

۱ فرض کنید  $K$  و  $L$  دو میدان حسابی،  $K \subseteq L$  و  $A$  و  $B$  را به ترتیب حلقه اعداد صحیح جبری در  $K$  و  $L$  باشند. نشان دهید شرط لازم و کافی برای اینکه ایده آل اول  $p$  از  $A$  در  $B$  منشعب شود این است که شامل  $\mathcal{D}_{B/A}$  باشد. (۱۰ نمره)

۲ فرض کنید  $A$  یک حلقه ددکیند،  $K$  میدان کسرهای آن (که فرض می شود از مشخصه صفر است)،  $K'$  یک گسترش گالوایی  $K$  از درجه  $n$  و  $A'$  بستار صحیح  $A$  در  $K'$  باشد. اگر  $p$  یک ایده آل ماکسیمال  $A$  باشد آنگاه ایده آلهای ماکسیمال  $p'_i$  از  $A'$  که در تجزیه  $A'p$  به حاصلضرب ایده آلهای اول  $A'$  ظاهر می شوند همگی مزدوجند، دارای درجه باقیمانده ای یکسان  $f$  و دارای اندیس انشعاب یکسان  $e$  هستند و داریم  $A'p = (\prod_{i=1}^g p'_i)^e$  و  $n = efg$ . (۱۰ نمره)

۳ الف) رتبه گروه یکه های یک میدان حسابی  $K$  برابر با ۴ است. در مورد درجه  $K$  روی  $\mathbb{Q}$  چه می توان گفت؟ (۵ نمره)  
ب) حلقه اعداد صحیح جبری  $\mathbb{Q}(\sqrt{29})$  چیست؟ نشان دهید هر ایده آل این حلقه هم ارز با یک ایده آل از نرم ۱ یا ۲ است و این حلقه یک دامنه ایده آل اصلی است. (۱۰ نمره)

۴ چند جمله ای  $f(X) = X^3 + X - 1$  را در نظر می گیریم.  
الف) نشان دهید  $f(X)$  روی  $\mathbb{Q}$  تحویل ناپذیر است. (۵ نمره)  
ب) نشان دهید  $f$  یک ریشه حقیقی  $\alpha$  در بازه  $(0, 1)$  دارد. (۵ نمره)  
ج) میدان حسابی  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$  را در نظر می گیریم. اعداد  $r_1$  و  $r_2$  و یک مجموعه اساسی برای یکه های  $K$  پیدا کنید. (۵ نمره)  
د) مین  $(1, \alpha, \alpha^2)$  را محاسبه کنید. (۵ نمره)  
ه) نشان دهید حلقه اعداد صحیح جبری  $K$  برابر با  $\mathbb{Z}[\alpha]$  است. (۵ نمره)  
و) آیا  $\mathbb{Z}[\alpha]$  دامنه ایده آل اصلی است؟ (۵ نمره)

۵ مشخص کنید کدامیک از اعداد اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ در  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$  منشعب می شوند، ساکن می مانند یا تجزیه می شوند. (۱۰ نمره)

۶ عدد اول  $p > 3$  را در نظر می گیریم. نشان دهید در  $\mathbb{Q}_p$  دقیقاً  $p - 1$  ریشه  $p - 1$  ام واحد وجود دارد. (۱۰ نمره)

۷ الف) همه ارزیابی های ارشمیدسی و نارشمیدسی  $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$  و  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  را بیابید. (۱۰ نمره)  
ب) عدد اول  $p$  را در نظر می گیریم. فرض کنید  $\zeta$  یک ریشه اولیه  $p$ -ام واحد باشد. میدان دایره بر  $\mathbb{Q}(\zeta)$  دارای چند ارزیابی ارشمیدسی دو به دو نا هم ارز است؟ (۵ نمره)

۸ عدد اول  $p$  را در نظر می گیریم. همه اعداد  $a \in \mathbb{Z}$  که برای آنها دنباله  $\{a^{p^n}\}_{n=0}^{\infty}$  در  $\mathbb{Q}_p$  همگرا باشد را بیابید. (۱۰ نمره)