

در مسائل زیر همه جا  $V$  یک فضای برداری متناهی البعد روی یک میدان  $F$  از مشخصه مخالف 2،  
 $b : V \times V \rightarrow F$  یک فرم دوخطی متقارن و ناتبهگون و  $q : V \rightarrow F$  فرم مربعی متناظر با آن است. انعکاس  
 در امتداد بردار آنیزوتروپ  $u \in V$  را با  $\tau_u$  نمایش می‌دهیم.

۱ الف) دو فرم دوخطی متقارن و ناتبهگون  $b_1, b_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  مثال بزنید که آنها را نتوان بطور همزمان قطری  
 کرد.

ب) در حد ایزومورفیسم چند فرم دوخطی متقارن و ناتبهگون روی  $\mathbb{R}^3$  وجود دارد؟

ج) اگر گروه متعامد فرمهای قسمت قبل را در نظر گیریم چند گروه دوبدو غیر ایزومورف بدست می‌آید؟

۲ الف) تعریف اندیس ویت  $(V, b)$  را نوشته و خوشتعریفی آن را ثابت کنید.

ب) نشان دهید اندیس ویت  $(V, b)$  کمتر یا مساوی  $\frac{1}{2} \dim V$  است.

۳ فرض کنید  $\dim V = n$  و  $\sigma \in O(V, b)$ .

الف) اگر  $\sigma$  حاصلضرب حداکثر  $r$  انعکاس باشد آنگاه نشان دهید  $\dim \text{Fix}(\sigma) \geq n - r$ .

ب) اگر  $\text{Fix}(\sigma)$  ناتبهگون باشد نشان دهید  $\sigma$  را می‌توان بصورت حاصلضرب دقیقاً  $s = n - \dim \text{Fix}(\sigma)$   
 انعکاس (و نه کمتر) نوشت.

۴ روش پیدا کردن مرتبه گروه متعامد  $O(V, b)$  در حالتی که میدان زمینه  $F$  یک میدان متناهی باشد را بطور خلاصه  
 تشریح کنید.

۵ الف) درستی این حکم را بررسی کنید: شرط لازم و کافی برای اینکه دو انعکاس  $\tau_u$  و  $\tau_v$  با همدیگر جابجا شوند  
 این است که یا  $u$  و  $v$  وابسته خطی باشند یا برهم عمود باشند.

ب) فرض کنید  $\{e_1, \dots, e_n\}$  یک پایه متعامد برای  $(V, b)$  باشد. نشان دهید  $-\text{id} = \tau_{e_1} \cdots \tau_{e_n}$ .

ج) نرم اسپینوری  $-\text{id}$  را بدست آورید.

۶ (سوال اختیاری) نشان دهید هر عضو  $O(V, b)$  را می‌توان بصورت حاصلضرب حداکثر دو برگردان نوشت.

موفق باشید