به نام خدا

نظریه جبری اعداد — امتحان میان ترم — تاریخ چهارشنبه ۲۳ اردیبهشت ۱۳۸۸

مدت: ۳ ساعت

---

۱ مفاهیم زیر را به طور دقیق تعریف کنید: بستار صحیح یك حلقه، مبین یك میدان حسابی، حلقه ددکیند، نرم یك ایده آل در یك حلقه ددکیند، ایده آل کسری، گروه رده های ایده آلی یك حلقه ددکیند، شبکه در $\mathbb{R}^n$، حجم یك شبکه در $\mathbb{R}^n$. (۱۰ نمره)

۲ الف) فرض کنید K یك میدان حسابی، و A حلقه اعداد صحیح جبری در K باشد. نشان دهید برای هر عضو ناصفر x از A داریم $|N_{K/\mathbb{Q}}(x)| = |A/Ax|$. (۵ نمره)

ب) میدان حسابی K از درجه n روی $\mathbb{Q}$ را در نظر می گیریم. فرض کنید A حلقه اعداد صحیح جبری در K باشد. نشان دهید هر عدد صحیح مثبت b حداکثر در b^n ایده آل A قرار دارد. (۵ نمره)

۳ الف) نتیجه زیر از قضیه مینکوفسکی را ثابت کنید: اگر H یك شبکه در $\mathbb{R}^n$ و S یك زیرمجموعه اندازه پذیر، متقارن نسبت به مبدا و محدب از $\mathbb{R}^n$ و $\mu(S) > 2^n v(H)$ آنگاه $S \cap H$ شامل یك نقطه غیر از 0 است. آیا شرط محدب بودن S لازم است؟ (۵ نمره)

ب) اگر K یك میدان حسابی باشد آنگاه هر رده ایده آلی K شامل یك ایده آل $\mathfrak{b}$ است به طوری که $N(\mathfrak{b}) \leqslant (\frac{4}{\pi})^{r_2} \frac{n!}{n^n} |d|^{\frac{1}{2}}$ که در اینجا $2r_2$ تعداد غوطه ور سازی های موهومی K و d مبین مطلق K است. (۵ نمره)

ج) نشان دهید مبین مطلق هر میدان حسابی $K \neq \mathbb{Q}$ مخالف ± 1 است. (۵ نمره)

د) عدد اول فرد p و یك ریشه اولیه p ام واحد $z \in \mathbb{C}$ را در نظر می گیریم. فرض کنید G گروه ریشه های واحد در $\mathbb{Q}(z)$ باشد. گروه یکالهای $\mathbb{Q}(z)$ با چه گروهی ایزومورف است؟ (۵ نمره)

۴ الف) حلقه اعداد صحیح جبری در $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ چیست؟ (۵ نمره)

ب) یکه اساسی $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ را پیدا کنید. (۵ نمره)

ج) همه جواب های صحیح معادلات $x^2 - 10y^2 = \pm 1$ را پیدا کنید. (۵ نمره)

د) آیا حلقه اعداد صحیح جبری در $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ یك دامنه ایده آل اصلی است؟ (۵ نمره)

۵ نشان دهید حلقه اعداد صحیح جبری میدان مکعبی $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$، یك دامنه ایده آل اصلی است. (۱۰ نمره)

۶ عدد صحیح جبری $z \in \mathbb{C}$ را در نظر می گیریم. اگر قدر مطلق همه مزدوجهای z برابر با یك باشد ثابت کنید z یك ریشه واحد است. آیا شرط $|z| = 1$ برای اثبات این حکم کافی نیست؟ (۱۰ نمره)

موفّق باشید