

در حل سؤالات، می‌توانید از همه قضایای اثبات شده در کلاس یا در کتاب درسی، با ذکر صورت آن، استفاده کنید.

- ۱ برای هر کدام از اعداد  $n = 30, 35, 61, 360$  یا یک گروه ساده از مرتبه  $n$  مثال بزنید یا نشان دهید هیچ گروه ساده‌ای از مرتبه  $n$  وجود ندارد.
- ۲ یک خودریختی غیر همانی از گروه  $S_3$  و یک خودریختی غیر همانی از گروه  $\mathbb{Z}/6$  مثال بزنید.
- ۳ همه گروه‌های آبلی غیر یکرخت از مرتبه  $2^2 \times 3^2$  را شناسایی کنید. تعداد آنها چندتاست؟
- ۴ الف) همه چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر تکین از درجه ۲ روی  $\mathbb{Z}/3$  را بیابید.  
ب) یک میدان ۹ عضوی بسازید.  
ج) یک ریشه اولیه برای میدان ساخته شده در قسمت (ب) بیابید.
- ۵ الف) در حلقه  $R = \mathbb{R}[X^2, X^3]$  عنصری تحویل‌ناپذیر مثال بزنید که اول نباشد (با ذکر دلیل).  
ب) در اول بودن یا نبودن عنصر  $2 + 3i$  در  $\mathbb{Z}[i]$  بحث کنید.  
ج) نشان دهید چندجمله‌ای  $X^n + 18X^{n-1} + 12 \in \mathbb{Q}[X]$  تحویل‌ناپذیر است.
- ۶ نشان دهید نگاشت  $\phi: \mathbb{R}[X] \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  با ضابطه

$$\phi(f(X)) = \begin{bmatrix} f(0) & f'(0) \\ 0 & f(0) \end{bmatrix}$$

یک همریختی حلقه‌ای است. هسته  $\phi$  متشکل از چه چندجمله‌ای‌هایی است؟ هسته  $\phi$  به عنوان ایده‌آل  $\mathbb{R}[X]$  توسط کدام چندجمله‌ای تولید می‌شود؟ آیا همه ماتریس‌های بالا مثلثی که روی قطر اصلی آنها با هم برابر است در برد  $\phi$  قرار دارند؟ از قضیه اول (اصلی) یکرختی برای این همریختی خاص چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

- ۷ حلقه  $R = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$  را در نظر می‌گیریم.  
الف) همه عناصر وارون‌پذیر را در  $R$  شناسایی کنید.  
ب) همه عناصر پوچتوان را در  $R$  شناسایی کنید.  
ج) همه عناصر مقسوم‌علیه صفر را در  $R$  شناسایی کنید.  
د) همه ایده‌آل‌های  $R$  را شناسایی کنید.  
ه) همه ایده‌آل‌های اول را در  $R$  شناسایی کنید.  
و) مشخصه  $R$  چه عددیست؟

موفق باشید