال اگر مانند اثبات خاصیت ۶.۷ عمل کنیم نتیجه مطلوب به دست می آید. یعنی جواب نهایی کننده (۴.۸) که در شرایط مرزی (۷.۸) و قید (۶.۸) صدق کند، جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی (۸.۸) همراه با شرایط مرزی (۷.۸) است. در این جا مسئله دیدو که در بخش گذشته حل شد بدون فرض این که این جواب به صورت y تابعی از x است حل می کنیم.

مثال ۵.۸. منحنی پارامتری $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ با $-1 \leq t \leq 1$ و $\gamma(-1) = (-1, 0)$ و $\gamma(1) = (1, 0)$ را در بالای محور x ها طوری انتخاب کنید تا طول این منحنی برابر $l > 2$ و مساحت بین این منحنی و پاره خط $[-1, 1]$ روی محور x ها ماگزیمم گردد.

حل. اگر D میدان محصور شده و $J(x, y)$ مساحت محصور شده باشد در این صورت:

$$J(x, y) = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x \dot{y} - y \dot{x}) dt$$

که تساوی اول با استفاده از قضیه گرین نوشته شده است. پس باید $\gamma(t)$ را طوری انتخاب کنیم تا تحت قید

$$I(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = l$$

و شرایط مرزی

$$\gamma(-1) = (-1, 0), \quad \gamma(1) = (1, 0)$$

تابع زیر را ماگزیمم کند.

$$J(x, y) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x \dot{y} - y \dot{x}) dt.$$

تابع نهایی کننده باید در معادله (۸.۸) با $F = \frac{1}{\lambda}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ صدق کند. یعنی:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{-\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \frac{1}{\lambda}y\right) - \frac{1}{\lambda}\dot{y} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{-\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \frac{1}{\lambda}x\right) - \frac{1}{\lambda}\dot{x} &= 0.\end{aligned}$$

بدین ترتیب به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}\frac{-\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + y &= c_0 \\ \frac{-\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + x &= c_1.\end{aligned}$$

که در آن c_0 و c_1 مقادیری ثابت اند. با توان دو رساندن هر یک از این دو معادله و جمع آنها به دست می آوریم:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_0)^2 = \lambda^2.$$

پس جواب دایره‌ای به شعاع λ و مرکز (c_1, c_0) است. از شرایط مرزی به دست می آوریم $c_1 = 0$. ثابت c_0 ممکن است منفی یا مثبت باشد و مقدار آن به مقدار l وابسته است.

تذکره. مسائل تغییراتی برای تابع مجهول چند متغیره مستقل، همراه با قیدهای همدوری همانند بخش‌های گذشته این فصل با توجه به خاصیت ۸.۷ به صورت مشابه قابل بررسی و نتایج مشابه به دست می آید.

تمرین ۱.۸

۱. مقدار نهایی $J(y)$ زیر را همراه با شرایط مرزی و قید داده شده به دست آورید.

$$J(y) = \int_0^1 y'^2 dx, \quad I(y) = \int_0^1 y dx = L, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2.$$

۲. مطلوبست حل مسئله دیدو در مختصات قطبی که به صورت زیر است.

$$J(r) = \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 d\theta, \quad I(r) = \int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = L, \quad r(0) = r(\pi) = 0.$$

۳. تابع $J(y)$ زیر را همراه با شرایط مرزی و قید همدوره ای زیر در نظر بگیرید.

$$J(y) = \int_0^1 (yy')^2 dx, \quad I(y) = \int_0^1 y^2 dx = L, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

الف: نشان دهید برای $L = 3$ تابع نهایی کننده $J(y)$ عبارتست از

$$y = \sqrt{4 - 3(x-1)^2}.$$

ب: نشان دهید برای $L = \frac{5}{3}$ تابع نهایی کننده مسئله بالا یک تابع خطی است.

ج: نشان دهید برای $L = \frac{5}{3}$ مسئله مقید بالا دارای جواب نهایی کننده با $\lambda = 0$ است.

۴. مسئله تغییراتی زیر که در آن $A(y)$ تابعی هموار است همراه با شرایط مرزی و قید داده شده حل کنید.

$$J(y) = \int_0^1 A(y)y' dx, \quad I(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx = 4$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

۵. تابعهای زیر را برای منحنیهای پارامتری $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ با دامنه $[t_0, t_1]$ در نظر بگیرید:

$$J(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \dot{x} dt, \quad I(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} y^2 \dot{x} dt.$$

فرض کنید $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ تابع $J(x, y)$ را با قید $I(x, y) = K > 0$ و شرایط

$$\gamma(t_0) = (x_0, y_0), \quad \gamma(t_1) = (x_1, y_1)$$

نهایی کند. ابتدا منحنی $\gamma(t)$ را به دست آورید و سپس نشان دهید برای عددی ثابت مانند λ داریم:

$$x = \lambda(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

۶. تابع‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$J(y) = \int_0^1 y'^2 dx, \quad I_1(y) = \int_0^1 x^2 y'^2 dx, \quad I_2(y) = \int_0^1 y dx.$$

نهایی کننده‌های J را تحت قیدهای $I_1(y) = I_1$ و $I_2(y) = I_2$ و شرایط مرزی $y(0) = 0$ و $y(1) = 1$ به دست آورید.

۷. تابع $J(y) = \int_1^2 (y''^2 - y'^2 + y^2) dx$ را همراه با قید $I(y) = \int_1^2 y''^2 dx = 2$ و شرایط مرزی $y(1) = y'(1) = y(2) = y'(2) = 0$ نهایی کنید.

۸. تابع $J(y) = \int_0^\pi y''^2 dx$ را تحت قید $I(y) = \int_0^\pi y^2 dx = 1$ همراه با شرایط مرزی $y(0) = y'(0) = y(\pi) = y'(\pi) = 0$ نهایی کنید.

۹. تابع $J(y) = \int_0^1 (y''^2 - y'^2) dx$ را همراه با قید و شرایط مرزی زیر نهایی کنید.

$$I_1(y) = \int_0^1 y'^2 dx = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = y'(1) = 1.$$

۱۰. تابع $J(y) = \int_0^1 y''^2 dx$ را با دو قید

$$I_1(y) = \int_0^1 x^2 y' dx = 2, \quad I_2(y) = \int_0^1 (y - x)^2 dx = 4$$

همراه با شرایط مرزی زیر نهایی کنید:

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = y'(1) = 1.$$

۲.۸ قیود تابعی و دیفرانسیلی

در بخش گذشته این فصل مسائل تغییراتی را تحت قید همدوری و شرایط مرزی در حالات گوناگون مورد بررسی قرار دادیم. در این بخش مسائل مقید با قیود تابعی و دیفرانسیلی مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

الف: قید تابعی

یک نوع قید دیگری که بر روی مسائل تغییراتی ممکن است به صورت طبیعی ظاهر گردد قید تابعی است. این قید به صورت طبیعی در مسائل ژئودزیک ظاهر می‌شود.

مثال ۶.۸. منحنی $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ را بین دو نقطه $(0, 0, 1)$ و نقطه $(0, 1, 0)$ روی کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ طوری انتخاب کنید تا طول آن مینیمم گردد. می‌توان فرض کرد دامنه $\gamma(t)$ بازه بسته $[0, 1]$ است. در این صورت باید تابع

$$J(x, y, z) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

را با قید و شرایط مرزی زیر مینیمم نماییم.

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 1$$

$$(x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 1), \quad (x(1), y(1), z(1)) = (0, 1, 0).$$

مثال بالا به صورت مستقیم با استفاده از مطالب بخش قبلی قابل حل نیست لیکن این گونه مسائل حلی مشابه بخش‌های قبلی دارد. صورت دقیق این گونه مسائل به صورت زیر است.

فرض کنید $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ و $J : C^1([x_0, x_1]) \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی به صورت زیر است.

$$J(y) = J(y_1, \dots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx \quad (9.8)$$

که در آن f تابعی هموار از x, y و $y' = (y'_1, \dots, y'_n)$ است. یک مسئله با قید تابعی عبارت از تعیین مقادیر نهایی $J(y)$ است که در شرایط مرزی و قیدهای تابعی زیر صدق

کند.

$$y_k(x_0) = y_{0k}, \quad y_k(x_1) = y_{1k}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (10.8)$$

$$g_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad m < n. \quad (11.8)$$

اگر بتوان $g_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ ، $j = 1, 2, \dots, m$ را برای y_1 تا y_m برحسب y_{m+1} تا y_n حل نمود، از قرار دادن این مقادیر در $J(y)$ مسئله تبدیل به مسئله بدون قید برای مجول‌های y_{m+1} تا y_n می‌گردد. این مسئله با استفاده از خاصیت ۶.۷ قابل حل است. لیکن این حل برای y_1 تا y_m در کلیت به صورت سراسری مقدور نیست. به این دلیل در این جا روش دیگری را ارائه می‌کنیم.

برای سادگی در ابتدا ساده‌ترین حالت، یعنی $n = 2$ را در نظر می‌گیریم. یعنی:

$$J(y_1, y_2) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y_2, y_1', y_2') dx \quad (12.8)$$

$$y_1(x_0) = y_{01}, \quad y_2(x_0) = y_{02}, \quad y_1(x_1) = y_{11}, \quad y_2(x_1) = y_{12} \quad (13.8)$$

$$g(x, y_1, y_2) = 0. \quad (14.8)$$

برای سازگاری بین شرایط مرزی و قید تابعی باید داشته باشیم:

$$g(x_0, y_{01}, y_{02}) = 0, \quad g(x_1, y_{11}, y_{12}) = 0.$$

در این جا فرض می‌کنیم که برای تابع نهایی کننده y روی بازه $[x_0, x_1]$ داریم:

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}, \frac{\partial g}{\partial y_2} \right) \neq 0.$$

در این صورت معادله (۱۴.۸) را برای y_1 یا y_2 می‌توان حل نمود. فرض کنید $\frac{\partial g}{\partial y_2} \neq 0$ در

این صورت این معادله را برای y_2 برحسب y_1 می‌توان حل نمود.

حال بگیریید $(\eta_1, \eta_2) \in C^2([x_0, x_1])$ با $\|\eta\| < 1$ و $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ و

$\epsilon \in \mathbb{R}$. برای ϵ با $|\epsilon|$ کوچک معادله $g(x, y_1 + \epsilon\eta_1, y_2 + \epsilon\eta_2) = 0$ را می‌توان برای

η_2 بر حسب ϵ و η_1 وقتی که $y = (y_1, y_2)$ تابع نهایی کننده است، حل نمود. چون g دارای مشتقات دوم پیوسته است پس $\eta_2 \in C^2([x_0, x_1])$. بدین ترتیب می توان $\eta_1 \in C^2([x_0, x_1])$ یک تابع اختیاری با $\eta_1(x_0) = \eta_1(x_1) = 0$ در نظر گرفت. همچنین از معادله $g(x, y_1 + \epsilon \eta_1, y_2 + \epsilon \eta_2) = 0$ به دست می آوریم $\eta_2(x_0) = \eta_2(x_1) = 0$. اکنون برای تابع نهایی کننده $y = (y_1, y_2)$ و $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ به صورت بالا بگیرد:

$$I(\epsilon) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1 + \epsilon \eta_1, y_2 + \epsilon \eta_2, y'_1 + \epsilon \eta'_1, y'_2 + \epsilon \eta'_2) dx.$$

چون $y = (y_1, y_2)$ تابع نهایی کننده $J(y_1, y_2)$ است پس باید $\left. \frac{d}{d\epsilon} I(\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = 0$ یعنی:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} I(\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \eta_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \eta_2 + \frac{\partial f}{\partial y'_1} \eta'_1 + \frac{\partial f}{\partial y'_2} \eta'_2 \right) \Big|_{\epsilon=0} dx = 0.$$

با به کار بردن انتگرال جز به جزء و شرایط مرزی صفر برای η_1 و η_2 به دست می آوریم:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_1} \right) \eta_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_2} \right) \eta_2 \right] dx = 0. \quad (15.8)$$

چون η_2 تابعی از η_1 است از این تساوی نمی توان معادله اویلر-لاگرانژ را نتیجه گرفت. با توجه به مطالب بالا برای η_1 داده شده η_2 را می توان تابعی از ϵ در نظر گرفت که تابعی هموار است. برای این تابع $\eta_2(\epsilon)$ می توان نوشت:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} g(x, y_1 + \epsilon \eta_1, y_2 + \epsilon \eta_2(\epsilon)) \right|_{\epsilon=0} = \frac{\partial g}{\partial y_1} \eta_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2} \left(\eta_2 + \epsilon \frac{d\eta_2}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} = 0.$$

بدین ترتیب از $0 \neq \frac{\partial g}{\partial y_2}$ به دست می آوریم $\eta_2 = -\frac{g_{y_1}}{g_{y_2}} \eta_1$. چون f تابعی هموار است پس $f_{y_2} - \frac{d}{dx} f_{y'_2}$ تابعی پیوسته از x است. همچنین $g_{y_2} = \frac{\partial g}{\partial y_2}$ نیز تابعی پیوسته از x است. پس تابعی پیوسته مانند $\lambda(x)$ موجود است به طوری که:

$$\frac{d}{dx} f_{y'_2} - f_{y_2} = \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y_2} = \lambda(x) g_{y_2}. \quad (16.8)$$

توجه کنید λ به y_1 و y_2 وابسته است. حال برای عبارت $(f_{y_2} - \frac{d}{dx} f_{y_2'})$ در (۱۵.۸) از (۱۶.۸) جایگزین کنید و از تساوی $\eta_2 = -\frac{g_{y_1}}{g_{y_2}} \eta_1$ استفاده کنید تا به دست آورید:

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_1'} \right) \eta_1 + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial g_{y_2}} \eta_2 \right] dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_1'} \right) \eta_1 + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial g_{y_1}} \eta_1 \right] dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_1'} - \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial g_{y_1}} \right) \eta_1 dx = 0. \end{aligned}$$

چون این تساوی برای کلیه η_1 ها برقرار است پس طبق خاصیت ۱.۷ باید داشته باشیم:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_1'} - \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial g_{y_1}} = 0. \quad (17.8)$$

معادلات (۱۶.۸) و (۱۷.۸) یک دستگاه دو معادله دیفرانسیل با سه تابع مجهول y_1, y_2 و λ را به دست می‌دهد. همچنین قید (۱۴.۸) معادله سوم می‌دهد. از حل این معادلات y_1, y_2 و λ قابل حصول است.

