

۱ از قسمت های (الف)، (ب)، (ج) و (د) سوال يك به دلخواه دو تا را انتخاب کرده و به آنها پاسخ دهید. همچنین به قسمت (ه) نیز پاسخ دهید.

(الف) فرض کنید p يك عدد اول فرد و θ يك ریشه p ام اولیه واحد باشد. نشان دهید حلقه اعداد صحیح جبری $\mathbb{Q}[\theta]$ برابر با $\mathbb{Z}[\theta]$ است. (ب) فرض کنید K يك میدان حسابی، و A حلقه اعداد صحیح جبری در K باشد. نشان دهید برای هر عضو ناصفر x از A حلقه A/Ax متناهی است و داریم $|N_{K/\mathbb{Q}}(x)| = |A/Ax|$.

(ج) فرض کنید L يك میدان حسابی از درجه n روی \mathbb{Q} ، B حلقه اعداد صحیح جبری L و (x_1, \dots, x_n) يك \mathbb{Q} -پایه برای L باشد که در B قرار داشته باشد. اگر $D(x_1, \dots, x_n)$ خالی از مربع باشد نشان دهید که (x_1, \dots, x_n) يك \mathbb{Z} -پایه صحیح برای B است.

(د) فرض کنید K يك میدان حسابی و A حلقه اعداد صحیح جبری در K و a و b ایده آل های ناصفری از A باشند، نشان دهید $N(ab) = N(a)N(b)$.

(ه) فرض کنید K يك میدان حسابی از درجه n و r_1 تعداد غوطه ورسازی های حقیقی و $2r_2$ تعداد غوطه ورسازی های غیر حقیقی آن باشد. فرض کنید A حلقه اعداد صحیح جبری K باشد. نشان دهید گروه یکال های A يك گروه آبلی متناهی تولید شده است و تعداد ریشه های واحد در K متناهی است.

۲ (الف) اگر A يك حلقه ددکیند و x عضو ناصفری از آن باشد آیا همواره A/Ax متناهی است؟

(ب) آیا عکس حکم (ج) سوال يك هم درست است؟

(ج) فرض کنید K يك میدان حسابی باشد به طوری که گروه یکه های آن از رتبه يك باشد. در مورد درجه K چه می توان گفت؟

۳ (الف) یکه اساسی $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ را پیدا کنید.

(ب) همه جواب های صحیح معادلات $x^2 - 6y^2 = \pm 1$ را پیدا کنید.

(ج) آیا حلقه اعداد صحیح جبری در $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ يك دامنه ایده آل اصلی است؟

۴ (الف) نشان دهید چند جمله ای $P = X^3 - X - 4$ روی \mathbb{Q} تحویل ناپذیر است.

(ب) فرض کنید $\alpha \in \mathbb{C}$ یکی از ریشه های P باشد. تعداد غوطه ورسازی های حقیقی و غیر حقیقی $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ را بیابید.

(ج) مقدار $D(1, \alpha, \alpha^2)$ را بیابید.

(د) چند جمله ای مینیمال $\omega = (\alpha^2 + \alpha)/2$ را پیدا کنید.

(ه) مبین پایه $(1, \alpha, \omega)$ را پیدا کنید و حلقه اعداد صحیح جبری A در K را شناسایی کنید.

(و) گروه یکال های A با چه گروهی ایزومورف است؟

(ز) غوطه ورسازی کانونی $\mathbb{R}^3 \rightarrow K$ را در نظر بگیرید. مقدر حجم شبکه $\sigma(A)$ را پیدا کنید.

موفق باشید