

- ۱ الف) فرض کنید  $G$  یک گروه آبلی متناهی باشد. نشان دهید  $G$  دوری است اگر و تنها اگر نمای  $G$  برابر با مرتبه  $G$  باشد.  
 ب) یک گروه آبلی غیر دوری ۲۴ عضوی با نمای برابر با ۶ معرفی کنید.  
 ج) با ذکر یک مثال نشان دهید که حکم قسمت الف) برای گروههای غیر آبلی معتبر نیست.
- ۲ الف) فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی و یکدار و  $I, J$  ایده‌آلهایی از  $R$  باشند. اگر ایده‌آلهای  $\sqrt{I}$  و  $\sqrt{J}$  متباین باشند آنگاه نشان دهید  $I$  و  $J$  هم متباین هستند.  
 ب) برای ایده‌آل  $24\mathbb{Z}$  از  $\mathbb{Z}$  ایده‌آل  $\sqrt{24\mathbb{Z}}$  را شناسایی کنید.
- ۳ اثباتی از دوری بودن گروه ضربی یک میدان متناهی ارائه کنید.
- ۴ فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. نشان دهید موضعی بودن  $R$  معادل با این است که اگر مجموع چند عضو از  $R$  وارونپذیر باشد، آنگاه حداقل یکی از آنها وارونپذیر است.
- ۵ فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی و یکدار و  $M$  یک ایده‌آل ماکسیمال از  $R$  باشد. نشان دهید برای هر عدد صحیح مثبت  $n$ ، اگر  $P$  ایده‌آل اولی از  $R$  شامل  $M^n$  باشد آنگاه  $P = M$ . نتیجه بگیرید  $R/M^n$  یک حلقه موضعی است.
- ۶ یک حلقه جابجایی و یکدار نوتری و غیر آرتینی مثال بزنید.
- ۷ نشان دهید معادله  $x^2 = -1$  در کواترنیون های حقیقی بینهایت ریشه دارد.
- ۸ نشان دهید تعداد ایده‌آلهای ماکسیمال در یک حلقه جابجایی و یکدار آرتینی متناهی است.

موفق باشید