تابع $\lambda(x)$ مانند گذشته ضریب لاگرانژ نامیده می‌شود.

معادلات (۱۶.۸) و (۱۷.۸) را به صورت فشرده زیر می‌توان نوشت که در آن

$$F = f - \lambda g$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_k'} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (18.8)$$

بدین ترتیب خاصیت زیر را اثبات نمودیم.

خاصیت ۲.۸. فرض کنید $f(x, y_1, y_2)$ و $g(x, y_1, y_2)$ دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته و $y = (y_1, y_2) \in C^2([x_0, x_1])$ یک تابع نهایی کننده تابع $\lambda(x)$ (۱۲.۸) همراه با شرایط مرزی (۱۳.۸) و قید تابعی (۱۴.۸) باشد، آنگاه تابعی پیوسته مانند $\lambda(x)$ روی $[x_0, x_1]$ موجود است به طوری که $y = (y_1, y_2)$ جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱۸.۸) همراه با شرایط مرزی (۱۳.۸) و قید تابعی (۱۴.۸) است.

مثال ۷.۸. تابعک زیر را همراه با شرایط مرزی و قید داده شده زیر نهایی کنید.

$$I(y_1, y_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2} dx$$

$$g(x, y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0$$

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 0, y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

حل. برای این مسئله

$$F(x, y_1, y_2) = \sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2} - \lambda(x)(y_1^2 + y_2^2).$$

و معادلات اوایلر-لاگرانژ به صورت زیر حاصل می گردد:

$$\frac{d}{dx} \frac{y_1'}{\sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2}} - 2\lambda(x)y_1 = 0$$

$$\frac{d}{dx} \frac{y_2'}{\sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2}} - 2\lambda(x)y_2 = 0.$$

با توجه به این که قید تابعی را به صورت $y_1^2 + y_2^2 = 1$ داریم می گیریم:

$$y_1(x) = \cos \phi(x), \quad y_2(x) = \sin \phi(x).$$

پس $y_1' = -\phi' \sin \phi$ و $y_2' = \phi' \cos \phi$. در نتیجه $\phi'^2 = y_1'^2 + y_2'^2$ و معادله اوایلر-لاگرانژ بر حسب ϕ به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{d}{dx} \frac{\phi' \sin \phi}{\sqrt{\phi'^2 + 1}} + 2\lambda(x) \cos \phi = 0$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\phi' \cos \phi}{\sqrt{\phi'^2 + 1}} - 2\lambda(x) \sin \phi = 0.$$

با حذف λ از بین این دو معادله به دست می آوریم:

$$\sin \phi \frac{d}{dx} \left(\frac{\phi' \sin \phi}{\sqrt{\phi'^2 + 1}} \right) + \cos \phi \frac{d}{dx} \left(\frac{\phi' \cos \phi}{\sqrt{\phi'^2 + 1}} \right) = 0.$$

با مشتق‌گیری از سمت چپ معادله بالا تساوی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\phi'}{\sqrt{1+\phi'^2}} = \text{ثابت}.$$

پس $\phi' = c_0$. در نتیجه $\phi(x) = c_0 x + c_1$. بدین ترتیب جواب معادلات دیفرانسیل اویلر-لاگرانژ به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$y_1(x) = \cos(c_0 x + c_1)$$

$$y_2(x) = \sin(c_0 x + c_1).$$

با اعمال شرایط مرزی $y_1(0) = 1$ و $y_2(0) = 0$ به دست می‌آوریم:

$$\cos c_1 = 1, \quad \sin c_1 = 0.$$

پس باید $c_1 = 2n\pi$ باشد. همچنین از شرایط مرزی $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ و $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ تساوی‌های زیر حاصل می‌گردد:

$$\cos\left(c_0 + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(c_0 + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

پس باید $c_0 = 4m + 1$ باشد. چون $\frac{\pi}{2} \leq (4m+1)x + 2n\pi \leq \frac{\pi}{2}$ پس $m = n = 0$ و

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x.$$

اکنون مسئله بالا را در حالت کلی، یعنی حالت (۹.۸) همراه با شرایط مرزی (۱۳.۸) و قیود (۱۴.۸) در نظر بگیرید. در این صورت مشابه با حالت $n = 2$ بالا برای تابع نهایی کننده $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ می‌بایستی تغییر اول J مساوی صفر باشد. یعنی باید داشته باشیم:

$$\delta J(y, \eta) = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \eta_i dx = 0. \quad (19.8)$$

که در $C^2([x_0, x_1])$ و $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in C^2([x_0, x_1])$ از طرف دیگر از آن جا که بین توابع y_i , $i = 1, \dots, n$ روابط (۱۴.۸) برقرار است پس تعییرات اول این

توابع مستقل از یکدیگر نیستند. در واقع با محاسبه تغییر اول رابطه وابستگی (۱۴.۸) با روشی شبیه دیفرانسیل گیری یک تابع چند متغیره به صورت زیر به دست می آید:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial y_i} \eta_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

از ضرب آن در ضریب لاگرانژ $\lambda_j(x)$ و انتگرال گیری از x_0 تا x_1 به دست می آوریم:

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_j(x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial y_i} \eta_i dx = 0.$$

و یا

$$\delta(g_1, \dots, g_n) = \sum_{j=1}^m \int_{x_0}^{x_1} \lambda_j(x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial y_i} \eta_i dx = 0. \quad (20.8)$$

از جمع (۱۹.۸) و (۲۰.۸) به دست می آوریم:

$$\delta(J + g) = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial y_i} \right] \eta_i dx = 0.$$

حال می توان توابع $\lambda_j(x)$ را طوری انتخاب نمود تا جمله های با ضرایب η_i یکایک صفر شوند. در این صورت:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (21.8)$$

روابط (۲۱.۸) مجموعاً n معادله دیفرانسیل است که همراه با m قید (۱۴.۸) روی هم تعداد $(m + n)$ معادله برای $(m + n)$ مجهول y_1 تا y_n و λ_1 تا λ_m به دست می دهند.

تذکر. برای به دست آوردن دستگاه بالا کافی است دستگاه معادلات اوایلر-لاگرانژ را

$$\text{برای } f + \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j \text{ بنویسیم.}$$

مثال ۸.۸. فاصله بین دو نقطه $(0, 0, 0)$ و $(2, 2, 2)$ را روی استوانه $(y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$ به دست آورید.

حل. اگر $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ، $0 \leq t \leq 1$ ، یک منحنی بین این دو نقطه باشد باید تابع

$$J(x, y, z) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

را همراه با قید و شرایط مرزی زیر مینیمم نمایم:

$$(y-1)^2 + (z-1)^2 = 2, \quad \gamma(0) = (0, 0, 0), \quad \gamma(1) = (2, 2, 2).$$

طبق مطالب بالا تابعی مانند $\lambda(t)$ موجود است به طوری که $\gamma(t)$ جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی زیر است:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} &= 0 \\ -\frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} + 2\lambda(t)(y-1) &= 0 \\ -\frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} + 2\lambda(t)(z-1) &= 0. \end{aligned}$$

با توجه به قید تابعی می‌گیریم $z-1 = \sqrt{2} \sin \phi(t)$ و $y-1 = \sqrt{2} \cos \phi(t)$. در این صورت:

$$\dot{y} = -\sqrt{2} \sin \phi(t) \dot{\phi}, \quad \dot{z} = \sqrt{2} \cos \phi(t) \dot{\phi}, \quad \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2\dot{\phi}^2.$$

معادلات اوایلر-لاگرانژ بر حسب ϕ و x به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + 2\dot{\phi}^2}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\dot{\phi} \sin \phi}{\sqrt{\dot{x}^2 + 2\dot{\phi}^2}} + 2\lambda(t) \cos \phi &= 0 \\ -\frac{d}{dt} \frac{\dot{\phi} \cos \phi}{\sqrt{\dot{x}^2 + 2\dot{\phi}^2}} + 2\lambda(t) \sin \phi &= 0. \end{aligned}$$

با حذف $\lambda(t)$ بین دو معادله آخر به دست می آوریم:

$$\sin \phi \frac{d}{dt} \frac{\dot{\phi} \sin \phi}{\sqrt{\dot{x}^2 + 2\dot{\phi}^2}} + \cos \phi \frac{d}{dt} \frac{\dot{\phi} \cos \phi}{\sqrt{\dot{x}^2 + 2\dot{\phi}^2}} = 0.$$

یا

$$(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \frac{d}{dt} \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{\dot{x}^2 + 2\dot{\phi}^2}} = 0.$$

بدین ترتیب به دست می آوریم:

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{\dot{x}^2 + 2\dot{\phi}^2}} = 0.$$

پس

$$\frac{\dot{\phi}}{\sqrt{\dot{x}^2 + 2\dot{\phi}^2}} = c_1.$$

با اعمال این تساوی در دو معادله آخر دستگاه اویلر-لاگرانژ به دست می آوریم:

$$\lambda(t) = -c_1 \dot{\phi}.$$

همچنین با اعمال آن تساوی در معادله اول اویلر-لاگرانژ به دست می آوریم:

$$\frac{d}{dx} \frac{c_1 \dot{x}}{\dot{\phi}} = 0, \quad \text{یا} \quad \dot{\phi} = c_1 c_2 \dot{x}, \quad \text{یا} \quad \phi = ax + b$$

یا

$$y = \sqrt{2} \cos(ax + b) + 1$$

$$z = \sqrt{2} \sin(ax + b) + 1.$$

با اعمال شرایط مرزی حاصل می گردد:

$$y = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} (x - 3) + 1$$

$$z = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} (x - 3) + 1.$$

ب: قید دیفرانسیلی

اکنون به بررسی مسائل حساب تغییرات با قید دیفرانسیلی می‌پردازیم، این گونه مسائل را مسائل لاگرانژ نیز می‌گویند. این گونه مسائل عبارتست از تعیین مقادیر نهایی برای یک تابع همراه با شرایط مرزی و قید تابعی به صورت زیر است:

$$J(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx \quad (22.8)$$

$$y_k(x_0) = y_{*k}, \quad y_k(x_1) = y_{1k}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (23.8)$$

$$g_k(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (24.8)$$

در ادامه این بخش ضریب لاگرانژ را در ارتباط با قید دیفرانسیلی بدون اثبات ارائه می‌دهیم.

خاصیت ۳.۸. فرض کنید J تابع (۲۲.۸) و در آن f تابعی هموار از x و y_1 تا y'_n باشد. فرض کنید $y = (y_1, \dots, y_n) \in C^2([x_0, x_1])$ یک نهایی کننده J همراه با قید (۲۴.۸) برای $k = 1$ و شرایط مرزی (۲۳.۸) باشد. آنگاه تابعی مانند $\lambda(x)$ موجود است به طوری که

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_j} - \frac{\partial F}{\partial y_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (25.8)$$

که در آن $F = f - \lambda(x)g$.

تذکره. توجه کنید در معادلات (۲۵.۸)، $\lambda'(x)$ ، یعنی مشتق $\lambda(x)$ نیز ظاهر می‌گردد. همچنین توجه کنید قید دیفرانسیلی (۲۴.۸) خود معادله دیفرانسیل است. یعنی در حالتی که فقط یک قید دیفرانسیلی داشته باشیم باید n معادله دیفرانسیل (۲۵.۸) و یک قید دیفرانسیلی یعنی $n + 1$ معادله دیفرانسیل را حل کنیم.

