به نام خدا

نظریه جبری اعداد

امتحان پایان ترم

مدت: ۳ ساعت

تاریخ شنبه ۲۵ دی ۱۳۸۹

---

۱ الف)فرض کنید K یک میدان حسابی و A حلقه اعداد صحیح جبری آن و $\mathfrak{a}$ ایده آلی ناصفر از A باشد به طوری که $N(\mathfrak{a})$ اول باشد، آیا می توان نتیجه گرفت که $\mathfrak{a}$ اول است؟ برعکس اگر $\mathfrak{a}$ یک ایده آل اول ناصفر باشد آیا می توان نتیجه گرفت $N(\mathfrak{a})$ اول است؟
ب) فرض کنید K یک میدان حسابی و A حلقه اعداد صحیح جبری آن باشد. فرض کنید $e_1, \cdots, e_n$ یک پایه صحیح برای A باشد. نشان دهید $D(e_1, \cdots, e_n)$ به پیمانه 4 همنهشت با 0 یا 1 است.
ج) ایده آل I در حلقه اعداد صحیح جبری یک میدان حسابی K را در نظر می گیریم. نشان دهید عدد صحیح مثبت h موجود است به طوری که توان h ام I، یک ایده آل اصلی است.

۲ فرض کنید $P(X)$ یک چند جمله ای تکین با ضرایب صحیح باشد به طوری که همه ریشه های آن، به عنوان عدد مختلط، قدر مطلق کمتر یا مساوی یک داشته باشند.
الف) فرض کنید $\alpha \in \mathbb{C}$ یک ریشه $P(X)$ باشد. نشان دهید برای هر عدد صحیح $n \geqslant 0$، α^n یک عدد صحیح جبری با قدر مطلق کمتر یا مساوی یک است. نتیجه بگیرید که یا $\alpha = 0$ یا α یک ریشه واحد است.
ب) اگر $P(X)$ تحویل ناپذیر باشد آنگاه یا $P(X) = X$ یا $P(X)$ یک چند جمله ای دایره بر است.

۳ الف) کوچکترین عدد اولی را پیدا کنید که در $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ تجزیه شود و در $\mathbb{Q}(i)$ ساکن بماند.
ب) ریشه $n-$ام اولیه واحد $z \in \mathbb{C}$ را در نظر می گیریم. نشان دهید که هیچ عدد اول p که n را عاد نمی کند در $\mathbb{Q}(z)$ منشعب نمی شود، نتیجه بگیرید $Gal(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

۴ میدان حسابی $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ دارای چند ارزیابی ارشمیدسی نا هم ارز است؟ ضابطه همه آنها را به طور صریح مشخص کنید.

۵ الف) از لم هنزل استفاده کنید و نشان دهید اگر p یک عدد اول به فرم $4k + 1$ باشد آنگاه -1 در $\mathbb{Q}_p$ مربع است.
ب) فرض کنید K یک میدان حسابی و v یک ارزیابی نا ارشمیدسی و غیر $2-$ادیک آن باشد. فرض کنید $u_1, u_2, u_3 \in K_v$ یکه باشند یعنی $|u_1|_v = |u_2|_v = |u_3|_v = 1$. نشان دهید فرم مربعی $f = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ روی K_v ایزوتروپ است.
ج) با استفاده از قسمت قبل یا از هر راه دیگر نشان دهید که اگر p یک عدد اول به فرم $4k + 3$ باشد آنگاه -1 را می توان به صورت مجموع دو مربع در $\mathbb{Q}_p$ نوشت.

۶ نشان دهید درستی قضیه هسه $-$ مینکوفسکی برای فرمهای مربعی از درجه $n \geqslant 5$ را می توان از درستی آن برای فرمهای مربعی از درجه $n \leqslant 4$ نتیجه گرفت.

موفّق باشید