

## نظریه سرشت و نمایش گروه‌ها

امتحان پایان ترم

تاریخ دوشنبه ۱۳ خرداد ۱۳۹۲

مدت: ۳ ساعت

- ۱ نشان دهید هر گروه متناهی با مرتبه بزرگتر از ۲، بیش از دو نمایش مختلط تحویل‌ناپذیر غیر هم ارز دارد.
- ۲ الف) جدول کاراکترهای گروه کلاین  $V \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  را تشکیل دهید.  
 ب) با استفاده قسمت (الف) و کاراکترهای ارتقاء یافته، جدول کاراکترهای گروه کواترنیونها  $Q_8$  را تشکیل دهید.
- ۳ از قسمت های این سوال فقط به یک مورد پاسخ دهید.  
 الف) نشان دهید هیچ گروه ساده متناهی، کاراکتر تحویل‌ناپذیر از درجه ۲ ندارد.  
 ب) فرض کنید  $A$  یک زیر گروه آبدلی از گروه متناهی  $G$  باشد به طوری که  $[G : A]$  توانی از یک عدد اول باشد. نشان دهید  $G' \neq G$ .
- ۴ فرض کنید گروه متناهی  $G$  روی مجموعه متناهی و ناتهی  $X$  عمل کند و  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$  کاراکتر جایگشتی این عمل باشد.  
 الف) اگر عمل  $G$  روی  $X$  انتقالی باشد، نشان دهید برای هر  $\alpha \in X$  داریم  $(1_{G_\alpha})^G = \chi$  که در اینجا  $G_\alpha = \text{Stab}_G(\alpha)$ .  
 ب) نشان دهید  $\langle \chi, 1_G \rangle$  برابر با تعداد مدارهای عمل  $G$  روی  $X$  است.  
 ج) اگر  $G$  روی  $X$  به طور انتقالی عمل کند آنگاه تعداد مدارهای عمل  $G_\alpha$  روی  $X$  برابر است با  $\langle \chi, \chi \rangle$ .  
 د) اگر  $G$  روی  $X$  به طور ۲ انتقالی عمل کند آنگاه  $\chi - 1_G$  یک کاراکتر تحویل‌ناپذیر است.
- ۵ الف) فرض کنید  $G$  یک گروه فروبنیوس با مکمل  $H$  باشد. نشان دهید برای هر تابع رده‌ای  $f : H \rightarrow \mathbb{C}$  به طوری که  $f(1) = 0$  داریم  $(f^G)_H = f$ .  
 ب) نشان دهید مرکز هر گروه فروبنیوس بدیهی است.
- ۶ الف) آیا همه کاراکترهای تحویل‌ناپذیر گروه متقارن  $S_n$  حقیقی هستند؟  
 ب) کاراکتری حقیقی از یک گروه مثال بنزید به طوری که کاراکتر هیچ نمایش حقیقی نباشد.  
 ج) جدول کاراکترهای گروه متقارن  $S_4$  به صورت زیر داده شده است. شناساگر شور را برای هر کدام از این کاراکترها حساب کنید و در اینکه این کاراکترها، کاراکترهای یک نمایش حقیقی هستند یا نه، بحث کنید.

نماینده رده تزویجی	(1)	(1 2)	(1 2 3)	(1 2) (3 4)	(1 2 3 4)
$\chi_3$	2	0	-1	2	0
$\chi_4$	3	1	0	-1	-1
$\chi_5$	3	-1	0	-1	1

موفق باشید