# جبر خطی

امتحان میان ترم — تاریخ پنجشنبه ۸ خرداد ۱۳۹۳

مدت: ۳ ساعت

---

**۱** الف) یک میدان چهار عضوی $F$ شامل میدان دو عضوی $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ با نوشتن جدول ضرب و جمع آن تشکیل دهید.
ب) یک پایه برای $F$ به عنوان فضای برداری روی $\mathbb{F}_2$ نوشته، نشان دهید نگاشت $T : F \to F$ با ضابطه $T(\alpha) = \alpha^2$ یک تبدیل خطی است و ماتریس این تبدیل خطی را در پایه‌ای که در نظر گرفته‌اید بنویسید.

**۲** ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ را در نظر گیرید.
الف) $A$ را به‌صورت پلکانی کاهش یافته در آورید.
ب) رتبه $A$ را محاسبه کنید.
ج) یک پایه برای جوابهای معادله $Ax = 0$ بیابید.
د) یک پایه برای فضای ستونی $A$ بیابید.

**۳** دترمینان ماتریس $n \times n$ به‌صورت $A = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$ که $a$ و $b$ دو اسکالر متمایز هستند را بدست آورید.

**۴** الف) $V$ یک زیرفضای $n+1$ بعدی از $M_n(\mathbb{R})$ است. نشان دهید ماتریس ناصفر $A$ در $V$ یافت می‌شود بطوریکه $\det A = 0$.
ب) با ذکر یک مثال نشان دهید اگر $V$ از بعد $n$ باشد، حکم قسمت (الف) معتبر نیست.

**۵** $V$ یک فضای برداری متناهی‌البعد روی $\mathbb{R}$ است. فرض کنید تبدیل خطی $\varphi : V \to V$ در خاصیت $\varphi \circ \varphi = \varphi$ صدق کند.
الف) نشان دهید $V = \mathrm{im}\varphi + \ker\varphi$ و $\mathrm{im}\varphi \cap \ker\varphi = \{0\}$.
ب) نشان دهید هر ماتریس $P \in M_n(\mathbb{R})$ که در $P^2 = P$ صدق کند متشابه با یک ماتریس قطری است که روی قطر آن فقط $0, 1$ قرار دارند.
ج) نشان دهید برای هر ماتریس $P \in M_n(\mathbb{R})$ که در $P^2 = P$ صدق کند داریم $\mathrm{rank}(P) = \mathrm{trace}(P)$.

**۶** زیرفضای برداری $V$ از $M_n(\mathbb{R})$ متشکل از همه ماتریس‌های متقارن را در نظر می‌گیریم. بعد $V$ را محاسبه کنید.

**موفّق باشید**