

- ۱ الف) کدامیک از اعداد $2^2 \times 5^3 \times 7^4$ ، $2^3 \times 5^2 \times 7^3$ را می‌توان بصورت مجموع دو مربع صحیح نوشت؟
 ب) نشان دهید اگر برای عدد صحیح مثبت n دو عدد گویای x و y موجود باشند به طوری که $n = x^2 + y^2$ ، آنگاه دو عدد صحیح x و y با همین خاصیت وجود دارند.
- ۲ الف) همه جواب‌های معادله دیوفانتی $x^2 + y^2 = z^3$ را با شرط $(x, y) = 1$ بدست آورید.
 (راهنمایی: از روش بدست آوردن سه‌تایی‌های فیثاغورثی بوسیله اعداد گاوسی استفاده کنید).
 ب) یک جواب معادله قسمت با شرط $xyz \neq 0$ و $(x, y) = 1$ بیابید.
- ۳ الف) صورت قضیه اعداد اول را بیان کنید.
 ب) p_n را n -امین عدد اول می‌گیریم. نشان دهید $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n \log(p_n)}{n \log(n)^2} = 1$.
 ج) نشان دهید سری $\sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p \log(p)}$ همگراست.
- ۴ همه اعداد اول q را شناسایی کنید به طوری که $\left(\frac{5}{q}\right) = -1$.
- ۵ الف) تعداد ریشه‌های اول به پیمانۀ ۴۱ را محاسبه کنید.
 ب) یک ریشه اولیه به پیمانۀ عدد ۴۱ بیابید.
- ۶ الف) نشان دهید برای $n > 1$ داریم $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$.
 ب) نشان دهید $\sum_{d|n} \mu(d)\tau(d) = (-1)^{\omega(n)}$ ، در اینجا $\tau(m)$ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد m است و $\omega(m)$ تعداد مقسوم‌علیه‌های اول m است.
- ۷ الف) فرم مربعی دومتغیره $f = 5x^2 + 9xy + 5y^2$ را بصورت تقلیل یافته در آورید.
 ب) همه فرمهای مربعی تقلیل یافته با مبین -19 را بیابید.
 ج) چند فرم تقلیل یافته دو به دو غیرهم‌ارز با مبین -19 وجود دارند؟

موفق باشید