

در قسمت‌هایی از سؤالات که با علامت * مشخص شده‌اند، فقط به راه‌های کامل نمره تعلق می‌گیرد و راه‌حل‌های ناقص نمره جزئی ندارند (حل این سؤالات اختیاری است و نمره اضافه دارد).

۱ الف) مرتبه گروه $G = \mathbb{Z}_{26}^*$ (یعنی گروه مانده‌های تقلیل‌یافته به هنگ ۲۶) را به دست آورید و عناصر آن را مشخص کنید.
 ب) می‌دانیم G یک گروه دوری است. یک مولد برای آن پیدا کنید. چگونه می‌توان همه مولدهای G را به دست آورد؟
 ج) تعداد زیرگروه‌های G را تعیین کنید.
 د) در یکرختی یا عدم یکرختی G و $H = \mathbb{Z}_{21}^*$ بحث کنید.

۲ الف) نشان دهید A_4 زیرگروه از مرتبه ۶ ندارد.
 ب) آیا S_5 زیرگروه از مرتبه ۱۰ دارد؟
 ج) آیا A_5 زیرگروه از مرتبه ۳۰ دارد؟
 د) آیا S_5 زیرگروه از مرتبه ۲۴ دارد؟
 ه) یک جایگشت زوج و یک جایگشت فرد، هر دو از مرتبه ۲ در S_5 مثال بزنید.

۳ الف) برای $n \geq 3$ مرتبه عناصر گروه D_n چه اعدادی می‌توانند باشند؟ برای $n = 6$ همه آنها را تعیین کنید.
 ب) گروه جایجاگرهای یک گروه دلخواه G را تعریف کنید و نشان دهید گروه جایجاگرهای D_n یک گروه آپلی است.
 ج) اگر $n \geq 6$ زوج و دوران ρ و انعکاس τ مولدهای معمول D_n باشند، نشان دهید $\langle \rho^{\frac{n}{2}} \rangle$ زیرگروهی نرمال از D_n است.
 د) با مفروضات قسمت قبل آیا $D_n / \langle \rho^{\frac{n}{2}} \rangle \simeq D_{\frac{n}{2}}$ ؟

۴ برای عدد صحیح $n > 1$ در همه قسمت‌های این سوال حلقه R برابر با $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ است، مگر آنکه خلاف آن تصریح شود.
 الف) نشان دهید هر زیرگروه $(R, +)$ یک ایده‌آل است.
 ب) زیرگروهی از $(R \times R, +)$ مثال بزنید که ایده‌آل نباشد.
 ج) نشان دهید در هر حلقه جایجایی دلخواه R مجموعه N متشکل از همه عناصر پوچتوان R تشکیل یک ایده‌آل می‌دهند.
 د) فرض کنید $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ تجزیه n به اعداد اول متمایز p_1, \dots, p_r و N ایده‌آل معرفی شده در قسمت قبل باشد. طبق قضیه تناظر می‌دانیم N به صورت $J/n\mathbb{Z}$ است که J ایده‌آلی از \mathbb{Z} است. ایده‌آل J را صریحاً شناسایی کنید.
 ه) R/N با چه حلقه‌اشناسایی (بر حسب n یا عوامل اول آن) یکرخت است؟

۵ فرض کنید $A = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] : f'(0) = 0\}$.
 الف) نشان دهید A یک زیرحلقه از $\mathbb{Z}[x]$ است.
 ب) عنصر اول و تحویل‌ناپذیر را در یک دامنه صحیح تعریف کنید. در اول بودن و تحویل‌ناپذیر بودن x^3 در A بحث کنید.
 ج) تعریف مناسبی از b م m دو عنصر در یک دامنه صحیح ارائه کنید. ب m x^3 و x^2 در A (در صورت وجود) چیست؟
 د) ایده‌آل I تولید شده توسط x^2 و x^3 در A دقیقاً متشکل از چه چندجمله‌ای‌هایی است؟ آیا I اصلی است؟
 ه) تعریف ایده‌آل اول و ماکسیمال را یادآوری کنید. آیا ایده‌آل I معرفی شده در قسمت قبل اول است؟ آیا ماکسیمال است؟

۶ الف) دست کم دو چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر تکین از درجه ۳ روی \mathbb{F}_3 ارائه کنید.
 ب) یک روش ساخت برای میدان از مرتبه ۲۷ ارائه کنید.
 ج) مقصود از ریشه اولیه در یک میدان متناهی و لگاریتم گسسته چیست؟ در میدان از مرتبه ۲۷ چند ریشه اولیه وجود دارد؟
 د) اگر F یک میدان متناهی از مشخصه p باشد نشان دهید نگاشت $f(x) = x^p$ از F به F دوسویی است.
 ه) یک میدان نامتناهی از مشخصه اول p مثال بزنید که برای آن حکم قسمت قبل نقض شود.