

## گروههای خطی

تاریخ پنجشنبه ۷ آبان ۱۳۹۴

امتحان میان ترم

مدت: ۳ ساعت

در مسایل زیر  $V$  یک فضای برداری متناهی البعد روی یک میدان  $F$  است.

- ۱ الف) همه ترابرهای  $\tau \in \text{SL}(V)$  را بیابید به طوری که  $\tau^2$  همانی باشد (راهنمایی حالت‌هایی که مشخصه  $F$  برابر با ۲ باشد یا نباشد را جداگانه بررسی کنید).
- ب) فرض کنید  $F$  یک میدان متناهی  $q$  باشد. نشان دهید مرتبه دو گروه  $\text{PGL}(V)$  و  $\text{SL}(V)$  یکسان است، اما این دو گروه یکرخت نیستند.
- ج) یک شرط لازم و کافی برای اینکه یک تبدیل خطی وارونپذیر  $\varphi$  با یک ترابر غیر همانی  $\tau \in \text{SL}(V)$  جابجا شود را بیابید.
- د) یک گروه ساده هم مرتبه با گروه  $A_8$  اما غیر یکرخت با آن مثال بزنید.

- ۲ فرض کنید  $(V, \omega)$  یک فضای سیمپلکتیک از بعد  $2n$  روی یک میدان متناهی  $q$  عضوی  $F$  باشد.
  - الف) تعداد زوج‌های هذلولوی در  $V$  را بیابید.
  - ب) یک فرمول بازگشتی برای محاسبه مرتبه گروه  $\text{SP}(V)$  بیابید.
  - ج) تعداد ترابرهای سیمپلکتیک روی  $V$  را محاسبه نمایید.
  - د) تعداد ترابرهای معمولی  $V$  را محاسبه کنید.

- ۳ فرض کنید  $b : V \times V \rightarrow F$  یک فرم دوخطی ناتبگون و متقارن و مشخصه  $F$  مخالف ۲ باشد. اگر تبدیل خطی وارونپذیر  $f : V \rightarrow V$  تعامد را حفظ کند آنگاه اسکالر  $c$  هست بطوریکه  $b(f(x), f(y)) = cb(x, y)$  برای  $x$  و  $y$  در  $V$ .

- ۴ فرض کنید  $b : V \times V \rightarrow F$  یک فرم دوخطی ناتبگون بازتابی باشد. نشان دهید بعد یک زیرفضای تماما ایزوتروپ  $W$  از  $V$  کمتر یا مساوی  $\frac{1}{2} \dim V$  است.

- ۵ برای بردار ثابت ناصفر  $x_0$  نشان دهید مجموعه ترابرهای به صورت  $\tau_{f, x_0}$  که  $f \in V^*$  و  $x_0 \in \ker f$  یک زیر گروه آبلی از  $\text{SL}(V)$  تشکیل می‌دهند. اگر  $\dim V = n$  و  $|F| = q$  مرتبه این زیرگروه را محاسبه نمایید.

موفق باشید