در ارتباط با مطالب بالا مثال زیر را می‌آوریم.

مثال ۹.۸. تابع نهایی کننده تابعک زیر را تحت قید دیفرانسیلی و شرایط مرزی داده شده بیابید.

$$I(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1' + y_2') dx$$

$$g(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = y_1' + y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2(1) = 0.$$

حل. در این جا $F = y_1' + y_2' - \lambda_1(x)(y_1' + y_1 + y_2)$ و طبق خاصیت ۳.۸ معادلات زیر را داریم:

$$\dot{\lambda}_1 - \lambda_1 + 2y_1 = 0$$

$$\lambda_1 - 2y_2 = 0.$$

از این معادلات و قید دیفرانسیلی به دست می‌آوریم:

$$y_1'' - 2y_1 = 0.$$

این معادله دارای جواب عمومی زیر است:

$$y_1 = c_1 \cosh \sqrt{2}x + c_2 \sinh \sqrt{2}x.$$

که در آن c_1 و c_2 مقادیری ثابت‌اند. همچنین از قید دیفرانسیلی به دست می‌آوریم:

$$y_2 = -(c_1 + c_2 \sqrt{2}) \sinh \sqrt{2}x - (c_1 \sqrt{2} + c_2) \cosh \sqrt{2}x$$

$$\lambda_1 = -2(c_1 + c_2 \sqrt{2}) \sinh \sqrt{2}x - 2(c_1 \sqrt{2} + c_2) \cosh \sqrt{2}x.$$

با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آوریم:

$$y_1(0) = c_1 = 0, \quad y_1(1) = c_2 \sinh \sqrt{2} = 1.$$

$$\text{پس } c_1 = 0 \text{ و } c_2 = \frac{1}{\sinh \sqrt{2}}$$

$$y_1 = \frac{\sinh \sqrt{2}x}{\sinh \sqrt{2}}, \quad y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{\sinh \sqrt{2}} \sinh \sqrt{2}x - \frac{\cosh \sqrt{2}x}{\sinh \sqrt{2}}.$$

مثال ۸.۱۰. فرض کنید زنجیری به طول l بین دو نقطه (x_0, y_0) و (x_1, y_1) با $x_0 < x_1$ و $l > y_1, y_0$ در صفحه عمودی (x, y) آویزان است. منحنی زنجیر را بیابید.

حل. اگر s طول قوس زنجیر از نقطه (x_0, y_0) باشد مقدار انرژی پتانسیل زنجیر $J(x, y)$ به صورت زیر است:

$$J(x, y) = \int_0^l y \, ds.$$

همچنین ارتباط بین s ، x و y را به صورت زیر داریم:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1.$$

پس مسئله عبارتست از نهایی کردن تابع زیر تحت قید دیفرانسیلی زیر است:

$$J(x, y) = \int_0^l y \, ds$$

$$x'^2 + y'^2 - 1 = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

بگیرید $F = y - \lambda(x'^2 + y'^2 - 1)$. در این صورت معادلات اوایلر-لاگرانژ را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$2\lambda x' = k_1$$

$$2\lambda y' = s + k_2.$$

که در آن k_1 و k_2 مقادیری ثابت هستند. از این دو معادله و قید دیفرانسیلی به دست می آوریم:

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{k_1^2 + (s + k_2)^2}$$

$$x = \sinh^{-1} \left(\frac{s + k_2}{k_1} \right) + k_3$$

$$y = \sqrt{k_1^2 + (s + k_2)^2} + k_4.$$

که در آن‌ها k_3 و k_4 نیز مقادیری ثابت هستند. با حذف s بین x و y حاصل می‌گردد:

$$y = k_1 \cosh(x - k_3) + k_4.$$

با اعمال شرایط مرزی ثابت‌ها قابل حصول هستند.

تمرین ۲.۸

۱. کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه $(1, 0, 0)$ و $(0, 1, 5)$ را بر روی استوانه $x^2 + y^2 = 1$ بیابید.

۲. کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه $(-1, -1, 1)$ و $(1, 1, 1)$ را بر روی کره $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ بیابید.

۳. تابعک زیر را تحت قید تابعی و شرایط مرزی داده شده نهایی کنید.

$$I(y_1, y_2, y_3) = \int_0^1 \sqrt{y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2} dx$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = 0$$

$$y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 0, \quad y_3(1) = 1.$$

۴. تابعک زیر را تحت قید دیفرانسیلی و شرایط مرزی داده شده نهایی کنید.

$$I(y_1, y_2, y_3) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2) dx$$

$$g(x, y_1, y_2, y_3) = x\dot{y}_1 + \dot{y}_2 + y_3 - 1 = 0$$

$$(y_1, y_2, y_3)(0) = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0), \quad (y_1, y_2, y_3)(1) = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$$

۵. تابع زیر را همراه با قید دیفرانسیلی و شرایط مرزی زیر نهایی کنید.

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1' + y_2') dx$$

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 - y_1, \quad y_1(0) = 1, \quad y_1(1) = 2.$$

۳.۸ شرایط مرزی طبیعی

مسائل تغییراتی که تا به حال مطالعه کردیم به مسائل تغییراتی با کرانه‌های ثابت شهرت دارد. در ساده‌ترین مسئله به دنبال نهایی کردن تابع زیر همراه با شرایط مرزی داده شده هستیم:

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx \quad (۲۶.۸)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1. \quad (۲۷.۸)$$

در این مسئله x_0, x_1, y_0 و y_1 مقادیری معین و ثابت هستند. در مسائل حاوی مشتقات بالاتر شرایط مرزی بیشتری نیاز بود، لیکن این شرایط نیز با مقادیری معین و ثابت بر حسب مشتقات متغیرهای وابسته یا تابع‌های مجهول داده می‌شد. این گونه شرایط مرزی را شرایط مرزی ثابت می‌گویند. در مسائل مقید این گونه شرایط مرزی اثری معین و از پیش تعیین شده بر روی قیود دارد. لیکن در مسائل فیزیکی و هندسی با مسائلی مواجه می‌شویم که یک قسمت یا تمام نقاط مرزی یا مقادیر آنها از پیش تعیین شده نیست و می‌بایستی همراه با تعیین تابع‌های نهایی کننده آنها را نیز تعیین کرد. این گونه مسائل حساب تغییرات را مسائل تغییراتی با کرانه‌های متغیر می‌گویند. در این بخش مسائل تغییراتی با شرایط مرزی آزاد یا طبیعی داریم. در بخش بعدی، به مسائل با شرایط مرزی جابه‌جا شونده می‌پردازیم.

یک نوع از شرایط مرزی، شرایطی مرزی است که طی فرآیند تغییراتی و به صورت طبیعی بر مسئله اعمال می‌گردد. این نوع شرایط مرزی را شرایط مرزی طبیعی یا آزاد گویند. در واقع هیچ شرطی بر روی این نوع شرایط مرزی از پیش وجود ندارد و فرآیند

تغییرات، شرایط مرزی مطلوب را می‌سازد. در این جا خواهیم دید که وضعیت نهایی شده تابع حساب تغییرات شرایط مرزی و مقدار آن را برای مسئله به دست می‌دهد. فرض کنید $J : C^2([x_0, x_1]) \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به شکل (۲۶.۸) و f یک تابع هموار باشد. همچنین فرض کنید $y \in C^2([x_0, x_1])$ یک تابع نهایی کننده J است و هیچ شرط مرزی بر روی y اعمال نشده است. هدف از این بخش تعیین شرایط لازم برای J است تا در y دارای مقدار مینیمم باشد. در این صورت برای $\eta \in C^2([x_0, x_1])$ و $\epsilon \in \mathbb{R}$ و کوچک داریم:

$$I(\epsilon) = J(y + \epsilon\eta) \geq J(y) = I(0).$$

پس باید $\left. \frac{d}{d\epsilon} I(\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = 0$ یا

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0.$$

با به کارگیری انتگرال گیری جزء جزء به دست می‌آوریم:

$$\eta \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} - \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0. \quad (28.8)$$

برای شرایط مرزی ثابت یا از پیش تعیین شده از $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ به دست می‌آوریم:

$$\eta \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=x_0} = \eta \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=x_1} = 0.$$

لیکن برای مسئله بالا که $\eta(x_0)$ و $\eta(x_1)$ از پیش قابل تعیین نیست، نمی‌توان گفت برای تمام η ها این مقادیر برابر صفر است. برای ادامه بحث می‌بایستی η های گوناگونی را در نظر بگیریم.

چون برای هر $\eta \in C^2([x_0, x_1])$ با $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ تساوی (۲۸.۸) باید برقرار

باشد. پس باید داشته باشیم:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (29.8)$$

همچنین چون برای تمام $\eta \in C^2([x_0, x_1])$ ، (۲۸.۸) و (۲۹.۸) برقرار است باید تساوی

$$\eta \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=x_0} - \eta \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=x_1} = 0.$$

برای کلیه $\eta \in C^2([x_0, x_1])$ برقرار باشد. از طرف دیگر $\eta \in C^2([x_0, x_1])$ هایی موجود است به طوری که $\eta(x_0) = 0$ و $\eta(x_1) \neq 0$. برای این گونه η ها از (۲۸.۸) و (۲۹.۸) به دست می آوریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=x_1} = 0. \quad (30.8)$$

به طور مشابه توابعی مانند $\eta \in C^2([x_0, x_1])$ با $\eta(x_0) \neq 0$ و $\eta(x_1) = 0$ موجود است و برای این گونه η ها از (۲۸.۸) و (۲۹.۸) به دست می آوریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=x_0} = 0. \quad (31.8)$$

بدین ترتیب خاصیت زیر را به اثبات رساندیم.

خاصیت ۴.۸. فرض کنید در تابع (۲۶.۸) تابع f هموار و $y \in C^2([x_0, x_1])$ نهایی کننده این تابع بدون اعمال هیچ شرطی مرزی باشد، آنگاه y جواب معادله دیفرانسیل (۲۹.۸) همراه با شرایط مرزی (۳۰.۸) و (۳۱.۸) است.

چون شرایط مرزی (۳۰.۸) و (۳۱.۸) بدون هیچ گونه اعمال شرایطی بر جواب های نهایی کننده تابع J در (۲۶.۸) ظاهر می گردد. این گونه شرایط مرزی را شرایط مرزی طبیعی یا شرایط مرزی آزاد گویند.

مثال ۱۱.۸. تابع $y(x)$ را با دامنه $[0, 1]$ طوری به دست آورید تا تابع زیر را نهایی کند.

$$J(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx$$

حل. معادلات (۲۹.۸)، (۳۰.۸) و (۳۱.۸) را برای این تابع به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} &= \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=0} &= \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \Big|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=1} &= \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \Big|_{x=1} = 0.\end{aligned}$$

از معادله دیفرانسیل به دست می آورید $y'(x) = m$ یا $y = mx + b$. از دو معادله دیگر به دست می آوریم $y'(0) = y'(1) = 0$. پس $m = 0$ و $y = b$ ، یعنی جواب پاره خط افقی $y = b$ بین $x = 0$ و $x = 1$ است.

تذکر. اگر در یکی از دو نقطه مرزی بازه $[x_0, x_1]$ برای تابع $I(y)$ شرط مرزی از پیش تعیین شده داده شده باشد مثلاً $y(x_0) = y_0$ ، در این صورت نقطه مرزی دیگر باید در شرط مرزی طبیعی (۳۰.۸) صدق نماید.

مثال ۱۲.۸. منحنی $y(x) > 0$ را با دامنه $[0, 1]$ طوری انتخاب کنید تا $y(0) = h$ و شرط مرزی در $x = 1$ بصورت آزاد باشد و رویه حاصل از دوران به دور محور x ها مینیمم گردد.

