

به نام خدا

تاریخ چهارشنبه ۳۱ تیر ۱۳۸۸

امتحان پایان ترم
مدت: ۳ ساعت

احتمال و کاربرد آن

۱ الف) میانگین يك متغیر تصادفی گاما با پارامترهای (t, λ) را محاسبه کنید (راهنمایی: تابع گاما در تساوی $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ صدق می کند). (۱۰ نمره)

ب) X يك متغیر تصادفی گاما با پارامترهای $(30, 20) = (t, \lambda)$ است. با استفاده از نامساوی مارکوف يك کران پایین برای $\mathbb{P}(X \leq 2)$ پیدا کنید. (۱۰ نمره)

۲ يك نوع لامپ معمولاً بعد از 1000 ساعت کارکرد می سوزد. حداکثر مقدار T بر حسب ساعت را پیدا کنید به طوری که با احتمال حداقل $\frac{1}{2}$ ، لامپ قبل از T ساعت کارکرد نسوزد (توجه: $\ln(\frac{1}{2}) \approx -0,6931$). (۱۰ نمره)

۳ نشان دهید میانگین يك نمونه $2n + 1$ تایی از اعداد به طور یکنواخت انتخاب شده و مستقل از یکدیگر، از بازه $(0, 1)$ ، يك توزیع بتا با پارامترهای $(n + 1, n + 1)$ است. (۱۰ نمره)

۴ الف) يك نقطه به طور تصادفی از ناحیه مثلثی شکل متشکل از نقاط (x, y) که $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ و $x + y \leq 1$ به طور یکنواخت انتخاب می شود. اگر X مختصات طولی و Y مختصات عرضی این نقطه باشد، تابع چگالی توأم $f(x, y)$ از (X, Y) ، توابع چگالی حاشیه ای f_X ، تابع چگالی $X + Y$ و تابع چگالی شرطی $f_{X|Y}$ را به دست آورید. (۱۰ نمره)

ب) X و Y دو متغیر تصادفی مستقل یکنواخت روی بازه $(0, 1)$ هستند. تابع چگالی توأم $V = X + Y$ و $W = X/Y$ را به دست آورید. آیا V و W مستقل هستند؟ (۱۰ نمره)

۵ الف) B و C دو عدد تصادفی به طور یکنواخت و مستقل، انتخاب شده از بازه $(0, 1)$ هستند. احتمال اینکه هر دو ریشه چند جمله ای $x^2 + Bx + C$ حقیقی باشند را پیدا کنید. (۱۰ نمره)

ب) شخصی می خواهد بین ساعت 11 تا 12 صبح به يك بانک مراجعه کند. در این بازه زمانی، خیابان آنقدر شلوغ است که آن شخص به علت نبود پارکینگ در آن حوالی، تخلف انجام پارک کردن دوپل اتومبیل خود را جلو بانک، به جان می خورد. يك پلیس نیز بین ساعت 11 تا 12 يك بار از جلو آن بانک عبور می کند. فرض کنید کار آن شخص در بانک 20 دقیقه طول بکشد. همچنین فرض کنید رسیدن پلیس و آن شخص در بازه زمانی 11 تا 12 مستقل از همدیگر و به طور یکنواخت باشد. احتمال آنکه در مدتی که آن شخص در بانک است پلیس او را جریمه نکند را پیدا کنید. (۱۰ نمره)

۶ الف) X يك متغیر نرمال استاندارد است. با استفاده از کران چرنوف، يك کران بالا برای $\mathbb{P}(X \geq c)$ پیدا کنید. (۱۰ نمره)

ب) يك آزمون چهار گزینه ای دارای 48 سوال است. هر سوال تنها يك گزینه صحیح دارد. احتمال اینکه فردی تنها با حدس زدن، موفق شود حداقل به 15 سوال جواب صحیح دهد را به طور تقریبی پیدا کنید. (۱۰ نمره)

موفق باشید