جبر ۳ کارشناسی

امتحان میان ترم — تاریخ پنجشنبه ۲۰ آذر ۱۳۹۳

مدت: ۳ ساعت

حل قسمتهایی از سوالات که با علامت $*$ مشخص شده‌اند اختیاری است و نمره اضافه دارد.

۱ فرض کنید K/F یک گسترش میدانی از درجه متناهی n و $f(X) \in F[X]$ یک چندجمله‌ای تحویلناپذیر از درجه $m \geqslant 2$ باشد. فرض کنید n و m نسبت به هم اول باشند. الف) نشان دهید $f(X)$ در K ریشه ندارد.
$*$ ب) آیا می‌توان نتیجه گرفت $f(X)$ روی K تحویلناپذیر است؟

۲ الف) میدان کسرهای گویا $E = \mathbb{Q}(X)$ و زیرمیدانهای $K = \mathbb{Q}(X^2)$ و $L = \mathbb{Q}(X^2 - X)$ از آن را در نظر میگیریم. درجه‌های $[E : K]$ و $[E : L]$ را محاسبه کنید. زیرمیدان $F = K \cap L$ را شناسایی کرده و $[E : F]$ را نیز محاسبه نمایید.
ب) اگر برای گسترشهای میدانی E/K و E/L داشته باشیم $[E : K] < \infty$ و $[E : L] < \infty$، آیا می‌توان نتیجه گرفت $[E : K \cap L] < \infty$؟

۳ فرض کنید E/K یک گسترش جبری باشد. صحت و سقم حکم زیر را بررسی کنید: K تمام است اگر و تنها اگر E تمام باشد.

۴ فرض کنید K یک میدان 64 عضوی باشد. تعداد زیرمیدانهای میانی K را مشخص کنید. تعداد اعضای K مانند α بطوریکه $K = \mathbb{F}_2(\alpha)$، تعداد چندجمله‌ای تکین تحویلناپذیر از درجه 6 روی $\mathbb{F}_2$ و تعداد مولدهای گروه K^* را مشخص کنید. مرتبه اتومورفیسم فروبنیوس $K/\mathbb{F}_2$ را هم پیدا کنید.

۵ فرض کنید K یک میدان و $f(X) \in K[X]$ یک چندجمله‌ای تحویلناپذیر جدایی‌پذیر و E میدان شکافنده $f(X)$ باشد. فرض کنید گروه گالوای $f(X)$ آبلی باشد. نشان دهید برای هر ریشه $\alpha \in E$ از $f(X)$ داریم $E = K(\alpha)$.

۶ فرض کنید E/K یک گسترش کاملا جدایی ناپذیر از درجه متناهی > 1 و از مشخصه $p > 0$ باشد.
الف) نشان دهید $[E : K]$ توانی از p است.
$*$ ب) فرض کنید E/K ساده باشد و تعداد زیرمیدان‌های میانی آن برابر با $e+1$ باشد نشان دهید $[E : K] = p^e$.

۷ از قسمتهای این سوال یکی را به دلخواه انتخاب کرده و آن را ثابت کنید.
الف) اگر E/K یک گسترش میدانی جدایی‌پذیر از درجه متناهی باشد، آنگاه $\alpha \in E$ موجود است بطوریکه $E = K(\alpha)$.
ب) اگر E/K یک گسترش میدانی از درجه متناهی است آنگاه E/K گالوایی است اگر و تنها اگر $|G(E/K)| = [E : K]$.
ج) اگر $E/L/K$ گسترش‌های میدانی جبری و Ω یک بستار جبری برای E باشد، آنگاه یک تناظر دوسویی بین دو مجموعه $G(E/K, \Omega/K)$ و $G(E/L, \Omega/L) \times G(L/K, \Omega/K)$ وجود دارد.

موفّق باشید