حل. تابع مربوط به دوران را به صورت زیر داریم:

$$I(y) = \int_0^1 y \sqrt{1+y'^2} dx.$$

برای این تابع جواب عمومی معادله اویلر-لاگرانژ آن را قبلاً به صورت زیر به دست آوردیم:

$$y(x) = c_1 \cosh\left(\frac{x}{c_1} + c_2\right).$$

از شرط مرزی $y(0) = h$ به دست می آوریم:

$$h = c_1 \cosh c_2.$$

برای برقراری شرط مرزی طبیعی در نقطه $x = 1$ باید داشته باشیم:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_{x=1} = \frac{y(1)y'(1)}{\sqrt{1+y'^2}} = 0.$$

چون $h > 0$ پس باید $c_1 > 0$. در نتیجه باید $y(1) \neq 0$. بنابراین باید داشته باشیم:

$$y'(1) = \sinh\left(\frac{1}{c_1} + c_2\right) = 0.$$

بدین ترتیب به دست می‌آوریم $c_2 = -\frac{1}{c_1}$ و تابع نهایی کننده به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$y(x) = c_1 \cosh\left(\frac{x-1}{c_1}\right).$$

برای برقراری شرط مرزی $y(0) = h$ یا $y(0) = c_1 \cosh\left(\frac{-1}{c_1}\right) = c_1 \cosh\left(\frac{1}{c_1}\right) = h$ ، بگیریم $c_1 = \frac{1}{t}$. در این صورت باید داشته باشیم $ht = \cosh t$. چون خط $s = ht$ و منحنی $s = \cosh t$ برای h به اندازه کافی بزرگ همدیگر را برای $t > 0$ در دو نقطه قطع می‌کنند. به شکل ۱.۸ توجه کنید.

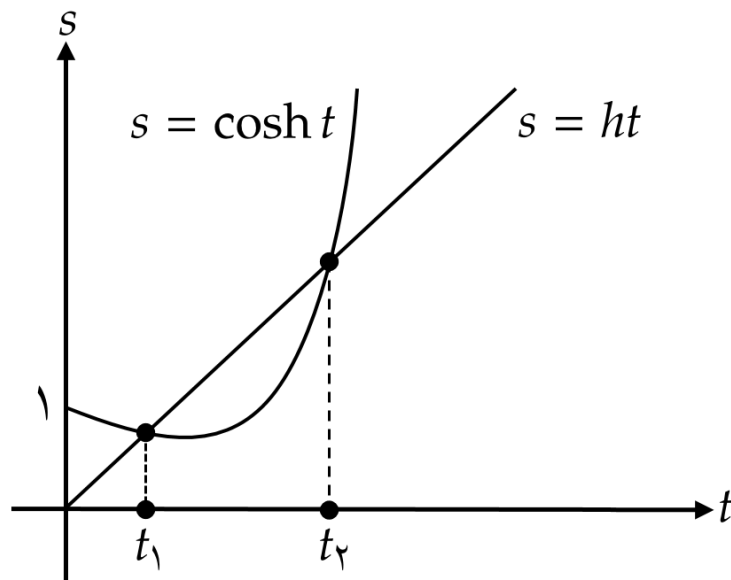
به این ترتیب دو تابع به عنوان نهایی کننده برای $J(y)$ به دست می‌آید. یکی از این دو تابع $J(y)$ را مینیمم می‌کند.

تذکره. شرایط مرزی طبیعی برای تابع‌ها حاوی مشتقات از مرتبه بالاتر از یک با استفاده از انتگرال جزء به جزء با روش مشابه قابل بررسی و تعیین است. به عنوان نمونه برای تابع

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'') dx$$

وقتی که هیچ شرطی مرزی در نقاط x_0 و x_1 اعمال نشده است، معادله اویلر-لاگرانژ به صورت

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (۳۲.۸)$$



شکل ۱.۸

همراه با شرط زیر که برای کلیه $\eta \in C^4([x_0, x_1])$ برقرار است، حاصل می شود.

$$\eta' \frac{\partial f}{\partial y''} - \eta \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y''} - \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \Big|_{x_0}^{x_1} = 0.$$

از این شرط چهار شرط مرزی طبیعی زیر نتیجه می گردد.

$$\frac{\partial f}{\partial y''} \Big|_{x=x_0} = 0, \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y''} - \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=x_0} = 0 \quad (۳۳.۸)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y''} \Big|_{x=x_1} = 0, \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y''} - \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=x_1} = 0. \quad (۳۴.۸)$$

معادله دیفرانسیل (۳۲.۸) از مرتبه چهارم است. انتظار می رود از این چهار شرط مرزی به دست آمده جواب نهایی کننده از جواب عمومی (۳۲.۸) قابل حصول باشد.

تذکره. بدیهی است اگر شرایط مرزی برای یکی از نقاط مرزی از پیش تعیین شده باشد. شرط مرزی طبیعی برای نقطه مرزی دیگر قابل اعمال است.

مثال ۱۳.۸. تیری به طول l را در نظر بگیرید که در امتداد محور افقی از $[0, l]$ کشیده شده است. فرض کنید $y : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ تغییر شکل آن را تحت بار $\rho : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ در واحد طول نشان می‌دهد. منحنی y را در حالات گوناگون شرایط مرزی بیابید.

حل. انرژی پتانسیل تیر تحت نیروی الاستیک عبارتست از

$$v_1 = \frac{k}{2} \int_0^l y''^2 dx$$

که در آن k مقداری ثابت است. همچنین انرژی پتانسیل را تحت نیروی ثقل به صورت زیر داریم:

$$v_2 = - \int_0^l \rho y dx.$$

به این ترتیب کل انرژی پتانسیل را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$J(y) = \int_0^l \left(\frac{ky''^2}{2} - \rho y \right) dx.$$

منحنی شکل تیر به صورتی در می‌آید تا این انرژی پتانسیل مینیمم شود. بنابراین y باید در معادله اویلر-لاگرانژ زیر صدق کند:

$$y^{(4)}(x) = \frac{\rho(x)}{k}.$$

جواب عمومی این معادله به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$y(x) = P(x) + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0. \quad (۳۵.۸)$$

که در آن $P^{(4)}(x) = \frac{\rho(x)}{k}$ و c_k ها طبق معمول ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. مقدار کل نیرویی که به تیر تحت نیروی ثقل وارد می‌شود عبارتست از:

$$F = \int_0^l \rho(x) dx.$$

همچنین از معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم بالا به دست می‌آوریم:

$$k[y'''(l) - y'''(0)] = F.$$

جملات $y'''(l)$ و $y'''(0)$ نیروی عکس‌العمل در دو انتهای تیر معنی می‌گردد. مقدار ممتم تیر تحت نیروی ثقل نسبت به ابتدای تیر عبارتست از:

$$M = \int_0^l x \rho(x) dx.$$

پس:

$$M = k \int_0^l xy^{(*)}(x) dx = k[ly'''(l) - y''(l) + y''(0)].$$

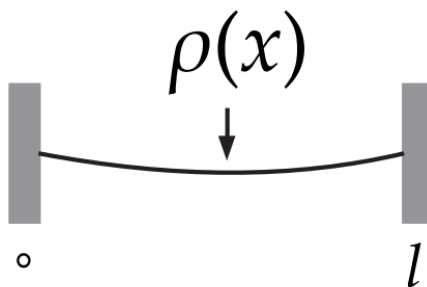
عبارت $ly'''(l)$ عبارت از مقدار ممتمی است که به وسیله نیرو عکس‌العمل در نقطه $x = l$ تولید می‌گردد و $ky''(l)$ و $ky''(0)$ را می‌توان به‌عنوان ممتمی تعبیر نمود که به‌ترتیب در $x = l$ و $x = 0$ تولید می‌گردد.

اکنون منحنی شکل تیر را در حالات گوناگون شرایط مرزی بحث می‌کنیم.

حالت ۱: دو سر درگیر

در این حالت دو انتهای تیر در دیوار فرو رفته است و هر دو سر ثابت است. به شکل ۲.۸ توجه کنید. پس در این حالت شرایط مرزی را به‌صورت زیر داریم:

$$y(0) = y'(0) = y(l) = y'(l) = 0.$$



شکل ۲.۸

در این حالت از (۳۵.۸) و شرایط مرزی بالا به دست می‌آوریم:

$$y = P(x) - \frac{lp'(l) - 2P(l) + 2P(\circ) + P'(\circ)l}{P^3}x^3 + \frac{lp'(l) - 3P(l) + 2P'(\circ)l + 3 + 3P(\circ)}{P^3}x^2 - P'(\circ)x - P(\circ).$$

حالت ۲: یک سر درگیر و یک سر آزاد

در این حالت انتهای $x = \circ$ در دیوار فرو رفته است و انتهای دیگر آزاد است پس در این حالت شرط مرزی در $x = l$ طبیعی است. یعنی داریم:

$$y(\circ) = y'(\circ) = \circ, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y''} \right|_l = ky''(l) = \circ.$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y''} - \frac{\partial f}{\partial y'} = ky'''(l) = \circ.$$

با اعمال این شرایط مرزی از (۳۵.۸) به دست می‌آوریم:

$$y = P(x) - \frac{P'''(l)}{6}x^3 + [P'''(l) - 2P'''(l)]x^2 - P'(\circ)x - P(\circ).$$

در این حالت تساوی $ky'''(l) = \circ$ بیان کننده این مفهوم است که نیروی عکس‌العمل در $x = l$ برابر صفر است.

حالت ۳: دو سر درگیر ساده

در این حالت دو انتهای تیر لولا شده است. به شکل ۳.۸ توجه کنید. پس در این حالت شرایط مرزی را به صورت زیر داریم:

$$y(\circ) = y(l) = \circ.$$

همچنین با استدلالی که برای به دست آوردن معادله اویلر-لاگرانژ در این حالت می‌شود باید جمله اول شرایط مرزی در دو انتها از (۳۳.۸) برقرار باشد. یعنی باید داشته باشیم $y''(\circ) = y''(l) = \circ$. پس در این حالت جواب مینیمم کننده را از (۳۵.۸) به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$y = P(x) - \frac{1}{6l}P''(l) - 2P''(\circ)x^3 - P''(\circ)x^2 - \left(\frac{1}{l}P(l) + \frac{l^2}{6}(P'' - 2P''(\circ)) - lP''(\circ) - P(\circ) \right)x - P(\circ).$$



شکل ۳.۸

حالت ۴: دوسر آزاد

در این حالت در هیچ یک از دو انتها شرط مرزی اعمال نشده است. پس شرایط مرزی در هر دو انتها طبیعی است. در این صورت از (۳۳.۸) این شرایط را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0, \quad y''(l) = 0, \quad y'''(l) = 0.$$

این شرایط مرزی می گوید مقدار نیرو و مقدار ممتمم وارد بر تیر برابر صفر است، یعنی:

$$F = \int_0^l \rho(x) dx = 0, \quad M = \int_0^l x\rho(x) dx = 0.$$

همچنین برای تابع مینیمم کننده به دست می آوریم:

$$y = P(x) - \frac{1}{6}P'''(0)x^3 - \frac{1}{4}P''(0)x^2 + c_1x - c_0.$$

که در آن c_0 و c_1 مقادیری اختیاری هستند.

تذکره. حالت اخیر در اجسام پرنده مطرح می گردد. در مسائل این گونه اجسام مقادیر c_0 و c_1 از اصل فردهلم قابل تعیین است. این اصل می گوید $\rho(x)$ می بایستی طوری انتخاب شود تا نیروی حاصل بر صفحه $y = x$ و صفحه $y = 1$ متعامد باشد.

تمرین ۳.۸

۱. زنجیری به طول $l > ۲$ را روی بازه $[-۱, ۱]$ با شرایط مرزی طبیعی در نظر بگیرید. منحنی مینیمم کننده انرژی پتانسیل آن را بیابید.

۲. مسئله سرسره را روی بازه $[۰, ۱]$ با شرط مرزی $y(۰) = ۱$ و شرط مرزی طبیعی در $x = ۱$ در نظر بگیرید. نشان دهید $y'(۱) = ۰$. همچنین منحنی نهایی کننده را بیابید و مقدار $y(۱)$ را محاسبه کنید.

۳. تابع $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'') dx$ را همراه با شرایط مرزی داده شده $y(۰) = y_0$ و $y(۱) = y_1$ در نظر بگیرید. شرط مرزی دوم را که به صورت طبیعی در هر یک از نقاط مرزی ظاهر می‌گردد به دست آورید.

۴. مسئله تیر را روی بازه $[-۱, ۱]$ با شرایط مرزی گوناگون بحث کنید.

۵. رشد سرمایه در یک سرمایه‌گذاری به وسیله تابع زیر که به مدل رمزی معروف است در فاصله زمانی $[۰, T]$ تعیین می‌گردد. اگر $M(۰) = M_0$ سرمایه اولیه باشد، تابع سرمایه در لحظه t برابر با مقدار $M(t)$ است. تابع $M(t)$ می‌بایستی این تابع را نهایی کند. سرمایه نهایی، یعنی $M(T)$ را بیابید.

$$J(M) = \int_0^T c_1 [c_2 M(t) - M'(t) - c_3]^2 dt.$$

۶. فرض کنید تابع $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ تابعی را بدون شرط مرزی از پیش داده شده نهایی کند. شرایط مرزی طبیعی را برای آن بیابید.

$$J(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx.$$

۴.۸ شرایط مرزی جابه‌جا شونده

در برخی از مسائل حساب تغییرات حدود انتگرال در تابع نهایی شونده ممکن است طبق ضابطه‌ای از پیش تعیین شده جابه‌جا شود. یعنی این گونه مسائل نه دارای شرایط مرزی ثابت است و نه دارای شرایط مرزی طبیعی است. این گونه مسائل را مسائل تغییراتی با کرانه‌های جابه‌جا شونده گویند.

