

- ۱ الف) فرض کنید R حلقه‌ای یک‌دار، u عضوی وارون‌پذیر از R ، a عضوی پوچتوان از R و $au = ua$. نشان دهید $u + a$ نیز عضوی وارون‌پذیر از R است.
 ب) اگر شرط $au = ua$ را حذف کنیم، آیا حکم همچنان معتبر است؟
- ۲ فرض کنید R حلقه‌ای یک‌دار و I و J دو ایده‌آل دوطرفه از R باشند به طوری که $I + J = R$. نشان دهید $R/(I \cap J) \simeq R/I \times R/J$.
- ۳ الف) نشان دهید در هر حلقه جابجایی و یک‌دار، هر ایده‌آل ماکسیمال، اول است.
 ب) ایده‌آل اولی در یک حلقه جابجایی و یک‌دار مثال بزنید که ماکسیمال نباشد.
 ج) همه ایده‌آل‌های اول حلقه $\mathbb{Z}/12$ را مشخص کنید.
- ۴ فرض کنید p یک عدد اول باشد و R یک دامنه صحیح از مشخصه p باشد. نشان دهید نگاشت $\varphi: R \rightarrow R$ با ضابطه $\varphi(x) = x^p$ یک همومورفیسم یک‌به‌یک است.
- ۵ الف) همه ریشه‌های گویای چندجمله‌ای $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ را (در صورت وجود) بیابید.
 ب) نشان دهید چندجمله‌ای $x^4 + 1$ روی \mathbb{Q} تحویل‌ناپذیر است.
- ۶ الف) همه چند جمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر درجه ۳ را روی میدان دو عضوی $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ مشخص کنید.
 ب) یک میدان ۸ عضوی F بسازید.
- ۷ الف) نشان دهید هر عدد اول به صورت $4k + 3$ در $\mathbb{Z}[i]$ اول است.
 ب) فرض کنید $a \neq 0$ و $b \neq 0$ دو عدد صحیح باشند. نشان دهید عدد گاوسی $z = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ اول است اگر و تنها اگر $N(z)$ اول باشد.

موفق باشید