دانشگاه صنعتی شریف

پایان ترم جبر ۲ — تاریخ شنبه ۱۷ دی ۱۳۸۴

۱ E/F یک توسیع میدانی است. فرض کنید $u \in E$ روی F جبری باشد و $p(x) \in F[x]$ چندجمله‌ای مینیمال u باشد.
الف) نشان دهید $F(u) = F[u] \simeq F[x]/(p(x))$.
ب) اگر $n = \deg p(x)$ آنگاه مجموعه $\{1, u, u^2, \cdots, u^{n-1}\}$ یک پایه $F(u)$ به‌عنوان فضای‌برداری روی F است.

۲ الف) نشان دهید هر میدان متناهی و هر میدان از مشخصه صفر تام است.
ب) با دادن استدلال یک میدان غیرتام مثال بزنید.

۳ صورت هر سه قضیه سیلو را به‌طور دقیق بنویسید و یکی از آنها را به‌دلخواه ثابت کنید.

۴ عدد صحیح مثبت n را یک عدد آبل می‌نامیم اگر فقط یک گروه از مرتبه n (صرف‌نظر از ایزومورفیسم) وجود داشته باشد.
الف) با دادن استدلال همه اعداد آبل کوچکتر یا مساوی 15 را پیدا کنید.
ب) حدس بزنید در حالت کلی چه اعدادی، اعداد آبل هستند.

۵ الف) میدان‌هایی از مرتبه‌های 4 ، 8 ، 9 و 16 بسازید.
ب) همه مولدهای گروه ضربی میدان 9 عضوی ساخته شده در قسمت (الف) را بطور صریح ارائه کنید.

۶ برای میدان‌های الف) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ب) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$ ، هریک از موارد زیر را محاسبه کنید.
- درجه K روی $\mathbb{Q}$ ،
- یک عضو $\theta \in K$ بطوریکه $K = \mathbb{Q}(\theta)$ ،
- چندجمله‌ای مینیمال θ روی $\mathbb{Q}$.

۷ الف) نشان دهید هر زیرگروه یک گروه آبلی با تولید متناهی، با تولید متناهی است.
ب) میدان K داده شده است. اگر $K^\times$ یک گروه با تولید متناهی باشد نشان دهید K یک میدان متناهی است.
ج) اگر $\mathrm{G}L_2(K)$ یک گروه با تولید متناهی باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت K یک میدان متناهی است؟ ($\mathrm{G}L_2(K)$ گروه همه ماتریسهای 2×2 وارونپذیر با ضرب معمولی ماتریسی روی K است).

موفق باشید

توزیع نمره:
۱ : 14 نمره
۲ : 12 نمره
۳ : 14 نمره
۴ : 10 نمره
۵ : 10 نمره
۶ : 10 نمره
۷ : 10 نمره

مجموع: 80 **نمره**