مثال ۱۴.۸. منحنی $y = f(x)$ را با نقطه ابتدایی $(0, 5)$ و انتهای آن نقطه (x_1, y_1) بر روی خط $x + y = 10$ طوری تعیین کنید تا رویه حاصل از دوران آن به دور محور x ها مینیمم گردد. به عبارت دیگر می‌بایستی تابع $y = f(x)$ و نقطه (x_1, y_1) را طوری انتخاب کنیم تا تابع

$$J(y) = \int_0^{x_1} 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

را مینیمم نماید و شرایط مرزی زیر برقرار باشد.

$$y(0) = 5, \quad y(x_1) = y_1, \quad x_1 + y_1 = 10.$$

بدیهی است این مثال با روش‌های قبلی قابل حل نیست. بعد از پیدا کردن راه حل به حل این مسئله می‌پردازیم. مطالب زیر را جهت یافتن راه حل داریم. فرض کنید $J : C^2([x_0, x_1]) \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به شکل زیر است که در آن f تابعی هموار می‌باشد.

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx. \quad (36.8)$$

همچنین فرض کنید $y \in C^2([x_0, x_1])$ یک تابع مینیمم کننده موضعی J همراه با شرایط مرزی $y(x_0) = y_0$ و $y(x_1) = y_1$ و مقادیر x_0, x_1, y_0 و y_1 نامعین است، لیکن (x_0, y_0) بر روی منحنی $y = g(x)$ و (x_1, y_1) بر روی منحنی $y = h(x)$ جابه‌جا می‌شوند. در این جا $y = g(x)$ و $y = h(x)$ دو تابع داده شده می‌باشند. پس در این جا علاوه بر تابع نهایی کننده $y(x)$ مقادیر x_0, x_1, y_0 و y_1 نیز مجهول اند و باید تعیین شوند.

فرض کنید y دارای مشتقات از مرتبه دوم پیوسته و جواب مسئله بالا باشد. در این صورت برای η با مشتقات مرتبه دوم پیوسته و $\epsilon \in \mathbb{R}$ کوچک و $\hat{y} = y + \epsilon\eta$ با دامنه $[\hat{x}_1, \hat{x}_2]$ و $\hat{y}(\hat{x}_1) = h(\hat{x}_1)$ و $\hat{y}(\hat{x}_2) = g(\hat{x}_2)$ داریم:

$$J(\hat{y}) = \int_{\hat{x}_2}^{\hat{x}_1} f(x, \hat{y}, \hat{y}') dx \geq J(y).$$

برای η معین $J(\hat{y})$ و همچنین نقاط $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ و $\hat{y}_1, \hat{y}_2$ توابعی از ϵ هستند. به عبارت دیگر با $\hat{x}_1 = x_1(\epsilon)$ و $\hat{x}_2 = x_2(\epsilon)$ داریم:

$$J(\epsilon) = J(\hat{y}) = \int_{x_2(\epsilon)}^{x_1(\epsilon)} f(x, y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta') dx.$$

چون y تابع مینیمم کننده موضعی است پس برای $|\epsilon|$ کوچک باید داشته باشیم

$$\left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad \text{یا} \quad J(\epsilon) \geq J(0)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \int_{x_2(\epsilon)}^{x_1(\epsilon)} f(x, y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta') dx \right|_{\epsilon=0} \\ &= f(x, y, y') \left. \frac{dx_1(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} - f(x, y, y') \left. \frac{dx_2(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \\ &\quad + \int_{x_2(\epsilon)}^{x_1(\epsilon)} \left. \frac{d}{d\epsilon} f(x, y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta') \right|_{\epsilon=0} dx \end{aligned}$$

لیکن

$$\begin{aligned} &\int_{x_2(\epsilon)}^{x_1(\epsilon)} \left. \frac{d}{d\epsilon} f(x, y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta') \right|_{\epsilon=0} dx \\ &= \int_{x_2(\epsilon)}^{x_1(\epsilon)} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) dx \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{x_2(\epsilon)}^{x_1(\epsilon)} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx \Big|_{\epsilon=0} \\ &\quad + \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x_1(\epsilon)) \right|_{\epsilon=0} - \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x_2(\epsilon)) \right|_{\epsilon=0}. \end{aligned}$$

از طرف دیگر در نقاط کرانه‌ای (x_0, y_0) و (x_1, y_1) تساوی‌های زیر برقرار است:

$$y(x_0(\epsilon)) + \epsilon \eta(x_0(\epsilon)) = g(x_0(\epsilon))$$

$$y(x_1(\epsilon)) + \epsilon \eta(x_1(\epsilon)) = h(x_1(\epsilon)).$$

با مشتق‌گیری از آنها در $\epsilon = 0$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y'(x_0) \frac{dx_0(\epsilon)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \eta(x_0) &= g'(x_0) \frac{dx_0(\epsilon)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \\ y'(x_1) \frac{dx_1(\epsilon)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \eta(x_1) &= h'(x_1) \frac{dx_1(\epsilon)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}. \end{aligned}$$

با جای‌گذاری آنها در $\frac{dJ}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} &= - \left(\frac{f}{g' - y'} + \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \Big|_{x=x_0} + \left(\frac{f}{h' - y'} + \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \Big|_{x=x_1} \\ &\quad + \int_{x_0(\epsilon)}^{x_1(\epsilon)} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx = 0. \end{aligned}$$

تساوی بالا باید برای کلیه η دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته برقرار باشد. از برقراری آن

برای η ‌های با $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \quad (37.8)$$

همچنین برای برقراری آن برای η ‌های با $\eta(x_0) \neq 0$ و $\eta(x_1) = 0$ با توجه به (37.8)

می‌بایستی داشته باشیم:

$$\frac{f}{g' - y'} + \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=x_0} = 0. \quad (38.8)$$

برای برقراری $\frac{dJ}{d\epsilon} \Big|_{x_0} = 0$ برای η ‌های با $\eta(x_1) \neq 0$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{f}{h' - y'} + \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=x_1} = 0. \quad (39.8)$$

تذکره ۱) در حالتی که شرط مرزی در نقطه (x_0, y_0) از پیش داده شده باشد و فقط شرط مرزی در x_1 جابه‌جا شونده باشد در این صورت (۳۷.۸) و (۳۹.۸) و در حالتی که شرط مرزی در نقطه (x_1, y_1) از پیش داده شده باشد حل مسئله منجر به (۳۷.۸) و (۳۸.۸) می‌گردد.

۲) برای غیرمبهم بودن (۳۸.۸) و (۳۹.۸) می‌بایستی $y'(x_0) \neq g'(x_0)$ و $h'(x_1) \neq y'(x_1)$ هر یک از این دو شرط برای مسائلی که دارای جواب فیزیکی‌اند به‌صورت طبیعی برقرار است و آن را شرط اوریب می‌گویند.

اکنون به حل مثال ۱۴.۸ می‌پردازیم.

حل مثال ۱۴.۸. معادله اویلر-لاگرانژ را برای مثال ۱۴.۸ به‌صورت زیر داریم:

$$y\sqrt{1+y'^2} - y' \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1.$$

جواب عمومی این معادله که همانند مسئله زنجیر است قبلاً به‌صورت زیر به‌دست آوردیم:

$$y(x) = c_1 \cosh\left(\frac{x}{c_1} + c_2\right).$$

از شرط مرزی $y(0) = 5$ به‌دست می‌آوریم:

$$5 = c_1 \cosh c_2.$$

از شرط اوریب (۳۹.۸) و معادله خط در نقطه (x_1, y_1) دو معادله زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{y_1 \sqrt{1+y'^2(x_1)}}{-1-y'(x_1)} + \frac{y_1 y'(x_1)}{\sqrt{1+y'^2(x_1)}} = 0.$$

$$x_1 + y_1 = 10.$$

یا

$$y'(x_1) = 1, \quad x_1 + y_1 = 10.$$

همچنین (x_1, y_1) در روی نمودار منحنی نهایی کننده قرار دارد. پس تساوی‌های زیر برقرار است:

$$y_1 = c_1 \cosh\left(\frac{x_1}{c_1} + c_2\right), \quad c_1 \cosh c_2 = 5.$$

همچنین داریم:

$$\sinh\left(\frac{x_1}{c_1} + c_2\right) = 1, \quad x_1 + y_1 = 10.$$

از معادلات به‌دست می‌آوریم $x_1 = 10 - \sqrt{2}c_1$ و $y_1 = \sqrt{2}c_1$ و c_1 و $c_2 = \cosh^{-1} \frac{c_1}{5}$ جواب معادله زیر است:

$$\sinh\left(\frac{10 - \sqrt{2}c_1}{c_1} + \cosh^{-1} \frac{5}{c_1}\right) = 10.$$

■

اکنون تابع نهایی شونده دارای دو تابع مجهول

$$J(y, z) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z') dx \quad (4.8)$$

را همراه با شرایط مرزی ثابت $y(x_0) = y_0$ و $z(x_0) = z_0$ در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید شرط مرزی در نقطه x_1 جابه‌جا شونده و این جابجائی بر روی منحنی $y = g(x)$ و $z = h(x)$ صورت می‌گیرد. در این صورت معادلات اویلر-لاگرانژ و شرط اوریب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} &= 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} = 0. \\ f + (g' - y') \frac{\partial f}{\partial y'} + (h' - z') \frac{\partial f}{\partial z'} \Big|_{x=x_1} &= 0. \end{aligned}$$

برای دیدن این مطلب فرض کنید $f \in C^2([x_0, x_1] \times \mathbb{R}^2)$ و $y \in C^2([x_0, x_1])$ جواب مینیمم کننده مسئله بالا باشد. در این صورت برای هر $\eta_1, \eta_2 \in C^2([x_0, x_1])$ با،

$\eta_1(x_0) = \eta_2(x_0) = 0$ و $|\epsilon|$ کوچک داریم $J(y + \epsilon\eta_1, z + \epsilon\eta_2) \geq J(y, z)$ یا به طور مختصر $J(\epsilon) \geq J(0)$. پس باید $\left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$ لیکن

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \int_{x_0}^{x_1(\epsilon)} f(x, y + \epsilon\eta_1, z + \epsilon\eta_2, y' + \epsilon\eta'_1, z' + \epsilon\eta'_2) dx \right|_{\epsilon=0} \\ &= f \frac{dx_1(\epsilon)}{d\epsilon} + \int_{x_0}^{x_1(\epsilon)} (f_{y_1}\eta_1 + f_{y'_1}\eta'_1 + f_{z_1}\eta_2 + f_{z'_1}\eta'_2) dx \Big|_{\epsilon=0}. \end{aligned}$$

با به کارگیری انتگرال جز به جزء به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= f \frac{dx_1(\epsilon)}{d\epsilon} + \int_{x_0}^{x_1(\epsilon)} \left[\left(f_{y_1} - \frac{d}{dx} f_{y'_1} \right) \eta_1 + \left(f_{z_1} - \frac{d}{dx} f_{z'_1} \right) \eta_2 \right] dx \\ &\quad + \left(f_{y'_1} \eta_1 \Big|_{x_1(\epsilon)} + f_{z'_1} \eta_2 \Big|_{x_1(\epsilon)} \right) \Big|_{\epsilon=0} = 0. \end{aligned}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned} y(x_1(\epsilon)) + \epsilon\eta_1(x_1(\epsilon)) &= g(x_1(\epsilon)) \Big|_{\epsilon=0} \\ z(x_1(\epsilon)) + \epsilon\eta_2(x_1(\epsilon)) &= h(x_1(\epsilon)) \Big|_{\epsilon=0}. \end{aligned}$$

با مشتق گیری از آنها در $\epsilon = 0$ به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} y' \frac{dx_1(\epsilon)}{d\epsilon} + \eta_1 &= g' \frac{dx_1(\epsilon)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \\ z' \frac{dx_1(\epsilon)}{d\epsilon} + \eta_2 &= h' \frac{dx_1(\epsilon)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}. \end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\eta_1 = (g' - y') \frac{dx_1(\epsilon)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}, \quad \eta_2 = (h' - z') \frac{dx_1(\epsilon)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}. \quad (41.8)$$

با جایگذاری آنها در $\left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \int_{x_0}^{x_1(\epsilon)} \left[\left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right) \eta_1 + \left(f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} \right) \eta_2 \right] dx \\ &+ \frac{dx_1(\epsilon)}{d\epsilon} [f + f_{y'}(g' - y') + f_{z'}(h' - z')] = 0. \end{aligned} \quad (42.8)$$

برای η_1 و $\eta_2 \equiv 0$ و تمام $\eta_1(x)$ ها با $\eta_1(x_1) = 0$ از (41.8) به دست می‌آوریم $\left. \frac{dx_1(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$ حال چون برای تمام $\eta_1(x)$ ها با $\eta_1(x_1) = 0$ رابطه (42.8) برقرار است، پس

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0.$$

به صورت مشابه برای η_1 و $\eta_2 \equiv 0$ با $\eta_1(x_1) = 0$ نیز می‌بایستی داشته باشیم:

$$f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} = 0.$$

اگر $\eta_1(x_1) \neq 0$ و $\eta_2(x_1) \neq 0$ باشد، به دست می‌آوریم:

$$[f + f_{y'}(g' - y') + f_{z'}(h' - z')] \Big|_{x=x_1} = 0.$$

به این ترتیب خاصیت زیر را به اثبات رساندیم.

