

۱ فرض کنید G يك گروه متناهی از مرتبه n باشد. نشان دهید برای هر $g \in G$ داریم $g^n = 1$.

۲ فرض کنید H و K دو زیرگروه نرمال از گروه G باشند.
الف) اگر $H \cap K = \{1\}$ نشان دهید $HK \simeq H \times K$.
ب) اگر G متناهی باشد و $H \cap K \neq \{1\}$ آنگاه نشان دهید $HK \neq H \times K$.

۳ گروه $G = \mathbb{Z}/9$ را در نظر می‌گیریم.
الف) یکی از اتومورفیسم‌های غیرهمانی G را به‌طور صریح مشخص کنید.
ب) همه مولدهای G را بیابید.
ج) تعداد زیرگروه‌های G را محاسبه کنید.

۴ الف) ماکسیمم مرتبه اعضای گروه A_9 را پیدا کنید.
ب) جایگشت $\sigma = (3\ 4\ 5)$ را در گروه متقارن S_6 در نظر می‌گیریم. تعداد مزدوج‌های σ و تعداد جایگشت‌هایی از S_6 که با σ جابجا می‌شوند را محاسبه کنید.

۵ فرض کنید $n \geq 3$. تعداد عناصر مرتبه ۲ را در گروه دووجهی D_n بیابید.

۶ مرکز و گروه مشتق گروه کواترنیونها Q_8 را شناسایی کنید.

۷ فرض کنید G يك گروه متناهی و H زیرگروهی از آن باشد. نشان دهید تعداد مزدوج‌های H (یعنی تعداد همه زیرگروه‌های به‌صورت gHg^{-1} که $g \in G$) برابر است با $[G : N_G(H)]$.

۸ چند گروه آبلی دوبه‌دو غیر ایزومورف از مرتبه ۱۰۰ وجود دارد؟ همه آنها را مشخص کنید.

موفق باشید