

- ۱ فرض کنید $\Phi_n(X)$ چندجمله‌ای دایره‌بر مرتبه n ام باشد.
 الف) نشان دهید اگر $n > 1$ توانی از یک عدد اول p باشد، آنگاه $\Phi_n(1) = p$.
 ب) اگر $n > 1$ توانی از یک عدد اول نباشد آنگاه $\Phi_n(1) = 1$.
- ۲ فرض کنید $\eta_8 \in \mathbb{C}$ یک ریشه هشتم واحد باشد. نشان دهید $\mathbb{Q}(\eta_8)/\mathbb{Q}$ دقیقاً سه زیرمیدان میانی سره دارد که از این قرارند: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ، $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ و $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$.
- ۳ الف) فرض کنید K یک میدان متناهی q عضوی و E/K یک گسترش از درجه n باشد. هسته نگاشت $N : E^* \rightarrow K^*$ چند عضوی است؟ نشان دهید $N : E^* \rightarrow K^*$ پوشاست.
 ب) فرض کنید E/K یک گسترش میدانی از درجه متناهی از میدانهای از مشخصه $p > 0$ باشد. نشان دهید برای هر $a \in E$ داریم $\text{Tr}_{E/K}(a^p) = \text{Tr}_{E/K}(a)^p$.
- ۴ فرض کنید E/K یک گسترش دوری از درجه n باشد و K حاوی یک ریشه n ام اولیه واحد باشد. نشان دهید عضو $\alpha \in E$ موجود است بطوریکه $E = K(\alpha)$ و $\alpha^n \in K$.
- ۵ کوچکترین عدد صحیح مثبت n بطوریکه زاویه n درجه با خط کش و پرگار قابل ترسیم باشد را بیابید.
- ۶ فرض کنید $p \geq 5$ یک عدد اول باشد. چندجمله‌ای $f(x) = X^p - 4X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ را در نظر می‌گیریم.
 الف) نشان دهید $f(X)$ تحویلناپذیر است.
 ب) نشان دهید $f(X)$ دقیقاً سه ریشه حقیقی دارد.
 ج) نشان دهید گروه گالوای $f(X)$ حلپذیر نیست.

موفق باشید