خاصیت ۵.۸. فرض کنید در تابع (40.8)، $f \in C^2([x_0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$ و

$y, z \in C^2([x_0, x_1])$ تابع (40.8) را همراه با شرایط مرزی ثابت $y(x_0) = y_0$ و

$z(x_0) = z_0$ و نقطه متحرک (x_1, y_1, z_1) بر روی منحنی $y = g(x)$ و $z = h(x)$ نهایی

کنند، آن گاه y و z جواب مسئله اویلر-لاگرانژ زیر است:

$$\begin{aligned} f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} &= 0, \quad f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} = 0 \\ [f + f_{y'}(g' - y') + f_{z'}(h' - z')] \Big|_{x=x_1} &= 0 \end{aligned}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad z(x_0) = z_0, \quad z(x_1) = z_1$$

$$y_1 = g(x_1), \quad z_1 = h(x_1).$$

مثال ۱۵.۸. تابع $J(y, z) = \int_0^{x_1} (y'^2 + z'^2 + 2y - 4z) dx$ را همراه با شرایط مرزی ثابت $y(0) = 0$ و $z(0) = 0$ و شرط مرزی جابه‌جا شونده نقطه (x_1, y_1, z_1) بر روی منحنی $x_1 + y_1 = 5$ و $2x_1 + z_1 = 5$ و $x_1 > 0$ نهایی کنید.

حل. معادلات اویلر-لاگرانژ به صورت زیر است:

$$2y'' - 2 = 0, \quad 2z'' + 4 = 0.$$

از حل آنها به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{1}{4}x^2 + c_1x + c_2, \quad z = -x^2 + c_3x + c_4.$$

با اعمال شرایط مرزی در نقطه $(0, 0, 0)$ به دست می‌آوریم:

$$c_2 = y(0) = 0, \quad c_4 = z(0) = 0.$$

شرایط مرزی در نقطه (x_1, y_1, z_1) به صورت زیر است:

$$x_1 + y_1 = 5, \quad 2x_1 + z_1 = 5$$

$$[f + f_{y'}(-1 - y') + f_{z'}(-2 - z')] \Big|_{\epsilon=0} = 0.$$

یا

$$y_1 = 5 - x_1, \quad z_1 = 5 - 2x_1$$

$$-(x_1 + c_1)^2 - (-2x_1 + c_3)^2 + x_1^2 + c_1x_1 + 4x_1^2 - 4c_1x_1 - 2(x_1 + c_1) - 4(-x_1 + c_3) = 0,$$

$$y_1 = \frac{1}{4}x_1^2 + c_1x_1$$

$$z_1 = -x_1^2 + c_3x_1.$$

از حل این پنج معادله و پنج مجهولی c_1, c_3, x_1, y_1 و z_1 به دست می‌آیند.

تذکره ۱) چنان‌چه نقطه (x_0, y_0, z_0) در خاصیت بالا متحرک باشد، معادلات اوایلر-لاگرانژ و معادلات شرایط مرزی کاملاً مشابه نقطه (x_1, y_1, z_1) به‌دست می‌آید.

۲) چنان‌چه تعداد تابع‌های مجهول بیشتر از دو مثلاً y_1 تا y_m باشند و نقطه x_1 روی منحنی $y_k = g_k(x)$, $k = 1, \dots, m$ ، جابجا شود، در این صورت:

$$f_{y_k} - \frac{d}{dx} f_{y'_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m$$

$$f + \sum_{k=1}^m f_{y'_k} (g'_k - y'_k) = 0.$$

اکنون تابعک خاصیت بالا را در نظر بگیرید که شرط مرزی در نقطه (x_0, y_0, z_0) ثابت و شرط مرزی در نقطه (x_1, y_1, z_1) بر روی رویه $g(x, y, z) = 0$ جابجا می‌شود. فرض کنید f, y, z, η_1 و η_2 مانند قبل و $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}$ با $|\epsilon_1|$ و $|\epsilon_2|$ کوچک و y و z تابعک $J(y, z)$ را مینیمم کنند، در این صورت:

$$J(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_{x_0}^{x_1(\epsilon_1, \epsilon_2)} f(x, y + \epsilon_1 \eta_1, z + \epsilon_2 \eta_2, y' + \epsilon_1 \eta'_1, z' + \epsilon_2 \eta'_2) dx$$

$$\geq J(0, 0).$$

پس باید داشته باشیم:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \epsilon_1} \right|_{\epsilon=0} = f \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_1} + \int_{x_0}^{x_1(\epsilon)} \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right) \eta_1 dx + (f_{y'} \eta_1) \Big|_{x=x_1(\epsilon), \epsilon=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \epsilon_2} \right|_{\epsilon=0} = f \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_2} + \int_{x_0}^{x_1(\epsilon)} \left(f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} \right) \eta_2 dx + (f_{z'} \eta_2) \Big|_{x=x_1(\epsilon), \epsilon=0} = 0.$$

که در آن $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2)$. از طرف دیگر داریم $g(x_1, y_1 + \epsilon_1 \eta_1, z_1 + \epsilon_2 \eta_2) = 0$ با

مشتق‌گیری از آن نسبت به ϵ_1 و ϵ_2 به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} g_x \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_1} + g_y y' \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_1} + g_y \eta_1 + g_y \epsilon_1 \eta'_1 \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_1} + g_z z' \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_1} \\ + g_z \epsilon_2 \eta'_2 \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_1} \Big|_{\epsilon=0} = 0 \\ g_x \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_2} + g_y y' \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_2} + g_y \epsilon_1 \eta'_1 \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_2} + g_z z' \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_2} + g_z \eta_2 \\ + g_z \epsilon_2 \eta'_2 \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_2} \Big|_{\epsilon=0} = 0. \end{aligned}$$

از دو تساوی بالا به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_1} &= - \frac{g_y \eta_1}{g_x + g_y y' + g_z z'} \Big|_{(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \epsilon_2} &= - \frac{g_z \eta_2}{g_x + g_y y' + g_z z'} \Big|_{(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)}. \end{aligned}$$

با قرار دادن این مقادیر در $\frac{\partial J}{\partial \epsilon_1}$ و $\frac{\partial J}{\partial \epsilon_2}$ و انجام بحث‌های مربوط به مقادیر مختلف η_1 و η_2 نتیجه خواهیم گرفت که توابع مینیمم‌کننده y و z می‌بایستی جواب دو معادله دیفرانسیل و دو مجهولی همراه با شرایط مرزی زیر باشد.

$$\begin{aligned} f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} &= 0, \quad f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} = 0 \\ f_{y'} - \frac{g_y f}{g_x + g_y y' + g_z z'} \Big|_{(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)} &= 0 \\ f_{z'} - \frac{g_z f}{g_x + g_y y' + g_z z'} \Big|_{(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)} &= 0 \\ g(x_1, y_1, z_1) &= 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \\ z(x_0) &= z_0, \quad z(x_1) = z_1. \end{aligned}$$

به این ترتیب خاصیت زیر را ثابت نمودیم.

خاصیت ۶.۸. فرض کنید در تابع $J(y, z) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z') dx$ تابع f با دامنه $[x_0, x_1] \times \mathbb{R}^4$ دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته و $y, z \in C^2([x_0, x_1])$ و $y(x_0) = y_0$ و $z(x_0) = z_0$ و نقطه متحرک (x_1, y_1, z_1) بر روی رویه $g(x, y, z) = 0$ نهایی کنند، آن گاه y و z جواب مسئله اویلر-لاگرانژ زیر است:

$$\begin{aligned} f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} &= 0, & f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} &= 0 \\ f_{y'} - \frac{g_y f}{g_x + g_y y' + g_z z'} \Big|_{(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1)} &= 0 \\ f_{z'} - \frac{g_z f}{g_x + g_y y' + g_z z'} \Big|_{(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1)} &= 0 \\ g(x_1, y_1, z_1) &= 0, & y(x_0) &= y_0, & y(x_1) &= y_1 \\ z(x_0) &= z_0, & z(x_1) &= z_1. \end{aligned}$$

تذکره ۱) چنانچه نقطه (x_0, y_0, z_0) روی رویه $h(x, y, z) = 0$ جابجا شود، فرمول‌های مشابه بالا با قرار دادن (x_0, y_0, z_0) به جای (x_1, y_1, z_1) و h به جای g به دست می‌آید.

۲) چنانچه تعداد تابع‌های مجهول بیشتر از دو تا باشد، فرمول‌های کاملاً مشابه حالت دو تابع مجهول به دست می‌آید.

۳) دو تساوی بالا در نقطه (x_1, y_1, z_1) را شرایط اوریب گویند.

مثال ۱۶.۸. فاصله نقطه $(0, 1, 1)$ را از صفحه $x + y + z = 5$ به دست آورید.

حل. اگر (x_1, y_1, z_1) نقطه‌ای روی صفحه مذکور باشد، $J(y, z)$ طول منحنی y و z است که نقطه $(0, 1, 1)$ را به این نقطه وصل می‌کند. پس این منحنی باید به عنوان

مینیمم‌کننده مسئله زیر باشد:

$$J(y, z) = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

$$x_1 + y_1 + z_1 - 5 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(x_1) = y_1$$

$$z(0) = 1, \quad z(x_1) = z_1.$$

پس برای منحنی با طول مینیمم که برابر فاصله نقطه $(0, 1, 1)$ از صفحه مذکور است، باید داشته باشیم:

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = c_1$$

$$\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = c_2$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} - \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{1 + y' + z'} \Big|_{(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)} = 0$$

$$\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} - \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{1 + y' + z'} \Big|_{(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)} = 0$$

$$x_1 + y_1 + z_1 - 5 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(x_1) = y_1$$

$$z(0) = 1, \quad z(x_1) = z_1.$$

از حل دستگاه معادلات دیفرانسیل به دست می‌آوریم:

$$y = ax + b, \quad z = cx + d.$$

همچنین از دو معادله شرایط اوریب در نقطه (x_1, y_1, z_1) به دست می‌آوریم:

$$y' \Big|_{(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)} = 1, \quad z' \Big|_{(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)} = 1.$$

پس باید داشته باشیم $a = 1$ و $c = 1$. یعنی منحنی مطلوب خط $y = x + 1$ و $z = x + 1$ است. همچنین نقطه (x_1, y_1, z_1) می‌بایستی در معادلات زیر صدق کند.

$$x_1 + y_1 + z_1 = 5, \quad y_1 = x_1 + 1, \quad z_1 = x_1 + 1.$$

از حل این دستگاه سه معادله و سه مجهولی به‌دست می‌آوریم:

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 2, \quad z_1 = 2$$

$$J(y, z) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{3} dx = \sqrt{3}.$$

توجه کنید خط واصل دو نقطه $(0, 1, 1)$ و $(1, 2, 2)$ بر صفحه $x + y + z = 5$ عمود است.

اکنون در این جا یک مثال اقتصادی ارائه می‌دهیم.

مثال ۱۷.۸ (مدل رشد سرمایه رمزی). فرض کنید $y = y(t)$ برای $t \geq 0$ مقدار سرمایه یک شرکت با سرمایه اولیه $y_0 = y(0)$ در لحظه t باشد. در یک سرمایه‌گذاری میزان رشد سرمایه در لحظه t با تابع زیر مشخص می‌گردد:

$$J(y) = \int_0^t a(by - y' - c)^2 dt, \quad y(0) = y_0.$$

در این جا a, b, c و مقادیر ثابت و مثبت هستند و $J(y)$ مقدار سود را در لحظه t به‌دست می‌دهد. این سرمایه‌گذاری طوری است که در هر لحظه T مقدار سود ماگزیمم است. تابع $y(t)$ را مشخص کنید.

حل. می‌بایستی $y(t)$ را طوری انتخاب کنیم تا $J(y)$ ماگزیمم گردد. چون در تابع زیر انتگرال این تابع، متغیر t ظاهر نشده است پس معادله اویلر-لاگرانژ را می‌توانیم به‌صورت زیر داشته باشیم:

$$f - y' f_{y'} = a(by - y' - c)^2 + 2ay'(by - y' - c)$$

$$= a(by - y' - c)(by + y' - c) = a[(by - c)^2 - y'^2] = aA = \text{ثابت}.$$

$$y' = \sqrt{(by - c)^2 - A} \quad \text{یا} \quad (y')^2 = (by - c)^2 - A \quad \text{پس}$$

از حل این معادله دیفرانسیل برای مقادیر مختلف A به دست می‌آوریم:

$$y(t) = \frac{c}{b} + Be^{\pm bt} \quad \text{برای } A = 0$$

$$y(t) = \frac{c}{b} \pm \frac{\sqrt{-A}}{b} \sinh(bt + B) \quad \text{برای } A < 0$$

$$y(t) = \frac{c}{b} \pm \frac{\sqrt{A}}{b} \cosh(bt + B) \quad \text{برای } A > 0.$$

که در آنها B یک ثابت انتگرال‌گیری است. شرط مرزی در $t = 0$ برابر y_0 است. لیکن شرط مرزی در T یک شرط مرزی آزاد است. پس برای این لحظه باید داشته باشیم:

$$f_{y'} \Big|_{t=T} = by(T) - y'(T) - c = 0$$

یا

$$y'(T) - by(T) = -c \implies y(T) = \frac{c}{b} + Be^{bT}.$$

بنابراین از جواب‌های بالا جواب زیر قابل قبول است.

$$y(t) = \frac{c}{b} + Be^{bt}.$$

با اعمال شرط مرزی در $t = 0$ به دست می‌آوریم:

$$y(0) = \frac{c}{b} + B = y_0 \implies B = y_0 - \frac{c}{b}.$$

به این ترتیب جواب نهایی به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$y(t) = \frac{c}{b} + (y_0 - \frac{c}{b})e^{bt}, \quad t \geq 0.$$

برای افزایش سرمایه می‌بایستی $y_0 - \frac{c}{b} > 0$ یا $y_0 > \frac{c}{b}$ باشد.

تمرین ۴.۸

۱. تابع سراسره را قبلاً به صورت $I(y) = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$ به دست آوردیم. تابع $y(x)$ را طوری انتخاب کنید تا از نقطه $(0, 0)$ بگذرد و انتهای دیگر آن یعنی نقطه $(x_1, y(x_1))$ بر روی خط $y = x - 1$ قرار گیرد و تابع بالا را نهایی کند.

۲. زنجیری به طول $l = 4$ یک سر آن بر روی خط $y - x = 4$ و سر دیگر آن بر روی خط $y + 2x = 4$ قرار دارد. منحنی زنجیر را بیابید.

۳. تابع نهایی کننده تابع $I(y) = \int_0^{x_1} (y'^2 + y^2) dx$ را طوری به دست آورید تا از نقطه $(0, 0)$ بگذرد و سر دیگر آن یعنی نقطه $(x_1, y(x_1))$ بر روی خط $y = 1 - x$ قرار داشته باشد.

۴. منحنی $y = f(x)$ را طوری انتخاب کنید تا یک سر آن بر روی خط $y - x = 3$ و سر دیگر آن بر روی خط $y + 2x = 3$ قرار گیرد و رویه حاصل از دوران آن حول محور y ها مینیمم گردد.

۵. منحنی $y = f(x)$ که یک سر آن بر روی خط $y - x = -1$ و سر دیگر آن بر روی خط $y + x = 5$ قرار دارد طوری انتخاب کنید تا طول آن برابر ۳ و رویه حاصل از دوران آن به دور محور y ها مینیمم گردد.

فصل ۹

مسئله معکوس و روش‌های مستقیم

حل مسئله تغییراتی به صورت مستقیم مقدور است. در حقیقت روش‌های بسیار خوبی برای این منظور موجود است که جواب این گونه مسائل را به طور تقریبی به دست می‌دهد. از طرف دیگر حل بعضی از مسائل معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی به صورت تحلیلی مقدور نیست. برای این گونه مسائل به دنبال جواب تقریبی هستیم. یک روش حل برای این گونه مسائل این است که آنها را به مسائل تغییراتی تبدیل می‌کنند. سپس از روش‌های تقریبی، جوابی مناسب برای مسئله اولیه به دست می‌آورند. هدف از این فصل ارائه روشی است تا با استفاده از آن مسئله معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی را به صورت مسائل تغییراتی تبدیل و سپس آن را حل کنیم. در بخش ۱.۹ مسئله معکوس داریم. در این بخش خواهیم دید چگونه می‌توان یک مسئله معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی را به یک مسئله حساب تغییرات تبدیل کرد. سپس در بخش ۲.۹ روش مستقیم ریتز برای یافتن جواب تقریبی مسائل تغییراتی خواهد آمد.

۱.۹ مسئله معکوس

فرض کنید معادله دیفرانسیل زیر داده شده باشد:

$$y'' - F(x, y, y') = 0. \quad (1.9)$$

مسئله معکوس عبارت از تعیین تابع، $f(x, y, y')$ است به طوری که y جوابی از معادله (۱.۹) باشد، اگر و فقط اگر y جوابی از معادله دیفرانسیل زیر باشد:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (2.9)$$

حالت ۱: ابتدا فرض کنید معادله دیفرانسیل (۱.۹) خطی از مرتبه دوم به صورت

$$y'' + Py' + Qy - G = 0. \quad (3.9)$$

باشد که در آن P, Q و G توابعی پیوسته از x هستند. برای به دست آوردن تابع f مطلوب، این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(py')' + qy - g = 0. \quad (4.9)$$

برای این منظور بگیرید:

$$p = e^{\int P(x) dx}, \quad q = Qp, \quad g = Gp.$$

بدین ترتیب معادله (۳.۹) به معادله (۴.۹) تبدیل می‌گردد. حال بگیرید:

$$f(x, y, y') = \frac{1}{p}(py'^2 - qy^2 + 2gy) \quad (5.9)$$

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx.$$

در این صورت معادله اوایلر-لاگرانژ این تابع به صورت (۴.۹) یا معادل آن (۳.۹) است.

مثال ۱.۹. مسئله زیر را به صورت یک مسئله حساب تغییرات بنویسید.

$$y'' + 2y' + 8y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

حل. با مقایسه این معادله با معادله (۳.۹) داریم $P = 2, Q = 8, G = 0$. پس $p = e^{2x}$ و صورت کانونیک عبارتست از:

$$(e^{2x}y')' + 8e^{2x}y = 0.$$

بدین ترتیب مسئله تغییراتی مطلوب به صورت زیر حاصل می گردد:

$$J(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{2x} y'^2 - \lambda e^{2x} y^2) dx$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

حالت ۲: در این حالت تبدیل مسئله معادله دیفرانسیل با شرط مرزی را برای معادله خطی خواهیم دید این روش هم برای معادلات دیفرانسیل عادی از مرتبه بالاتر از دو و هم برای معادلات پاره ای کاربرد خوبی دارد.

فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ یک مجموعه باز، همبند و کرانه دار با مرز هموار $\partial\Omega$ و M فضای برداری توابع قطعه به قطعه پیوسته با دامنه Ω باشد. روی این فضا ضرب داخلی زیر را در نظر می گیریم:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv \, d\Omega.$$

تعریف ۱.۹. عملگر دیفرانسیل خطی $\mathcal{L} : M \rightarrow M$ را متقارن گوییم اگر برای هر $u, v \in M$ و شرایط مرزی همگن داشته باشیم:

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{L}v \rangle.$$

تعریف ۲.۹. عملگر دیفرانسیل خطی $\mathcal{L} : M \rightarrow M$ را مثبت گوییم اگر برای هر $u \in M$ با $u \neq 0$ و شرایط مرزی همگن داشته باشیم:

$$\langle \mathcal{L}u, u \rangle > 0.$$

اولین قضیه را در ارتباط با مفاهیم بالا به صورت زیر داریم:

خاصیت ۱.۹. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک عملگر دیفرانسیل متقارن و مثبت روی زیر فضای $M' \subset M$ و f تابعی پیوسته با دامنه Ω باشد. اگر معادله دیفرانسیل خطی

$$\mathcal{L}u = f \tag{۶.۹}$$

همراه با شرایط مرزی همگن روی Ω دارای جوابی یگانه باشد، آن گاه این جواب تابعک زیر همراه با شرایط مرزی مذکور را مینیمم می‌کند:

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}u, u \rangle - \langle u, f \rangle = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} u \mathcal{L}u - u f \right) d\Omega. \quad (۷.۹)$$

برعکس اگر u ای تابعک همراه با شرایط مرزی فوق را نهایی کند، آنگاه این u جواب مسئله معادله دیفرانسیل فوق است.

تحت شرایط قوی‌تر نتایج بهتری نیز می‌توان داشت. در این ارتباط تعریف زیر را داریم.

تعریف ۳.۹. عملگر دیفرانسیل خطی $\mathcal{L}$ را اکیداً مثبت یا مثبت اکید گوئیم اگر عدد ثابت $a > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $u \in M$ داشته باشیم $\langle \mathcal{L}u, u \rangle > a \langle u, u \rangle$.

خاصیت ۲.۹. فرض کنید عملگر دیفرانسیل $\mathcal{L}$ در قضیه بالا عملگری متقارن و اکیداً مثبت باشد در این صورت مسئله تغییراتی (۷.۹) دارای جواب مینیمم کننده است.

برای دیدن اثبات قضایای بالا به فصل هشتم کتاب [۶] مراجعه کنید.

تعریف ۴.۹. جواب نهایی کننده $J(u)$ همراه با شرایط مرزی داده شده فوق را یک جواب تعمیم یافته معادله $\mathcal{L}u = f$ همراه با شرایط مرزی گویند.

مثال ۲.۹. نشان دهید در مسئله با شرایط مرزی زیر که در آن k یک عدد حقیقی است، عملگر دیفرانسیل متقارن و اکیداً مثبت می‌باشد.

$$\begin{cases} -u'' + k^2 u = f, & a \leq x \leq b \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

همچنین مسئله تغییراتی وابسته را بنویسید.

حل. داریم $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + k^2$. این عملگر $\mathcal{L}$ را روی فضای برداری توابع $C^2([a, b])$ در نظر بگیرید. برای u و v در این فضای برداری و شرایط مرزی همگن می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}u, v \rangle &= \int_a^b (-u'' + k^2 u)v \, dx = - \int_a^b u''v \, dx + \int_a^b k^2 uv \, dx \\ &= -[u'v]_a^b + \int_a^b u'v' \, dx + \int_a^b k^2 uv \, dx \\ &= [uv']_a^b - \int_a^b uv'' \, dx + \int_a^b k^2 uv \, dx.\end{aligned}$$

چون برای شرایط مرزی همگن داریم $[uv']_a^b = [u'v]_a^b = 0$ پس:

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \int_a^b (u'v' + k^2 uv) \, dx = \langle u, \mathcal{L}v \rangle.$$

پس این عملگر دیفرانسیل متقارن است. همچنین داریم:

$$\langle \mathcal{L}u, u \rangle = \int_a^b (u'^2 + k^2 u^2) \, dx.$$

پس این عملگر اکیداً مثبت نیز است. مسئله تغییراتی وابسته را نیز به صورت زیر داریم:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_a^b [u'^2 + k^2 u^2 - 2uf] \, dx.$$

مثال ۳.۹. معادله دیفرانسیل پاره‌ای زیر را روی میدان همبند ساده $D \subset \mathbb{R}^2$ در نظر بگیرید:

$$-\mathcal{L}u = \Delta u(x, y) = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y).$$

در سمت چپ این معادله عملگر دیفرانسیل لاپلاس بر روی تابع مجهول $u \in C^2(\overline{D})$ عمل می‌کند و در سمت راست تابع $f \in C(\overline{D})$ است. این معادله همراه با شرایط مرزی دیریکله همگن

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial D$$

دارای جواب یگانه است. اکنون نشان می‌دهیم این عملگر متقارن و مثبت است. ابتدا نشان می‌دهیم متقارن است. این کار با استفاده از قضیه گرین انجام می‌شود که در تساوی اول ظاهر می‌شود.

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}u, v \rangle &= \iint_D v(u_x^* + u_y^*) dx dy \\ &= \int_{\partial D} v u_y dx - v u_x dy + \iint_D (u_x v_x + u_y v_y) dx dy.\end{aligned}$$

چون روی ∂D داریم $u = v = 0$ پس

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \iint_D (u_x v_x + u_y v_y) dx dy.$$

بنابراین $\mathcal{L}$ متقارن است. با توجه به تساوی فوق باید داشته باشیم:

$$\langle \mathcal{L}u, u \rangle = \iint_D (u_x^* + u_y^*) dx dy.$$

پس $\mathcal{L}$ مثبت است. همچنین داریم:

$$\langle u, -f \rangle = - \iint_D u f(x, y) dx dy.$$

بدین ترتیب تابع تغییراتی مسئله دیریکله معادله پواسون را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$J(u) = \frac{1}{2} \iint_D (u_x^* + u_y^* + 2uf) dx dy.$$

در بخش بعدی روش مستقیم ریتز را معرفی می‌کنیم.

تمرین ۱.۹

۱. نشان دهید عملگر زیر متقارن و اکیداً مثبت است.

$$L = -p(x) \frac{d^2}{dx^2} - p'(x) \frac{d}{dx} + q(x)$$

در این جا $p(x)$ و $q(x)$ توابعی پیوسته و $p(x)$ دارای مشتق پیوسته با $p(x) > 0$ و $q(x) > 0$ می باشد.

۲. مسائل با شرایط مرزی زیر را به صورت یک مسئله تغییراتی بنویسید.

$$\begin{array}{ll} x^2 y'' + xy' - y = \ln x & \text{(آ)} \\ y'' + 2y' + y = \sin x & \text{(ب)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} y(1) = 0, & y(e) = 0 \\ y(0) = 0, & y(\pi) = 0 \end{array}$$

۳. نشان دهید عملگر دیفرانسیل پاره ای زیر روی هر میدان همبند ساده در $\mathbb{R}^2$ متقارن و اکیداً مثبت است.

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 4$$

۴. مسئله با شرایط مرزی زیر را به صورت یک مسئله حساب تغییرات در آورید.

$$\begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} - 4u = xy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = y, \quad u(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = x^2. \end{array}$$

۲.۹ روش مستقیم ریتز

روش ریتز و یا روش ریلی-ریتز یکی از روش های مستقیم حساب تغییرات است که بر پایه تقریب جواب به وسیله یک دنباله توابع مینیمم ساز استوار می باشد. فرض کنید $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ یک پایه برای توابع قطعه به قطعه پیوسته با دامنه Q باشد. این پایه لزوماً متعامد نیست و ساختن پایه متعامد از آن معمولاً حاوی محاسبات زیادی است. اهمیت روش ریتز در این خاصیت است که از این پایه بدون تبدیل آن به پایه متعامد یکباره استفاده می گردد و استفاده از آن را نسبتاً آسان می سازد.

فرض کنید مانند بخش گذشته u جواب تعمیم یافته معادله $\mathcal{L}u = f$ که در آن $\mathcal{L}$ عملگری مثبت اکید است، باشد. در این صورت طبق خاصیت ۱.۹ تابع u ، تابعک زیر را مینیمم می‌کند.

$$Fu = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}u, u \rangle - \langle f, u \rangle.$$

فرض کنید φ_0 تابعی قطعه‌قطعه پیوست باشد که در شرایط مرزی مسئله صدق می‌کند. برای عدد طبیعی n ، اعداد a_1 تا a_n را طوری انتخاب کنید تا $u_n = \varphi_0 + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$ مقدار Fu_n را مینیمم کند. برای این منظور بگیرید:

$$v_n = \varphi_0 + \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k.$$

اکنون مقادیر b_1 تا b_n را طوری انتخاب کنید تا Fv_n مقدار مینیمم خود را برای این مقادیر b_1 تا b_n به‌خود بگیرید. به عبارت دیگر برای مقادیر a_1 تا a_n مطلوب باید داشته باشیم:

$$\left. \frac{\partial Fv_n}{\partial b_1} \right|_{b_1=a_1, \dots, b_n=a_n} = 0, \quad \dots \quad \left. \frac{\partial Fv_n}{\partial b_n} \right|_{b_1=a_1, \dots, b_n=a_n} = 0.$$

این n معادله به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}\varphi_0, \varphi_1 \rangle + \sum_{k=1}^n \langle \mathcal{L}\varphi_1, \varphi_k \rangle a_k &= \langle f, \varphi_1 \rangle, \\ \langle \mathcal{L}\varphi_0, \varphi_2 \rangle + \sum_{k=1}^n \langle \mathcal{L}\varphi_2, \varphi_k \rangle a_k &= \langle f, \varphi_2 \rangle, \\ &\vdots \\ \langle \mathcal{L}\varphi_0, \varphi_n \rangle + \sum_{k=1}^n \langle \mathcal{L}\varphi_n, \varphi_k \rangle a_k &= \langle f, \varphi_n \rangle. \end{aligned} \quad (۸.۹)$$

دستگاه بالا یک دستگاه n معادله n مجهولی با مجهول‌های a_1 تا a_n و با ماتریس ضرایب متقارن است. چون توابع φ_1 تا φ_n مستقل خطی‌اند، پس دترمینان ضرایب این دستگاه

غیر صفر است. بنابراین این دستگاه دارای جوابی یگانه است. می توان نشان داد اگر $u_* = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ، در این صورت $Fu_* = \lim_{n \rightarrow \infty} Fu_n$. به این ترتیب u_n یک تقریب بسیار خوب برای u یعنی جواب تعمیم یافته مسئله $\mathcal{L}u = f$ همراه با شرایط مرزی است و هر چه n بیشتر باشد این تقریب بهتر است.

تذکره. چنانچه $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ یک پایه متعامد یکه ای نسبت به ضرب داخلی $\langle u, v \rangle_A = \langle \mathcal{L}u, v \rangle$ باشد، در این صورت

$$a_k = \langle f, \varphi_k \rangle, \quad k = 1, \dots, n.$$

در نتیجه در این حالت u_n را به صورت زیر دست می آوریم:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

توجه کنید از پایه غیر متعامد $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ داده شده، با استفاده از فرایند گرام-اشمیت می توان پایه ای متعامد یکه استخراج کرد، لیکن این کار حجم محاسبات را ممکن است بیشتر نماید.

تعریف ۵.۹. دنباله $\{u_n\}_{n \geq 1}$ را دنباله ریتز می گویند.

با توجه به $u_* = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ خاصیت زیر را داریم:

خاصیت ۳.۹ (ریتز). فرض کنید $\mathcal{L}$ یک عملگر مثبت اکید، f قطعه به قطعه پیوسته و $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ یک پایه باشد. آن گاه برای هر n عدد a_1 تا a_n موجود است به طوری که $u_n = \varphi_{n,k} = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$ برای Fv_n مینیمم ساز $v_n = \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k$ است. دنباله $\{u_n\}_{n \geq 1}$ به صورت یگانه تعریف می شود و $u_* = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ مینیمم ساز تابع $F(u) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}u, u \rangle - \langle f, u \rangle$ و یا جواب $\mathcal{L}u = f$ است.

تذکره. در تقریب ریتز برای $n > m$ داریم، $|u_n - u_*| \leq |u_m - u_*|$. علت این امر این است که مینیمم ساز u_n یگانه است و اگر از روی $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ پایه متعامد یکه ای $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ را

بسازیم و از آن برای تعیین مینیمم‌ساز از n عضو اولیه پایه استفاده کنیم همان u_n به دست می‌آید و برای پایه متعامد یکه‌ای نامساوی فوق برقرار است.

مثال ۴.۹. مسئله با شرایط مرزی زیر را با روش ریتز برای جواب تعمیم یافته حل کنید.

$$-u'' + u = x^2, \quad u(-1) = 0, \quad u(1) = 0$$

حل. عملگر $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + 1$ مثبت اکید است. برای دیدن این مطلب توجه کنید این عملگر خطی است به علاوه:

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \int_{-1}^1 \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) uv \, dx = \int_{-1}^1 (u'v' + uv) \, dx = \langle u, \mathcal{L}v \rangle.$$

پس $\mathcal{L}$ متقارن است. همچنین از این تساوی‌ها به دست می‌آوریم:

$$\langle \mathcal{L}u, u \rangle = \int_{-1}^1 ((u')^2 + u^2) \, dx.$$

پس $\mathcal{L}$ مثبت اکید نیز است. با توجه به شرایط مرزی یک پایه برای این فضای برداری را به صورت زیر می‌توان گرفت:

$$\varphi_n(x) = (1 - x^2)x^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

توجه کنید $\varphi_0(x) = 0$ است.

اکنون به محاسبه $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3$ می‌پردازیم. ابتدا u_3 را برای دستگاه (۸.۹) در نظر بگیرید. با توجه به زوج بودن x^2 و زوج و فرد بودن φ_n ‌ها برای n های فرد و زوج، دستگاه معادلات خطی مربوط به a ها به صورت زیر در می‌آید:

$$\langle \mathcal{L}\varphi_1, \varphi_1 \rangle a_1 + \langle \mathcal{L}\varphi_1, \varphi_3 \rangle a_3 = \langle x^2, \varphi_1 \rangle$$

$$\langle \mathcal{L}\varphi_2, \varphi_2 \rangle a_2 = 0$$

$$\langle \mathcal{L}\varphi_1, \varphi_3 \rangle a_1 + \langle \mathcal{L}\varphi_3, \varphi_3 \rangle a_3 = \langle x^2, \varphi_3 \rangle.$$

توجه کنید ماتریس ضرایب این دستگاه متقارن است و از معادله دوم به دست می‌آوریم $a_2 = 0$. همچنین:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}\varphi_1, \varphi_1 \rangle &= \int_{-1}^1 (3-x^2)(1-x^2) dx = \frac{56}{15} \\ \langle \mathcal{L}\varphi_1, \varphi_2 \rangle &= \int_{-1}^1 (3-x^2)(1-x^2)x^2 dx = \frac{24}{35} \\ \langle \mathcal{L}\varphi_2, \varphi_2 \rangle &= \int_{-1}^1 (2-11x^2-x^4)(x^2-x^4) dx = \frac{-538}{945} \\ \langle \mathcal{L}x^2, \varphi_1 \rangle &= \int_{-1}^1 x^2(1-x^2) dx = \frac{4}{15} \\ \langle \mathcal{L}x^2, \varphi_2 \rangle &= \int_{-1}^1 x^2(1-x^2)x^2 dx = \frac{4}{35}.\end{aligned}$$

با جایگذاری این مقادیر در دستگاه بالا، دستگاه مطلوب را به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned}a_2 &= 0 \\ \frac{56}{15}a_1 + \frac{24}{35}a_3 &= \frac{4}{15} \\ \frac{24}{35}a_1 - \frac{538}{945}a_3 &= \frac{4}{35}.\end{aligned}$$

به این ترتیب به دست می‌آوریم:

$$u_2 = a_1(1-x^2) + a_3(1-x^2)x^2$$

که a_1 و a_3 جواب دستگاه فوق است.

تذکره. چنانچه $\mathcal{L}$ مثبت اکید نباشد، روش ریتز باز هم یک جواب تقریبی خوبی برای مسئله معادله دیفرانسیل به دست می‌دهد.

تمرین ۲.۹

۱. یک جواب تعمیم یافته تقریبی به صورت u_2 برای مسئله زیر روی بازه $[0, 1]$ بیابید.

$$-u'' + u = x + x^2, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

۲. جواب تعمیم یافته تقریبی به صورت u_2 برای مسئله زیر روی بازه $[0, 1]$ به دست آورید.

$$-u^{(4)} - u'' + u = x, \quad u(0) = u''(0) = 0, \quad u(1) = u''(1) = 1.$$

۳. جواب تعمیم یافته مسئله زیر را با تقریب u_{22} روی میدان G داده شده به دست آورید.

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

$$-\Delta u + u = xy, \quad u|_{\partial G} = xy.$$

۴. ضرب داخلی را بر روی $C([0, 1] \times [0, 1])$ به صورت $\langle u, v \rangle = \int_0^1 \int_0^1 e^{-x} uv \, dx dy$ در نظر بگیرید. جواب تعمیم یافته مسئله زیر را با تقریب u_{11} به دست آورید.

$$-u_{xx} + u_x - u_{yy} = xy, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0.$$

۵. جواب تعمیم یافته مسئله زیر را با تقریب u_{11} روی $G = [0, 1] \times [0, 1]$ به دست آورید.

$$u_{xxxx} + u_{yyyy} - 2u_{xxyy} = xy, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$$u|_{\partial G} = 0, \quad u_{xx}|_{x=0,1} = 0, \quad u_{yy}|_{y=0,1} = 0.$$

مراجع

- [۱] حصارکی، محمود، و فتوحی، مرتضی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، چاپ دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۹.
- [۲] حصارکی، محمود، و پورنکی، محمدرضا، توابع مختلط، چاپ فاطمی، ۱۳۸۹.
- [3] Brown, James Ward, and Ruel Vance Churchill., *Fourier series and boundary value problems*, Vol. 6. New York: McGraw-Hill, 2001.
- [4] Brown, James Ward, and Ruel Vance Churchill., *Complex variables and applications*, Boston: McGraw-Hill Higher Education, 2009.
- [5] Van Brunt, B., *The Calculus of Variations*, 2004.
- [6] Rektorys, Karel., *Variational methods in mathematics, science and engineering*, Springer Science & Business Media, 2012.